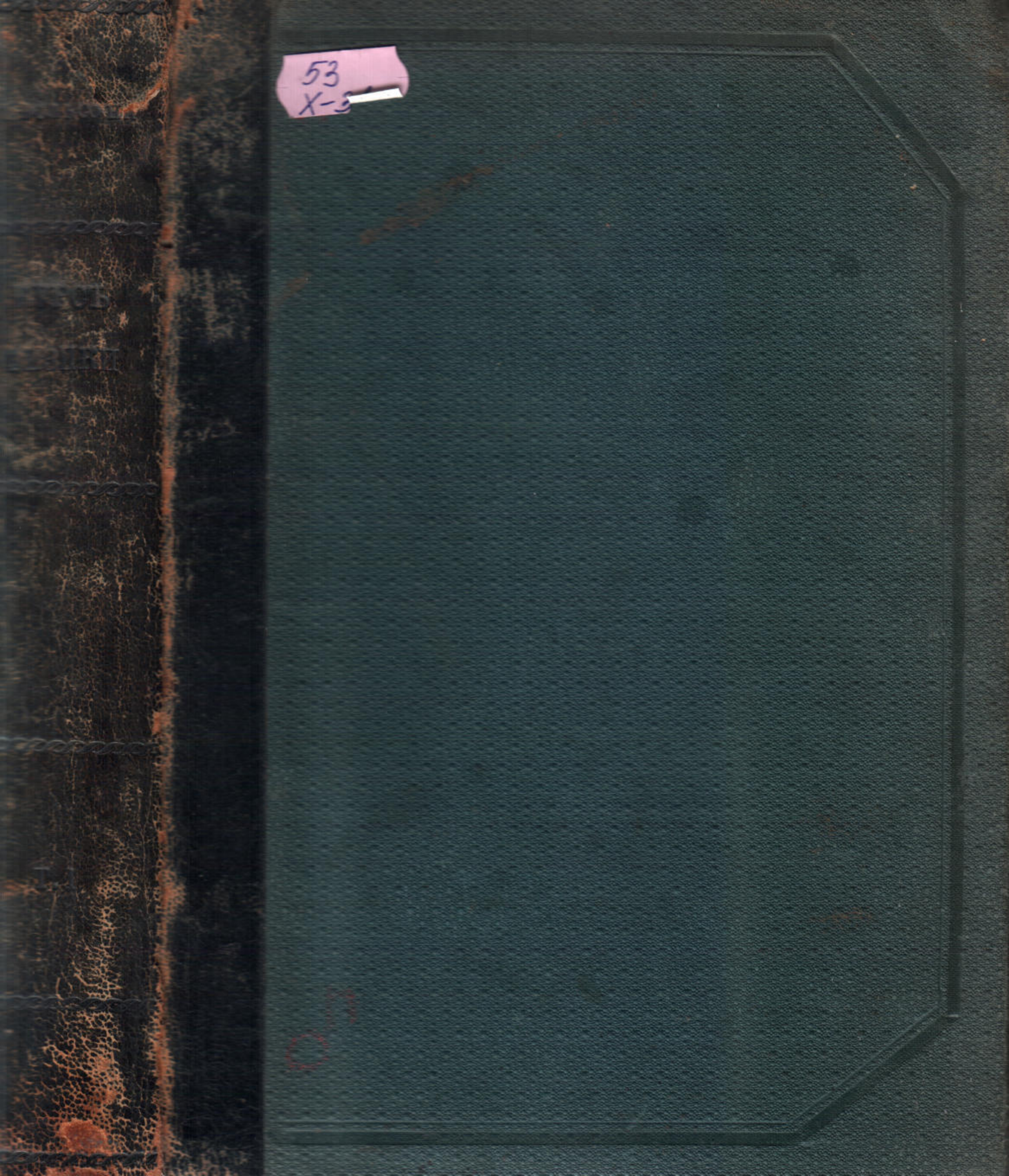

53
X-3

КУРСЪ
ФИЗИКИ

О. Д. ХВОЛЬСОНА.

ТОМЪ ПЕРВЫЙ.

Введеніе.—Механика.—Нѣкоторые измѣрительные приборы и способы измѣренія.—Ученія о газахъ, жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ.

Съ 377 рисунками въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера.
Невскій проспектъ, 14.
1897.

2538

Дорогому отцу

проф. Д. А. Хвольсону

посвящаетъ этотъ трудъ

благодарный авторъ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Quod potui, feci....; что же касается до «meliora», то я и самъ могъ бы надѣяться издать послѣдующія части лучше, а въ далекомъ будущемъ можетъ быть и этотъ томъ сдѣлать «melior», если мои друзья и товарищи по наукѣ не откажутся снабдить меня драгоцѣнными указаніями, о чемъ и прошу ихъ усердно. За всякое указаніе впередъ приношу искреннюю и горячую благодарность.

Весь «Курсъ Физики» разсчитанъ на четыре тома. Второй томъ будетъ содержать ученія о звукѣ и о лучистой энергіи; третій—ученіе о теплотѣ; четвертый—ученія о магнетизмѣ и объ электричествѣ. Надѣюсь выпустить томъ II весною 1898 года.

Глубокую и сердечную благодарность приношу моему учителю проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскому и моимъ друзьямъ проф. А. И. Садовскому и А. Л. Гершуну.

Проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскій, мой искренно любимый и уважаемый учитель, съумѣвшій столь многимъ лицамъ вселить любовь къ наукѣ, многосторонне выказывалъ интересъ къ моей работѣ. Ѳедоръ Ѳомичъ далъ мнѣ возможность воспользоваться рисунками, помѣщенными въ его «Курсѣ Наблюдательной Физики». Изъ этихъ рисунковъ весьма многіе, и притомъ наиболѣе важные и по идеѣ цѣнные, были придуманы Ѳедоромъ Ѳомичемъ. Пользуясь этими рисунками, я черпалъ изъ его книги и соотвѣтствующія имъ описанія и объясненія. Сочувствіе Ѳедора Ѳомича моему труду меня постоянно ободряло.

Проф. А. И. Садовскій прочелъ всю рукопись перваго тома и далъ мнѣ огромное число цѣнныхъ указаній. Его глубокій критическій анализъ и его опытность въ вопросахъ дидактическихъ имѣли не малое вліяніе на мою работу, къ которой онъ постоянно относился съ живѣйшимъ интересомъ. А. Л. Гершунъ читалъ одну корректуру, отмѣчая не только опечатки, но и самые разнообразные промахи, ускользавшіе отъ моего вниманія. Его

широкія знанія и его начитанность принесли этой книгѣ весьма большую пользу.

Проф. А. И. Введенскій и С. Ѳ. Глинка имѣли любезность просмотрѣть нѣкоторыя статьи.

Съ величайшею благодарностью вспоминаю покойнаго К. Л. Риккера, предпринявшаго изданіе этого курса. Это былъ не только умный и предпріимчивый издатель, но и хорошій человѣкъ, всегда глубоко вникавшій въ интересы и нужды тѣхъ, съ которыми его сталкивала его многосложная дѣятельность, и велико число лицъ, которымъ онъ сдѣлалъ добро и которыя благодарно вспоминаютъ его имя. Да будетъ ему вѣчная память!

Его вдова, О. А. Риккеръ, и нынѣ управляющій его фирмою, I. Г. Блажекъ, памятуя завѣты покойнаго, не щадили средствъ при изданіи этой книги. Глубочайшее и сердечное имъ спасибо!

О. Хвольсонъ.

С.-Петербургъ,
Мартъ 1897 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ I-го ТОМА.

Глава третья. Работа и энергія.

Глава четвертая. Гармоническое колебательное движеніе.

Глава пятая. Лучистое распространеніе колебаній.

Глава шестая. Всемірное тяготѣніе.

Глава седьмая. Элементарное ученіе о потенціалѣ.

Глава восьмая. Сила тяжести.

Глава девятая. Размѣръ физическихъ величинъ.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

НѢКОТОРЫЕ ИЗМѢРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И СПОСОБЫ ИЗМѢРЕНІЯ.

Глава первая. Общія замѣчанія о производствѣ физическихъ измѣреній.

Глава вторая. Нѣкоторые вспомогательные приборы.

Глава третья. Измѣреніе линейныхъ размѣровъ тѣлъ.

Глава четвертая. Измѣреніе угловъ.

Глава пятая. Измѣреніе объемовъ.

Глава шестая. Измѣреніе силъ и массъ.

Глава седьмая. Измѣренiе времени.

Глава восьмая. Измѣренiе напряженiя силы тяжести.

Глава девятая. Измѣренiе средней плотности земли.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

УЧЕНIЕ О ГАЗАХЪ.

Глава первая. Плотность газовъ.

Глава вторая. Упругость газовъ.

Глава третья. Барометры, манометры и насосы.

Глава четвертая. Соприкосновеніе газовъ съ газами, жидкостями и твердыми тѣлами.

Глава пятая. Основанія кинетической теоріи газовъ.

Глава шестая. Газы въ состояніи движенія и распаденія.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

УЧЕНІЕ О ЖИДКОСТЯХЪ.

Глава первая. Основныя свойства и строеніе жидкостей.

Глава вторая. Плотность жидкостей.

Глава третья. Сжимаемость жидкостей.

Глава четвертая. Поверхностное натяженіе жидкостей.

Глава пятая. Явленія смачиванія и волосности.

Глава шестая. Растворы твердыхъ и жидкихъ тѣлъ.

Глава седьмая. Диффузія и осмосъ.

Глава восьмая. Треніе въ жидкостяхъ.

Глава девятая. Движеніе жидкостей.

Глава десятая. Коллоиды.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

УЧЕНІЕ О ТВЕРДЫХЪ ТѢЛАХЪ.

Глава первая. Вещество въ твердомъ состояніи.

Глава вторая. Плотность твердыхъ тѣлъ.

Глава третья. Деформаціи твердаго тѣла.

Глава четвертая. Треніе и ударъ твердыхъ тѣлъ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. Два міра. Для каждаго человѣка существуютъ два міра: внутренній и внѣшній; посредниками между этими двумя мірами являются органы чувствъ. Внѣшній міръ имѣетъ способность вліять на органы чувствъ, вызывать въ нихъ особаго рода измѣненія, или, какъ принято говорить, возбуждать въ нихъ раздраженія. Внутренній міръ человѣка опредѣляется совокупностью тѣхъ явленій, которыя абсолютно не могутъ быть доступны непосредственному наблюденію другого человѣка.

Вызванное внѣшнимъ міромъ раздраженіе въ органѣ чувствъ передается міру внутреннему и съ своей стороны вызываетъ въ немъ субъективное ощущеніе, для возможности котораго необходима наличность сознанія. Воспринятое внутреннимъ міромъ субъективное ощущеніе объектируется, т.-е. переносится во внѣшнее пространство, какъ нѣчто, принадлежащее опредѣленному мѣсту и опредѣленному времени. Иначе говоря, путемъ такого объектированія мы переносимъ во внѣшній міръ наши ощущенія, причемъ пространство и время служатъ тѣмъ фономъ, на которомъ располагаются эти объектированныя ощущенія. Въ тѣхъ мѣстахъ пространства, гдѣ они помѣщаются, мы, невольнымъ образомъ, предполагаемъ порождающую ихъ причину. Изслѣдованіе процесса объектированія относится къ философіи.

Человѣку присуща способность сравнивать между собою воспринимаемыя ощущенія, судить объ ихъ одинаковости или неодинаковости и, во второмъ случаѣ, отличать неодинаковости качественныя и количественныя, причемъ количественная неодинаковость можетъ относиться или къ напряженности (интенсивность), или къ протяженности (экстенсивность) или, наконецъ, къ продолжительности раздражающей объектированной причины.

Такъ какъ умозаключеніе, сопровождающее всякое объектированіе, исключительно основано на воспринятомъ ощущеніи, то полнѣйшая одинаковость этихъ ощущеній непремѣнно повлечетъ за собою и тождественность объектированныхъ причинъ и эта тождественность помимо и даже

противъ нашей воли сохраняется и въ тѣхъ случаяхъ, когда другіе органы чувствъ неоспоримо свидѣтельствуютъ намъ о неодинаковости причинъ (предметъ и изображеніе въ зеркалѣ—зрѣніе и осязаніе). Здѣсь кроется одинъ изъ главныхъ источниковъ несомнѣнно ошибочныхъ умозаключеній, приводящихъ къ такъ называемымъ обманамъ зрѣнія, слуха и т. д. Другой источникъ—отсутствіе навыка при ощущеніяхъ новыхъ.

Воспріятіе въ пространствѣ и времени чувственныхъ впечатлѣній, которыя мы сравниваемъ между собою и которымъ мы придаемъ значеніе объективной реальности (объектируемъ), существующей помимо нашего сознанія, называется **внѣшнимъ явленіемъ**. Измѣненіе цвѣта тѣлъ въ зависимости отъ освѣщенія, одинаковость уровня воды въ сосудахъ, качаніе маятника суть примѣры внѣшнихъ явленій.

Одинъ изъ могучихъ трехъ рычаговъ, двигающихъ человѣчество по пути его развитія—это любознательность, имѣющая послѣднею, недостижимою цѣлью—познаніе сущности нашего бытія, истиннаго отношенія нашего міра внутренняго къ міру внѣшнему. Другіе два рычага—стремленіе къ удобству и стремленіе къ славѣ.

Результатомъ любознательности явилось знакомство съ весьма большимъ числомъ разнообразнѣйшихъ явленій, которыя, смотря по характеру, составляютъ предметъ цѣлаго ряда наукъ, между которыми физика занимаетъ одно изъ первыхъ мѣстъ, благодаря обширности обрабатываемаго ею поля и того значенія, которое она имѣетъ почти для всѣхъ другихъ наукъ.

Объектируя причину ощущенія, т.-е. перенося ее въ опредѣленное мѣсто пространства, мы представляемъ себѣ это мѣсто содержащимъ нѣчто, называмое **матеріей** или веществомъ. Ограниченная часть пространства, содержащая матерію, называется **физическимъ тѣломъ**.

Матерія встрѣчается двухъ родовъ: **неорганизованная** и **организованная**; послѣдняя входитъ въ составъ животныхъ и растеній.

Происхожденіе первой организованной матеріи намъ еще неизвѣстно, хотя мы и наблюдаемъ переходъ неорганизованной матеріи въ организованную (питаніе, дыханіе); но этотъ переходъ совершается только въ присутствіи уже готовой организованной матеріи. Тайна же перваго перехода скрыта.

§ 2. Задача физики. Физика въ широчайшемъ смыслѣ слова **есть наука о неорганизованной матеріи и о происходящихъ въ ней явленіяхъ**. Эти явленія называются **явленіями физическими**. Всѣ другія науки о матеріи имѣютъ дѣло съ матеріей организованной (біологическія науки). Физическія явленія могутъ повторяться и въ организованной матеріи, однако попытки свести **всѣ** явленія, обнаруживающіяся въ организованной матеріи, къ явленіямъ физическимъ не удались и еще неизвѣстно удадутся ли онѣ когда-нибудь. Физическія явленія несомнѣнно играютъ выдающуюся роль и въ матеріи организованной; но ими не исчерпывается совокупность ея свойствъ: остается все то, что составляетъ глубокую сущность и условіе «организаціи» и что называется жизнью.

Изучая явленія, происходящія въ неорганизованной матеріи, физика имѣетъ **три задачи** или **цѣли**; открыть, изслѣдовать и объяснить явленія.

Для того, чтобы открыть и изслѣдовать явленія пользуются **наблюде-**

ніемъ и экспериментомъ, которые впрочемъ невозможно отдѣлить другъ отъ друга рѣзкою границею и которые вмѣстѣ составляютъ опытъ. Въ тѣсномъ смыслѣ слова наблюденіе надъ внѣшнимъ явленіемъ есть разсмотрѣніе явленія, происходящаго внѣ насъ при обычной міровой обстановкѣ; экспериментъ же представляетъ изъ себя воспроизведеніе явленія при искусственной, можетъ быть никогда въ природѣ не встрѣчающейся обстановкѣ, съ цѣлью узнанія тѣхъ особенностей, которыя обнаружатся въ самомъ явленіи благодаря этой обстановкѣ. Иногда говорятъ, что производство эксперимента можетъ быть уподоблено постановкѣ опредѣленнаго вопроса, на который мы какъ бы заставляемъ природу дать намъ болѣе или менѣе опредѣленный отвѣтъ. Необходимо, однако, принять во вниманіе, что какъ наблюденіе, такъ и экспериментъ должны предшествоваться и сопровождаться умственною работою, для которой результатъ какъ того, такъ и другого даетъ новую пищу. Отсюда уже ясно, что и наблюденіе имѣетъ цѣлью полученіе отвѣта на вопросъ, выяснившійся предшествовавшею умственною работою. Въ болѣе широкомъ смыслѣ слова «наблюденіе» сопровождаетъ каждый экспериментъ.

Терминологія, которою мы здѣсь пользовались (опытъ, распадающійся на наблюденіе и экспериментъ) есть принятая нынѣ въ философіи. Въ физикѣ принято отличать наблюденіе и опытъ, отождествляя опытъ съ тѣмъ, что выше было названо экспериментомъ. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться этою послѣднею терминологіею, хотя и въ обыденной жизни слово «опытъ» понимается въ болѣе широкомъ общемъ смыслѣ (напримѣръ, въ словахъ: опытъ послѣднихъ годовъ указалъ, что и т. д.).

Третья задача или цѣль физики заключается въ томъ, чтобы «объяснить» явленіе. Объяснить явленіе еще не значитъ сдѣлать взаимную зависимость явленій логически понятной, такъ чтобъ мы видѣли, что за даннымъ явленіемъ съ логическою необходимостью должно возникнуть другое опредѣленное явленіе. Объяснить явленіе значитъ—найти закономѣрную связь между нимъ и другими намъ уже знакомыми явленіями. И такъ, открыть и выяснить связь между явленіями—вотъ въ чемъ заключается сущность третьей задачи физики. Не то важно, что мы сводимъ явленіе A къ явленію B, намъ уже знакомому; такой порядокъ случайный и при другомъ ходѣ историческаго развитія нашихъ познаній онъ могъ бы быть и обратнымъ, мы свели бы явленіе B къ давно знакомому A. Важна установка связи между явленіями A и B. Великіе моменты въ исторіи физики ознаменовались открытіемъ новыхъ, неожиданныхъ связей между явленіями, напр. между магнитными и электрическими, между электрическими и свѣтовыми и т. д.

Существованіе закономѣрной связи между послѣдовательными во времени явленіями для насъ несомнѣнно. Совокупность физическихъ явленій, характеризующихъ внѣшній міръ въ данный моментъ, закономѣрно проистекаетъ отъ совокупности явленій, относившихся къ предыдущему моменту, причемъ одно отдѣльно взятое явленіе A проистекаетъ отъ нѣкоторой опредѣленной группы B предшествовавшихъ явленій. Условно можно группу B назвать ближайшею причиною явленія A, а явленіе A

дѣйствіемъ группы явленій B. Наблюдая явленіе A, мы можемъ поставить себѣ задачу, открыть группу явленій B, т. е. найти причину явленія A. Безчисленные примѣры изъ всѣхъ отдѣловъ физики доказываютъ, однако, что отыскиваніе причины на дѣлѣ сводится къ отыскиванію связей между явленіями.

Называя группу B причиною явленія A, мы полагаемъ, что всѣ остальныя явленія внѣшняго міра, происходящія одновременно съ явленіями B, но не входящія въ составъ этой группы, не вліяютъ на форму явленія A, такъ что всякое ихъ измѣненіе не вызвало бы никакой въ немъ перемѣны.

Взаимныя отношенія причины (В) и дѣйствія (А) управляются двумя положеніями или аксіомами, составляющими основаніе для возможности созданія всякой науки о явленіяхъ. Эти двѣ аксіомы слѣдующія:

I. Изъ данной причины (группа B) можетъ явиться одно и только одно дѣйствіе (явленіе A). Это не значитъ, чтобы кромѣ A не могъ бы одновременно съ A существовать еще рядъ другихъ дѣйствій (явленія C, D и т. д.), также проистекающихъ отъ той же группы B.

Смыслъ аксіомы тотъ, что само явленіе A ни въ какомъ случаѣ (въ занимаемомъ имъ мѣстѣ или времени) даже мысленно не можетъ быть замѣнено другимъ явленіемъ. Эта аксіома выражаетъ существованіе въ мірѣ опредѣленной и въ каждомъ случаѣ единственной закономѣрной связи между послѣдовательными во времени явленіями. Если группа B и закономѣрныя связи извѣстны, то явленіе A можетъ быть предсказано съ абсолютною достовѣрностью. Орудіемъ такого предсказанія служитъ математика и тотъ дедуктивный методъ логическаго мышленія, на которомъ она основана.

II. Одно и то же явленіе A можетъ, какъ дѣйствіе, проистекать отъ большаго числа различныхъ группъ явленій B. Наблюдая явленіе A и будучи знакомы съ большимъ числомъ закономѣрныхъ связей между явленіями вообще, мы все-таки не можемъ знать, играли ли какую-нибудь роль при возникновеніи явленія A именно эти связи или какія-нибудь другія, намъ еще неизвѣстныя. Переходъ отъ B къ A иногда можетъ быть нами сдѣланъ съ абсолютною достовѣрностью; переходъ же отъ A къ B всегда лишь съ большею или меньшею степенью вѣроятности.

Изучая явленія и открывая закономѣрныя между ними связи, физика опредѣляетъ по данной группѣ явленій B единственно возможныя дѣйствія A и по данному явленію A отыскиваетъ наиболѣе вѣроятную причинную группу B. Во всѣхъ отдѣлахъ физики мы найдемъ примѣры этихъ двухъ родовъ умозаключеній.

§ 3. Гипотезы. Гипотезою называется предположеніе о существованіи нѣкоторой опредѣленной закономѣрной связи между данными явленіями. Ходячее опредѣленіе гипотезы, какъ предположеніе о причинѣ даннаго явленія, слишкомъ узкое,—ибо гипотеза необходима во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ связь между явленіями еще не установлена, а потому она можетъ относиться столько же къ причинѣ, сколько и къ слѣдствіямъ.

Гипотезою о причинѣ является выборъ какой-нибудь одной изъ возможныхъ группъ B, могущихъ имѣть слѣдствіемъ то явленіе A, которое мы желаемъ объяснить, т. е. закономѣрно связать съ другими явленіями. Для

выбора причинной группы, для созданія гипотезы, правилъ нѣтъ и быть не можетъ. Это дѣло знанія и генія.

Не всѣ гипотезы имѣютъ одинаковое значеніе, одинаковое право на существованіе. Хорошая гипотеза должна обладать слѣдующими свойствами: она должна быть возможна, согласна съ наблюденными явленіями, она должна быть обширна, проста и провѣрима.

Гипотеза должна быть возможна, т. е. она не должна противорѣчить тому, что абсолютно достовѣрно, что составляетъ непоколебимое достояніе науки (напримѣръ сохраненіе матеріи и энергіи); она должна быть согласна съ явленіями, которыя, на основаніи дознанныхъ закономѣрныхъ связей, должны вытекать изъ нея, какъ единственно возможныя, необходимыя слѣдствія. Необходимая обширность гипотезы требуетъ, чтобы одна гипотеза обнимала возможно большее число явленій. Нельзя допустить, чтобы для каждаго отдѣльнаго изъ ряда сходныхъ явленій A была придумана особая гипотеза, т. е. было допущено существованіе особой причинной группы B. Чѣмъ меньше гипотезъ, тѣмъ выше развитіе науки. Гипотеза должна быть проста, ибо въ сознаніи человѣка глубоко коренится увѣренность въ крайней простотѣ основныхъ причинъ совершающихся въ природѣ явленій. Наконецъ, гипотеза должна быть провѣрима, т. е. должна существовать возможность дедуктивнымъ путемъ перейти отъ нея къ большому числу слѣдствій и опытомъ или наблюденіемъ убѣдиться въ справедливости выведеннаго, т. е. въ реальномъ существованіи этихъ слѣдствій и тѣмъ самымъ получить мѣрило степени вѣроятности самой гипотезы.

Гипотезы, не удовлетворяющія указаннымъ свойствамъ, являются въ наукѣ безцѣльнымъ и вреднымъ баластомъ. Къ нимъ относятся слова Ньютона: hypotheses non fingo [1]).

Кромѣ гипотезъ о причинѣ, т. е. о существованіи группы явленій B, вызывающихъ явленіе A, играютъ не малую роль въ наукѣ, во-первыхъ, гипотезы о существованіи вообще закономѣрной связи между двумя извѣстными явленіями, причемъ остается пока открытымъ вопросъ, находятся ли эти явленія другъ къ другу въ отношеніи причины и слѣдствія или они оба параллельно выростаютъ, какъ слѣдствія еще сокрытой причинной группы явленій (пятна на солнцѣ и сѣверныя сіянія) и, во-вторыхъ, гипотезы о спеціальной формѣ закономѣрной связи между такими явленіями, между которыми причинная связь сама по себѣ несомнѣнна (электрическій токъ и нагрѣваніе проводника).

Безъ гипотезы, въ обширномъ смыслѣ слова, т. е. безъ предположеній, немыслимъ ни одинъ шагъ въ наукѣ. Клодъ Бернаръ говоритъ: «Предвзятая мысль или гипотеза есть необходимая точка исхода всякаго опытнаго изслѣдованія. Безъ нея немыслимо открыть чего-либо новаго». Всякому опыту несомнѣнно должна предшествовать. болѣе или менѣе ясно сознанная гипотеза о существованіи явленія или особомъ его количественномъ или качественномъ характерѣ. И въ чистой математикѣ прогрессъ безъ гипотезы о существованіи той или другой связи между величинами невозмо-

---

[1]) Newton, Principia. Glasgow 1871, p. 530.

женъ. Тотъ же Клодъ Бернаръ говоритъ: «Математикъ и натуралистъ пользуются однимъ и тѣмъ же методомъ, когда они ищутъ новыя истины. Индукціей доходятъ до постановки гипотезъ, которыя провѣряютъ». А на вопросъ, какъ путемъ индукціи дойти до постановки такой гипотезы, которая повела бы къ прогрессу науки, можно найти отвѣтъ въ словахъ Кеплера, сказавшаго «мой добрый геній подсказалъ мнѣ эту мысль».

Особенно слѣдуетъ остерегаться гипотезъ мнимыхъ, которыя отличаясь почти всегда большою сложностью, содержатъ въ себѣ въ видѣ допущенныхъ предположеній все, или почти все, что на основаніи ихъ еще только надлежитъ объяснить, т. е. привести въ закономѣрную связь съ другими явленіями. О такихъ другихъ явленіяхъ въ подобныхъ мнимыхъ гипотезахъ даже и не упоминается, а потому они и не могутъ служить для того разъясненія явленій, для котораго онѣ созданы. Онѣ представляютъ не болѣе, какъ описаніе явленій, иногда весьма полезное по своей краткости и картинности; но для ближайшаго уразумѣнія явленія онѣ служить не могутъ. Какъ напримѣръ такой мнимой гипотезы можно указать на такъ называемую гипотезу о двухъ электрическихъ жидкостяхъ.

Правильно поставленная гипотеза—это главное орудіе развитія науки; но роль этого орудія должна быть временная; чѣмъ скорѣе оно исчезнетъ, т.-е. чѣмъ скорѣе гипотеза перестаетъ быть гипотезою, тѣмъ лучше. Опытъ и только опытъ можетъ привести къ этой цѣли. Сравненіе явленій въ дѣйствительности происходящихъ во внѣшнемъ мірѣ, съ тѣмъ, что путемъ дедукціи открывается, какъ необходимое слѣдствіе изъ допущенной гипотезы, можетъ или доказать несомнѣнную несправедливость гипотезы, отъ которой въ этомъ случаѣ должно отказаться, или служить подтвержденіемъ несомнѣнной ея справедливости, въ каковомъ случаѣ гипотеза, какъ таковая, перестаетъ существовать или, наконецъ, увеличить ея вѣроятность или правдоподобность. Гипотеза, которая не можетъ быть провѣрена непосредственно, но лишь окольнымъ путемъ сравненія ея выводовъ съ результатами опытовъ, никогда не можетъ сдѣлаться достовѣрною. Только при безпредѣльномъ возрастаніи качественно различныхъ наблюденныхъ явленій, согласныхъ съ гипотезою, ея вѣроятность безпредѣльно приближается къ достовѣрности (вращеніе земли около оси и вокругъ солнца, сохраненіе энергіи, существованіе эфира).

Появленіе хорошей гипотезы можетъ сильно двинуть науку; но гораздо важнѣе исчезновеніе гипотезы и именно такими исчезновеніями отмѣчены величайшіе моменты въ исторіи науки. Такое же значеніе имѣетъ соединеніе двухъ или нѣсколькихъ гипотезъ въ одну. Чѣмъ меньше гипотезъ, тѣмъ выше развитіе науки. «Наука стремится не къ установкѣ, но къ устраненію гипотезъ»—говоритъ Оствальдъ. Идеальную законченность достигла бы наука, еслибъ въ ней осталась только одна единичная гипотеза, изъ которой вытекала бы, какъ необходимое слѣдствіе, наблюдаемая закономѣрная связь между всѣми явленіями внѣшняго міра.

§ 4. Эфиръ. Изученіе разнообразныхъ явленій внѣшняго міра давно привело мыслителей къ предположенію, что кромѣ той матеріи, свойства которой мы съ малолѣтства привыкли считать за причину весьма боль-

шого числа окружающихъ насъ явленій; которая присутствуетъ въ тѣхъ мѣстахъ пространства, въ которыхъ мы объектируемъ наши ощущенія и которая особенно общепонятно характеризуется дѣйствіемъ на органъ осязанія при всякой попыткѣ съ нашей стороны проникнуть въ занимаемое ею пространство,—существуютъ еще другіе источники явленій, которые мы временно назовемъ агентами. Они прежде носили латинское названіе imponderabilia—невѣсомыя. Но это названіе во всякомъ случаѣ основано на недоразумѣніи, ибо изъ того, что присутствіе агента въ тѣлѣ не увеличиваетъ его вѣса, еще не слѣдуетъ, что агентъ самъ по себѣ лишенъ того свойства матеріи, которое называется вѣсомъ. Вѣдь вода внутри воды также какъ будто не имѣетъ вѣса и однако никто ее не причислитъ къ «невѣсомымъ». Допуская существованіе этихъ агентовъ, мы изъ опытовъ можемъ только заключить, что они «невѣсящіе», т.-е. при обстановкѣ нашихъ опытовъ не могутъ обнаружить своего вѣса.

Когда-то предполагалось существованіе шести различныхъ агентовъ: два электрическихъ агента, два магнитныхъ, теплородъ и агентъ, являющійся причиною явленій свѣтовыхъ; это соотвѣтствуетъ допущенію шести различныхъ гипотезъ. Съ развитіемъ науки число гипотезъ уменьшается и въ настоящее время мы имѣемъ вмѣсто шести гипотезъ, уже только одну. Вѣроятность гипотезы о существованіи этого одного агента въ высшей степени близка къ достовѣрности.

Назовемъ этотъ агентъ эфиромъ. Мы допускаемъ, что эфиръ наполняетъ собою междузвѣздное пространство, что въ частяхъ вселенной, доступныхъ нашему наблюденію, нѣтъ мѣста, не содержащаго эфира. Мы не станемъ распространяться о тѣхъ свойствахъ, которыя гипотетически приписываются эфиру и которыми онъ отличается отъ матеріи въ обыкновенномъ смыслѣ слова.

Хотя само собою разумѣется, что и эфиръ есть матерія въ томъ смыслѣ, въ которомъ былъ опредѣленъ нами этотъ терминъ, мы въ дальнѣйшемъ для удобства, какъ это теперь принято, будемъ противоставлять другъ другу термины «матерія» и «эфиръ», сохраняя первый только для той, которая болѣе или менѣе непосредственно можетъ влiять на нашъ органъ осязанія. Эфиръ или матерія, заполняющіе часть пространства, представляютъ то, что называется средою.

Во второмъ отдѣлѣ мы ближе познакомимся съ явленіями движенія и увидимъ, что весьма малыя части, изъ которыхъ мы матерію представляемъ себѣ состоящею, могутъ мѣнять свои мѣста въ пространствѣ. Для матеріи существуетъ нѣкоторое распредѣленіе частей, которое мы назовемъ нормальнымъ и которое соотвѣтствуетъ тому случаю, когда между этою матеріей и остальнымъ міромъ не обнаруживаются никакія связи, кромѣ тѣхъ, которыя ни при какихъ условіяхъ не могутъ прекратиться. При появленіи новыхъ связей, распредѣленіе частей матеріи можетъ изъ нормальнаго перейти въ ненормальное. Явленіе возникновенія новаго распредѣленія частей, способнаго сохраниться неопредѣленно долго, но переходящаго въ распредѣленіе нормальное, когда причины (новыя связи съ остальнымъ міромъ), его вызвавшія, прекратятся, называется деформаціей.

Другой весьма важный случай измѣненія нормальнаго распредѣленія частей матеріи мы имѣемъ, когда нѣкоторая ея часть начинаетъ перемѣщаться, непрерывно мѣняя свое положеніе, но не удаляясь при этомъ далеко отъ положенія нормальнаго. Явленіе возникновенія такого движенія называется пертурбаціей. Весьма часто происходитъ такое явленіе: въ нѣкоторой части матеріи возникаетъ пертурбація, вслѣдъ затѣмъ возникаетъ такая же въ сосѣдней съ первою части матеріи, затѣмъ опять въ сосѣдней со второю и т. д. Такое явленіе называется распространеніемъ пертурбаціи въ матеріи. Деформаціи и пертурбаціи, какъ видно изъ опредѣленій, сопровождаются измѣненіемъ взаимнаго расположенія частей матеріи. Бываютъ однако и случаи движенія матеріи безъ такого измѣненія относительнаго расположенія ея частей. Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что разсматриваемая матерія движется какъ цѣлое.

И для эфира существуетъ расположеніе частей нормальное и возможны деформаціи и пертурбаціи; огромная область явленій (свѣта, электричества и магнетизма) находится въ закономѣрной связи съ такими деформаціями и пертурбаціями въ эфирѣ, составляющими ихъ первоначальный источникъ. Значеніе, которое имѣетъ эфиръ въ этихъ явленіяхъ не подлежитъ сомнѣнію; но весьма вѣроятно, что онъ играетъ важную, хотя еще не выясненную роль и въ другихъ—а можетъ быть во всѣхъ безъ исключенія—физическихъ явленіяхъ.

Теперь мы можемъ точнѣе формулировать задачу физики: найти закономѣрную связь между явленіями, происходящими въ неорганизованной матеріи, а также въ эфирѣ съ одной стороны и возможно меньшимъ числомъ гипотетическихъ свойствъ, приписываемыхъ матеріи и эфиру, съ другой. Исторія физики за послѣднее десятилѣтіе заставляетъ насъ думать, что деформаціи и пертурбаціи въ матеріи и въ эфирѣ столь тѣсно связаны съ окружающими насъ физическими явленіями, что эти явленія, сами по себѣ, представляютъ не что иное, какъ многоразличныя формы, въ которыхъ названныя измѣненія, происходящія въ матеріи и въ эфирѣ, дѣйствуя на наши органы чувствъ, нами же объектируются.

§ 5. Раздѣленіе физики. Въ началѣ § 2 мы опредѣлили физику, въ широчайшемъ смыслѣ слова, какъ науку о явленіяхъ, происходящихъ въ неорганизованной матеріи. Постепенное развитіе этой науки привело, съ теченіемъ времени, къ выдѣленію изъ нея обширныхъ отдѣловъ, имѣющихъ каждый своимъ предметомъ нѣкоторую опредѣленную и для него характерную группу явленій и разросшіеся въ самостоятельныя науки. Сюда относятся механика, астрономія, химія, минералогія, геологія и метеорологія. Въ высшей степени знаменательно, что въ послѣднее время химія и астрономія, совсѣмъ было отказавшіяся отъ тѣсной связи съ физикою, вновь стали такъ обильно черпать изъ ея богатаго запаса научнаго матеріала, что возникли какъ бы промежуточные обширные отдѣлы: физическая химія и астрофизика и что это, хотя бы и одностороннее возвращеніе къ старой испытанной почвѣ имѣло послѣдствіемъ обильную жатву, быстрое развитіе важнѣйшихъ новыхъ отраслей химіи и астрономіи.

Изъ физики выдѣлился, далѣе, цѣлый рядъ наукъ, имѣющихъ цѣлью

извлечь практическую для человѣчества пользу изъ того научнаго матеріала, который въ ней содержится. Сюда относится почти все то, на чемъ основана современная культура: практическая механика, паровая техника и электротехника съ ея обширными отдѣлами: телеграфіей, телефоніей, электрическимъ освѣщеніемъ, гальванопластикой, передачей работы и т. д.; фотографію можно сюда же причислить. Всѣ эти науки цѣликомъ упираются на физику.

Матеріалъ, представляющій въ настоящее время содержаніе физики, какъ науки, принято дѣлить на части или отдѣлы, смотря по спеціальному характеру или нѣкоторымъ внѣшнимъ или внутреннимъ признакамъ тѣхъ явленій, которымъ каждая часть посвящена. Однако, такое раздѣленіе всегда имѣетъ характеръ искусственный; нѣтъ возможности провести сколько нибудь рѣзкой границы между отдѣлами и нельзя не прибавить, что непрерывно уменьшающаяся возможность строгаго разграниченія отдѣловъ физики и есть наивѣрнѣйшій критерій ея развитія. Постоянно открываются закономѣрныя связи между самыми разнообразными явленіями, относившимися прежде къ различнымъ отдѣламъ физики. Этимъ самымъ уничтожаются границы между ея отдѣлами, которые иногда вполнѣ сливаются, такъ что изъ нѣсколькихъ отдѣловъ образуется одинъ; въ другихъ случаяхъ эти границы какъ бы стушевываются или появляются промежуточныя части, какъ бы расположенныя на рубежѣ двухъ отдѣловъ. Сложность нѣкоторыхъ явленій, которыя представляются намъ состоящими изъ совокупности нѣсколькихъ явленій, также не мало затрудняетъ ихъ классификацію.

Иногда дѣлятъ физику на двѣ части: на физику опытную и на физику теоретическую, полагая, что къ первой относится главнымъ образомъ тотъ научный матеріалъ, который можетъ быть добытъ путемъ опыта, а ко второй главнымъ образомъ все то, что относится къ дедукціи самихъ явленій, основанной на опредѣленной гипотезѣ и на установленныхъ закономѣрныхъ связяхъ, а иногда и только на послѣднемъ. Подтверждая необходимость наблюденныхъ явленій, какъ слѣдствій изъ дознаннаго или предполагаемаго, теоретическая физика, опять-таки путемъ дедукціи, рѣшаетъ вопросъ о формѣ, которую должно имѣть явленіе при обстановкѣ, при которой оно еще не наблюдалось—иначе говоря, она предсказываетъ явленіе. Нѣтъ однако никакой возможности, хотя бы сколько-нибудь послѣдовательно провести дѣленіе физики на части опытную и теоретическую, ибо при изученіи каждой группы физическихъ явленій опытъ и теорія должны идти рука объ руку. Теорія даетъ возможность объединять, связывать между собою наблюденныя явленія и, что особенно важно, она даетъ возможность отыскать тѣ пути, точнѣе тѣ опыты, которые могли бы служить для провѣрки гипотезъ, т.-е. для измѣненія, въ ту или другую сторону, степени ихъ достовѣрности. Въ обширномъ смыслѣ слова теорія, сохраняя характеръ дедуктивный, можетъ и не пользоваться математикою, какъ главнымъ своимъ орудіемъ; Фарадей не былъ вовсе математикомъ и все же его слѣдуетъ признать величайшимъ теоретикомъ. Въ настоящее время, однако, роль математическаго анализа сдѣлалась преобладающей въ теоретической физикѣ и безъ нея развитіе физики во многихъ важныхъ ея отдѣлахъ крайне за-

труднительно. Если одни опыты безъ теоретической разработки лишь въ рѣдкихъ случаяхъ могутъ дать болѣе, чѣмъ сырой и безсвязный матеріалъ, то «теоретическая физика», отдѣльно взятая, не окруженная со всѣхъ сторонъ опытами, изъ которыхъ она исходитъ и которыми она провѣряется, никогда не составитъ почвы для цѣлесообразнаго развитія науки. Такая теорія безпочвенна; въ ней можетъ быть много привлекательнаго, но она опасна, ибо огромный, на ея развитіе потраченный трудъ можетъ оказаться потеряннымъ, когда одинъ слишкомъ поздно произведенный опытъ докажетъ несогласіе хотя бы одного изъ ея выводовъ съ дѣйствительностью. И такіе случаи бывали въ исторіи физики: обширныя теоретическія изслѣдованія многихъ ученыхъ теряли всякое научное значеніе, разрушались неумолимымъ фактомъ, открытымъ опытомъ (теорія истеченія свѣта). Опытъ и теорія нераздѣльно должны сопровождать физическія изслѣдованія и потому раздѣленіе физики на части опытную и теоретическую на практикѣ встрѣчаетъ непреодолимыя затрудненія.

Существуетъ, однако возможность выдѣлить изъ физики одну ея часть, къ которой относятся весьма разнообразные вопросы, причемъ связующимъ звеномъ является лишь особый характеръ постановки и обработки этихъ вопросовъ. Эту часть можно назвать математическою физикою, которая весьма существенно отличается отъ физики теоретической. Математическая физика исходитъ отъ какого-либо, опытомъ твердо установленнаго факта, выражающаго нѣкоторую закономѣрную связь между явленіями. Эту связь она облекаетъ въ математическую форму и затѣмъ далѣе уже какъ бы превращается въ чистую математику, разрабатывая исключительно путемъ математическаго анализа тѣ слѣдствія, которыя вытекаютъ изъ основного положенія. Исходя только изъ опытнаго факта, математическая физика ничего гипотетическаго въ себѣ не содержитъ, а потому добытые ею результаты вѣчны. Отдѣлы теоретической физики, упирающіеся на гипотезы, могутъ рушиться; отдѣлы математической физики останутся навсегда незыблемы, ибо ихъ фундаментомъ служитъ фактъ, остающійся фактомъ, какъ бы съ теченіемъ времени ни мѣнялся научный взглядъ на болѣе глубокую его сущность. Сюда относятся математическіе отдѣлы ученій о теплопроводности, объ упругости, объ электричествѣ (теорія потенціала и различныя его приложенія), о магнетизмѣ (взаимодѣйствіе и индукція), объ электрическомъ токѣ и т. д. Отдѣлы математической физики имѣютъ весьма небольшую площадь соприкосновенія съ физикою, какъ съ наукою о явленіяхъ; но эта площадь служитъ имъ непоколебимымъ фундаментомъ. Это скорѣе математика, чѣмъ физика.

Въ послѣднее время стали физику иногда дѣлить на физику матеріи и физику эфира. Но это дѣленіе нельзя назвать удачнымъ, такъ какъ роль эфира въ большинствѣ явленій намъ только пока неизвѣстна, откуда, конечно, не вытекаетъ само по себѣ весьма мало вѣроятное слѣдствіе, чтобы эфиръ въ этихъ явленіяхъ дѣйствительно никакой роли не игралъ. Къ физикѣ эфира приходится такимъ образомъ отнести тѣ явленія, въ которыхъ, при данномъ состояніи науки, участіе эфира представляется намъ несомнѣннымъ, причемъ — и это весьма существенно — участіе матеріи столь же

несомнѣнно, ибо намъ пока извѣстно всего только одно явленіе, въ которомъ матерія никакого участія не принимаетъ, а именно явленіе распространенія пертурбацій въ пространствѣ, занятомъ только эфиромъ (мы увидимъ, что деформаціи въ эѳирѣ должны «упираться» на матерію). Съ развитіемъ науки роль эѳира вѣроятно будетъ выясняться все въ большемъ и большемъ числѣ явленій, грань между двумя отдѣлами физики придется переносить все дальше и дальше и въ концѣ концовъ вполнѣ исчезнетъ «физика матеріи». Отсюда ясно, что упомянутое дѣленіе физики неудачное. Физика одна и она—физика «матеріи и эфира».

Мы раздѣлимъ въ этой книгѣ физику на части, трактующія о движеніи (механика), частичныхъ силахъ, звукѣ (акустика), лучистой энергіи, теплотѣ, магнетизмѣ и электричествѣ, указывая, гдѣ окажется нужнымъ, на отсутствіе точныхъ границъ между этими отдѣлами.

§ 6. Физическія величины. Величиною называется то, что мысленно можно себѣ представить мѣняющимся количественно.

Изученіе физическихъ явленій и существующихъ между ними закономѣрныхъ связей привело къ необходимости введенія въ науку понятія о весьма большомъ числѣ разнообразныхъ величинъ, характеризующихъ либо спеціальныя свойства той или другой матеріи, либо особенности самыхъ явленій. Эти величины мы будемъ называть физическими.

Слѣдуетъ строго отличать величины, понятіе или представленіе о которыхъ присуще всѣмъ людямъ, отъ тѣхъ величинъ, которыя нами вводятся въ науку. Величины перваго рода мы называемъ первоначальными; онѣ, прежде всего, не могутъ подвергаться опредѣленію, т.-е. точной формулировкѣ того, что должно понимать подъ ихъ названіемъ, ибо всякое опредѣленіе только и можетъ быть сдѣлано путемъ указанія на зависимость опредѣляемой величины отъ чего-либо уже извѣстнаго, т.-е. ранѣе подвергнутаго точному опредѣленію. Величины же перваго рода соотвѣтствуютъ понятіямъ первоначальнымъ, исходнымъ; онѣ въ опредѣленіяхъ и не нуждаются, ибо ихъ значеніе a priori ясно каждому. Свойства этихъ величинъ опредѣляются тѣмъ представленіемъ, которое всѣми связывается съ ихъ названіемъ и потому указаніе на эти свойства каждый долженъ искать въ самомъ себѣ. Къ величинамъ этого рода во всякомъ случаѣ относятся:

1) протяженности линейная, поверхностная и объемная или точнѣе: длина прямой линіи, площадь части плоскости, ограниченной прямыми линіями и объемъ части пространства, ограниченнаго плоскостями. Длина кривой линіи уже не соотвѣтствуетъ понятію первоначальному и нуждается въ опредѣленіи;

2) время,

3) давленіе (въ смыслѣ мышечнаго ощущенія),

4) скорость равномѣрнаго, прямолинейнаго движенія.

Оставляемъ въ сторонѣ вопросъ о полнотѣ или неполнотѣ этого списка; величины, понятіе о которыхъ не присуще всѣмъ людямъ и которыя мы вводимъ въ науку, нуждаются въ особомъ опредѣленіи, на крайнюю точность котораго должно быть обращено величайшее вниманіе; оно должно быть таково, чтобы исключалась всякая возможность недоразумѣнія, вся-

кое двусмысліе. Опредѣленіе должно поэтому отличаться полнотою, т.-е. въ немъ должно заключаться все, что можетъ служить отличительнымъ признакомъ опредѣляемой величины. Разъ опредѣленіе величины формулировано, слѣдуетъ уже до крайности остерегаться приписывать этой величинѣ такія свойства, которыя не вытекаютъ изъ самаго опредѣленія. Ошибки въ этомъ направленіи особенно возможны въ тѣхъ случаяхъ, когда съ самимъ названіемъ величины, иногда неудачно выбраннымъ, невольно связывается представленіе о томъ или другомъ ея свойствѣ.

Величины, соотвѣтствущія одному и тому-же опредѣленію и отличающіяся другъ отъ друга только количественно, называются величинами однородными. Такія величины могутъ быть сравниваемы между собою или, какъ еще выражаются, онѣ могутъ быть измѣрены. Измѣрить величину значитъ опредѣлить, сколько разъ въ ней заключается нѣкоторая избранная величина того же рода, называемая въ этомъ случаѣ единицею этого рода величины (единица вѣса, единица сопротивленія и т. д.). О выборѣ этихъ единицъ мѣры будетъ подробнѣе сказано ниже; замѣтимъ, что вообще стремятся къ тому, чтобъ для каждаго рода величинъ была установлена и общепринята одна опредѣленная единица съ ея кратными и долями, взятыми по десятичной системѣ. Сравненіе двухъ величинъ можетъ быть сдѣлано двумя способами: или каждая изъ нихъ порознь измѣряется установленною единицею и затѣмъ сравниваются полученные числовые результаты, или двѣ величины непосредственно сравниваются между собою, причемъ, на дѣлѣ, одна изъ нихъ, хотя иногда только временно, играетъ роль единицы мѣры.

Выборъ единицы для каждаго рода величины, самъ по себѣ, ничѣмъ не обусловленъ и мы можемъ какую угодно изъ величинъ даннаго рода принять за единицу. Мы увидимъ, однако, ниже, что по различнымъ причинамъ въ настоящее время отказались отъ произвола при выборѣ этихъ единицъ и условились выбирать ихъ на основаніи нѣкотораго опредѣленнаго правила, дающаго возможность связать единицы всевозможныхъ величинъ, встрѣчающихся въ физикѣ, въ одно стройное цѣлое, называемою системою единицъ.

Измѣреніе физическихъ величинъ, т.-е. сравненіе одной данной величины съ установленною единицею или непосредственное сравненіе двухъ данныхъ величинъ представляетъ задачу, которая разрѣшается путемъ опыта, произведеннаго съ опредѣленными инструментами и по опредѣленнымъ методамъ, построеннымъ и выработаннымъ для этой цѣли и весьма различнымъ, смотря по роду измѣряемой величины. Точность полученнаго при измѣреніи результата зависитъ отъ качествъ, иногда весьма индивидуальныхъ, самихъ инструментовъ, отъ избраннаго метода и отъ умѣнья и навыка лица, производящаго измѣреніе.

Результатомъ произведеннаго измѣренія является число, показывающее, сколько разъ выбранная единица содержится въ измѣренной величинѣ. Это число называется численнымъ значеніемъ измѣренной физической величины. Выражая или изслѣдуя закономѣрную связь между явленіями, мы обыкновенно замѣняемъ ариѳметическій методъ алгебраическимъ, выражая численное значеніе величины буквою. Слѣдуетъ весьма твердо помнить, что

эти буквы изображаютъ не самыя величины, а исключительно только ихъ численныя значенія, полученныя, хотя бы только мысленно произведеннымъ измѣреніемъ величинъ нѣкоторыми единицами. Забывая объ этомъ, можно придти къ весьма несообразнымъ результатамъ; возможность же ошибочныхъ представленій является здѣсь вслѣдствіе того, что принято эти буквы называть именами самихъ величинъ. Говорятъ, напримѣръ, длина l, теплота q, сила тока i; но l не есть сама длина, q не есть сама теплота и i не есть сама сила тока; l, q и i суть числа, показывающія, сколько въ разсматриваемыхъ длинѣ, теплотѣ и силѣ тока заключается единицъ длины, теплоты и силы тока.

Численное значеніе всякой величины обратно пропорціонально избранной единицѣ. Это понятно: если увеличить единицу въ n разъ, то въ n разъ уменьшится число, показывающее, сколько разъ данная величина содержитъ въ себѣ эту единицу.

Что буквы, о которыхъ было выше сказано, напримѣръ приведенныя буквы l, q и i не изображаютъ самыя физическія величины, а лишь ихъ численныя значенія, явствуетъ изъ того, что ихъ значеніе мѣняется вмѣстѣ съ выборомъ единицъ; еслибъ подъ буквою q подразумѣвалась сама физическая величина, данная въ каждомъ частномъ случаѣ и очевидно независящая отъ выбора единицы мѣры, то и значеніе буквы q не мѣнялось бы вмѣстѣ съ этою единицею.

Въ дальнѣйшемъ мы иногда будемъ встрѣчаться съ такими величинами, численное значеніе которыхъ, въ каждомъ частномъ случаѣ, не зависитъ отъ выбора какихъ-либо единицъ мѣры; изъ называютъ отвлеченными или (менѣе удачно) абсолютными числами. И эти величины могутъ быть обозначены буквою. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ оказывается, однако, возможнымъ выяснить—можетъ быть не всегда безъ нѣкоторой натяжки, что мы имѣемъ дѣло съ физическою величиною, для которой единица разъ навсегда установлена. Разберемъ слѣдующій примѣръ. Изъ элементарной физики извѣстно, что коеффиціентомъ преломленія нѣкотораго вещества называется отношеніе синуса угла паденія луча къ синусу угла преломленія при переходѣ его изъ пустоты (т.-е. изъ эфира) въ это вещество. При такомъ опредѣленіи коеффиціентъ преломленія n вполнѣ пріобрѣтаетъ характеръ отвлеченнаго числа (отношеніе двухъ отвлеченныхъ чиселъ) и понятіе о единицѣ, отъ выбора которой могло бы зависѣть его численное значеніе, какъ будто вполнѣ отсутствуетъ. Однако постоянство численнаго значенія коеффиціента преломленія дѣлается уже менѣе абсолютнымъ, если вспомнить, что «пустота» была выбрана довольно произвольно и что численныя значенія всѣхъ величинъ n мѣняются, если относить ихъ къ переходу не изъ пустоты, но изъ воздуха. Можно однако идти дальше и разсуждать такимъ образомъ: матерія имѣетъ, между прочимъ, свойство вліять на лучъ свѣта, распространяющійся въ ней. Это свойство, подобно множеству другихъ, опредѣляется нѣкоторою физическою величиною, количественно различною для различныхъ веществъ. Принимая эту величину для эфира за единицу, мы найдемъ, что ея численное значеніе для другихъ веществъ равно отношенію упомянутыхъ двухъ синусовъ. Теорія даетъ намъ, въ этомъ

случаѣ, возможность идти еще дальше и точнѣе опредѣлить эту величину. Она не что иное, какъ медленность (обратное отъ скорости) распространенія свѣта въ данномъ веществѣ и слѣдовательно ясно, что ея численное значеніе въ каждомъ данномъ случаѣ зависитъ отъ выбора того вещества, для котораго эта величина принимается равною единицѣ. Только въ томъ случаѣ, если за единицу принять «медленность» въ эфирѣ, мы для численнаго значенія этой медленности въ другой средѣ получаемъ отношеніе синусовъ. Допуская, что только-что изложенное представляется нѣсколько натянутымъ и что для упрощенія можно допустить существованіе между физическими величинами и такихъ, которыя представляются абсолютными числами, все же слѣдуетъ вводить такія величины лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда ихъ замѣна величинами, численное значеніе которыхъ явственно зависитъ отъ выбора единицъ, представляетъ безполезное усложненіе. Поэтому ихъ ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ вводить безо всякой надобности, когда болѣе общее понятіе о величинѣ, численное значеніе которой зависитъ отъ выбора единицы, вытекаетъ непосредственно изъ наблюденныхъ явленій. Вотъ почему нельзя одобрить совершенно излишняго раздвоенія одной и той же по внутреннему ея значенію физической величины на двѣ, изъ которыхъ одна считается за число именованное, а другая за число отвлеченное. Какъ на примѣръ, укажемъ на плотность и удѣльный вѣсъ. Иногда говорятъ, что плотность есть вѣсъ или есть масса единицы объема, а удѣльный вѣсъ есть отвлеченное число, равное отношенію вѣса или массы къ вѣсу или массѣ воды и т. д. Все это не только совершенно излишне, но и прямо основано на ошибочномъ толкованіи физическихъ формулъ, о чемъ подробнѣе будетъ сказано въ слѣдующемъ параграфѣ. Плотность не есть ни вѣсъ, ни масса и нѣтъ никакой надобности вводить понятіе о какомъ-то удѣльномъ вѣсѣ, какъ отвлеченномъ числѣ. Существуетъ особаго рода величина, характерная для данной матеріи; ее можно назвать какъ угодно, но она во всякомъ случаѣ величина особаго рода (sui generis) и уже поэтому неможетъ быть ни массой, ни вѣсомъ, ибо эти послѣднія суть физическія величины другого рода. Назовемъ ее плотностью. Какъ и всякая физическая величина, она имѣетъ свою единицу, которую можно выбрать произвольно, но которая не можетъ быть ничѣмъ инымъ, какъ опять таки нѣкоторою плотностью. Давать численному значенію этой величины при нѣкоторомъ опредѣленномъ выборѣ единицы (плотность воды принимается за единицу плотности) особое названіе—это совершенно излишне и вызываетъ только путаницу въ понятіяхъ.

Въ § 1 мы упомянули, что пространство и время представляютъ тотъ двойной фонъ, на которомъ объектируются воспринятыя нами ощущенія, а въ началѣ этого § 6 мы указали на протяженность, время и давленіе, какъ на понятія первоначальныя, не требующія опредѣленія, которое впрочемъ даже и не можетъ быть дано. Понятіе о давленіи получается изъ субъективнаго ощущенія усилія противоставляемаго внѣшней причинѣ, производящей давленіе и никакая формулировка его сущности невозможна. Три различныхъ протяженности, время и давленіе суть величины, съ которыми наука о физическихъ явленіяхъ имѣетъ дѣло непрерывно, а потому уже здѣсь

будетъ мѣсто сказать нѣсколько словъ о тѣхъ единицахъ, коими эти три величины нынѣ чаще всего измѣряются.

За единицу длины принимается метръ, равный разстоянію при 0° двухъ черточекъ, проведенныхъ на платиновомъ стержнѣ, изготовленномъ въ концѣ прошлаго столѣтія и хранящемся въ Парижѣ. Эта единица длины замѣтно отличается отъ десятимиліонной доли четверти Парижскаго меридіана, составлявшей первоначальное опредѣленіе метра. Международный комитетъ мѣръ и вѣсовъ принялъ 2-го октября 1879 г. рядъ сокращенныхъ обозначеній для различныхъ единицъ протяженностей. Для метра принято обозначеніе *m*. Тысяча метровъ называются километромъ (*km*); метръ дѣлится на десять дециметровъ (*dm*), сто сантиметровъ (*cm*) и тысячу миллиметровъ (*mm*); тысячная доля миллиметра называется микронъ (μ). Единицы длины еще называются линейными единицами.

За единицу поверхностной протяженности, проще — площади, принимается протяженность квадрата, каждая изъ сторонъ котораго равна линейной единицѣ.

За единицу объемной протяженности, проще — объема, принимается объемъ куба, каждое изъ реберъ котораго равно линейной единицѣ; кубическій дециметръ называется литръ (*l*).

За единицу времени мы, желая поступать строго научно, должны принять время, которое необходимо для совершенія нѣкотораго опредѣленнаго явленія, причемъ явленіе должно быть избрано такое, которое можетъ неопредѣленное число разъ повторяться при вполнѣ одинаковыхъ обстоятельствахъ, т.-е. безо всякаго измѣненія его причинной группы явленій. Такимъ явленіемъ можетъ служить качаніе любого маятника; время одного качанія и можетъ быть принято за единицу времени. Пользуясь такой единицей времени, мы убѣждаемся, что земля вращается около своей оси равномѣрно, а это уже даетъ намъ научное основаніе и право принять за единицу времени время обращенія земли около ея оси, такъ называемыя среднія солнечныя сутки, которыя дѣлятся на 24 часа, на $24 \times 60 = 1440$ минутъ и на $24 \times 60^2 = 86400$ секундъ. Историческій ходъ выбора единицы времени былъ обратный.

Исходя изъ субъективнаго представленія о давленіи, мы убѣждаемся въ томъ, что на земной поверхности всякое тѣло, когда оно находится въ покоѣ, производитъ давленіе на то другое тѣло, на которомъ оно покоится. Это давленіе называется вѣсомъ тѣла; вѣсъ, будучи лишь частнымъ случаемъ давленія вообще, долженъ имѣть общую съ нимъ единицу. За единицу давленія и вѣса принимается вѣсъ, т.-е. давленіе на опору въ Парижѣ нѣкотораго опредѣленнаго тѣла, которое въ концѣ прошлаго столѣтія было изготовлено изъ платины и которое хранится въ Парижѣ; предполагается при этомъ, что это тѣло находится въ безвоздушномъ пространствѣ. Эта единица вѣса и давленія называется килограммомъ. Кубическій дециметръ (литръ) чистой воды при 4° С. имѣетъ вѣсъ, близкій къ одному килограмму. Килограммъ обозначается буквами *kg*; онъ дѣлится на 1000 граммовъ (*g*); граммъ равенъ 10 дециграммамъ (*dg*), 100 сантиграммамъ (*cg*) и 1000 миллиграммамъ (*mg*). Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что вѣсъ кубическаго сантиметра чистой воды при 4° С. близокъ къ 1 грамму.

Для отличія отъ другихъ единицъ, мы, въ дальнѣйшемъ, только-что разсмотрѣнныя единицы вѣса и давленія будемъ иногда называть французскими. Въ слѣдующемъ отдѣлѣ мы познакомимся съ другою единицею давленія—диномъ.

Мы упомянули выше старинный терминъ «невѣсомое» и указали на то, что его слѣдовало бы замѣнить словомъ «невѣсящій». Что о «невѣсомости» эфира не можетъ быть и рѣчи, видно изъ того, что соображенія, о которыхъ здѣсь не мѣсто распространяться, привели къ приблизительному опредѣленію вѣса эфира. Онъ очень малъ, но не равенъ нулю. Эфирный шаръ, по размѣрамъ равный земному шару, обнаружилъ бы вѣсъ, превышающій 200 kg., еслибъ его можно было поставить въ тѣ условія, при которыхъ находятся взвѣшиваемыя нами тѣла. Тутъ, впрочемъ, необходима одна оговорка, которую мы выскажемъ ниже, въ Отдѣлѣ второмъ.

§ 7. Физическіе законы. Отыскиваніе закономѣрной связи между физическими явленіями приводитъ къ открытію такъ называемыхъ физическихъ законовъ. Этими законами устанавливается ближайшій характеръ зависимости различныхъ физическихъ величинъ другъ отъ друга. Такая зависимость можетъ быть качественная или количественная. Физическіе законы относятся почти исключительно къ количественной сторонѣ явленій, т. е. ими опредѣляется, какимъ образомъ количественно мѣняется одна величина при количественномъ измѣненіи другой величины, съ которой она закономѣрно связана или, какъ говорятъ, отъ которой она зависитъ. Законовъ физики, которые относились бы къ качественной сторонѣ явленій, сравнительно немного. Ими устанавливаются внѣшніе признаки явленій, а за ними всегда скрытъ какой-нибудь количественный законъ, еще не выясненный. Нерѣдко злоупотребляютъ терминомъ «законъ», пользуясь имъ тамъ, гдѣ вѣрнѣе было бы говорить о правилѣ, которому явленія подчинены.

Открытіе или провѣрка физическаго закона достигается слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ символически черезъ A и B двѣ физическія величины (не ихъ численныя значенія). Законъ выражается математически, какъ зависимость между численными значеніями a и b величинъ A и B. Чтобы открыть эту зависимость, мы должны опытъ или наблюденіе устроить такъ, чтобы величина A могла послѣдовательно имѣть рядъ количественно различныхъ значеній, вслѣдствіе чего и величина B будетъ количественно мѣняться. Далѣе мы должны имѣть возможность каждый разъ измѣрить величины A и B, т. е. опредѣлить ихъ численныя значенія, выбравъ для этого какъ для одной, такъ и для другой величины опредѣленныя единицы.

Непосредственнымъ результатомъ опыта и наблюденій являются такимъ образомъ два ряда чиселъ, которыя суть не что иное, какъ числовыя значенія этихъ двухъ физическихъ величинъ, зависящія, какъ мы видимъ, отъ выбора единицъ мѣры. Числа двухъ рядовъ, понятно, сопряжены, т. е. каждому числу a одного ряда соотвѣтствуетъ одно число b другого. Искомый законъ выражается тѣмъ, что всѣ числа a могутъ быть получены изъ чиселъ b путемъ одной и той же ариѳметической манипуляціи, произведенной надъ этими числами, т. е. подстановкою ихъ въ одно и то же алге-

браическое выраженіе, содержащее букву b. Символически можно это выразить равенствомъ $a=f(b)$, т. е. a есть нѣкоторая функція отъ b. Здѣсь необходимо обратить вниманіе на два обстоятельства, играющія весьма важную роль.

Во-первыхъ никакіе опыты или наблюденія не могутъ намъ дать искомыхъ численныхъ значеній a и b съ совершенною точностью. Этотъ вопросъ будетъ подробнѣе разсмотрѣнъ въ Отдѣлѣ третьемъ. Неизбѣжныя, такъ называемыя «ошибки наблюденій» даютъ въ результатѣ неточныя значенія чиселъ a и b, которыя вообще не удовлетворяютъ вышеупомянутому равенству чиселъ a и результатовъ подстановки чиселъ b въ нѣкоторое опредѣленное алгебраическое выраженіе. Всегда оказывается отступленіе отъ такого равенства. Дѣло наблюдателя рѣшить путемъ критическаго разбора результатовъ измѣреній, могутъ ли замѣченныя отступленія дѣйствительно быть объяснены ошибками наблюденій или слѣдуетъ на основаніи ихъ присутствія заключить о несуществованіи гипотетически предполагаемаго закона $a=f(b)$.

Во-вторыхъ въ самихъ числахъ a и b заключается нѣкоторый произволъ, являющійся какъ слѣдствіе произвольности выбора единицъ величинъ A и B. Еслибъ мы выбрали другія единицы, то числа каждаго изъ двухъ рядовъ a и b оказались бы помноженными на одно и то же постоянное число, равное отношенію старой единицы соотвѣтствующей величины къ ея новой единицѣ. Указанный произволъ съ внѣшней стороны обнаруживается тѣмъ, что въ выраженіе, которое содержитъ букву b и должно быть равно a, войдутъ одинъ или нѣсколько чиселъ, спеціальное значеніе, т. е. величина которыхъ, не будучи характернымъ для самаго физическаго закона, зависитъ отъ выбора единицъ величинъ A и B. Эти числа называются вообще **коэффиціентами**. Одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ всегда можетъ быть поставленъ какъ множитель, общій всѣмъ членамъ выраженія $f(b)$. **Онъ называется коэффиціентомъ или множителемъ пропорціональности**; его значеніе во всякомъ случаѣ зависитъ по крайней мѣрѣ отъ выбранной единицы величины A. Обобщая, мы можемъ сказать:

Въ выраженія физическихъ законовъ, $a=f(b)$, должны входить коэффиціенты, численныя значенія которыхъ не характерны для вида закона и зависятъ отъ выбора единицъ, коими мы измѣряемъ тѣ физическія величины, о которыхъ говорится въ этомъ законѣ.

Иногда говорятъ, что коэффиціентъ пропорціональности можетъ самъ имѣть опредѣленное физическое значеніе, представляя численное значеніе нѣкоторой опредѣленной новой физической величины. Это невѣрно. Во всѣхъ случаяхъ, когда, повидимому, представляется нѣчто подобное, дѣло въ дѣйствительности сводится къ тому, что первоначально выраженный нами законъ **не исчерпываетъ всѣхъ сторонъ явленія**, что величина A зависитъ не только отъ величины B, но еще отъ другихъ величинъ C, D и т. д. Если исчерпать всѣ эти зависимости, то всегда окажется, что коэффиціентъ пропорціональности есть число и только число и не можетъ

быть разсматриваемо какъ численное значеніе какой бы то ни было физической величины.

Перейдемъ къ примѣру отысканія и выраженія физическаго закона.

Изъ элементарной физики извѣстна важная роль, которую играетъ физическая величина, названная силою тока, и что существуютъ методы ея измѣренія, причемъ нѣкоторая опредѣленная сила тока принимается за единицу. Наблюденія показываютъ, что въ проволокѣ, черезъ которую проходитъ токъ, выдѣляется теплота, которую также можно измѣрить своею, впрочемъ, какъ и всѣ другія, произвольною единицею. Опыты указываютъ далѣе, что количество теплоты, образующейся въ проволокѣ, зависитъ отъ силы тока и отъ промежутка времени, въ теченіе котораго продолжалось явленіе тока; кромѣ того оно еще зависитъ отъ такъ называемаго сопротивленія проволоки, величины, которую мы также умѣемъ измѣрять особою единицею сопротивленія. Чтобы найти закономѣрную связь между явленіемъ выдѣленія теплоты въ проволокѣ и явленіемъ электрическаго тока, мы должны открыть три закона, выражающіе зависимость количества теплоты Q отъ силы тока I, сопротивленія W и времени T (продолжительности). Для этого слѣдуетъ произвести три двойныхъ ряда измѣренія.

Сперва мы опредѣляемъ численныя значенія q и i количества теплоты и силы тока, оставляя сопротивленіе и время безъ измѣненія; для этого мы должны черезъ одну и туже проволоку, въ теченіе одного и того же промежутка времени пропускать токи различной силы и каждый разъ опредѣлять числа q и i. Разсматривая полученные два ряда чиселъ, мы убѣждаемся, что всѣ числа q получаются отъ умноженія квадрата соотвѣтствующаго числа i на одно и то же число, которое для общности обозначимъ черезъ C_1; итакъ мы находимъ, что $q = C_1 i^2$. Понятно, что коеффиціентъ C_1 получился бы другой, еслибъ мы величины Q и I измѣряли другими единицами — въ этомъ случаѣ всѣ числа q и i получились бы другія. Еслибъ мы, не мѣняя единицъ величинъ Q и I взяли бы другую проволоку или измѣнили бы продолжительность опыта, то число C_1 также получилось бы другое. Этимъ доказывается, что Q зависитъ не только отъ I, но еще отъ другихъ обстоятельствъ и что формулою $q=C_1 i^2$ не исчерпывается закономѣрность, проявляющаяся въ изслѣдуемомъ явленіи выдѣленія тепла въ проволокѣ, чрезъ которую проходитъ токъ.

Мѣняя проволоку, но оставляя силу тока и продолжительность опыта безъ измѣненія и измѣряя каждый разъ сопротивленіе W и количество тепла Q, мы вновь получаемъ два ряда чиселъ w и q. Оказывается, что числа q получаются отъ умноженія соотвѣтствующихъ чиселъ w на одно и то же число, которое обозначимъ черезъ C_2. Это даетъ намъ формулу $q = C_2 w$; число C_2 зависитъ отъ единицъ, которыми мы пользовались при измѣреніи количества теплоты и сопротивленія.

Оставляя, наконецъ, силу тока и сопротивленіе (проволоку) безъ измѣненія, измѣряя время t и количество теплоты, мы убѣждаемся въ третьемъ соотношеніи $q = C_3 t$.

Три ряда опытовъ показали, что численное значеніе q количества тепла мѣняется пропорціонально квадрату численнаго значенія i силы тока,

пропорціонально численному значенію w сопротивленія и пропорціонально численному значенію t времени. Отсюда слѣдуетъ, что q пропорціонально произведенію чиселъ i^2, w и t, т. е. что, если мѣнять произвольно величины I, W и T, каждый разъ измѣрять Q, то всѣ числа q получатся, если помножить произведеніе чиселъ i^2, w и t на одно и то же число, которое мы обозначимъ черезъ C. Это выражается формулою

$$q = Ci^2wt \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

Здѣсь коеффиціентъ пропорціональности C есть только число, значеніе котораго зависитъ отъ выбора всѣхъ четырехъ единицъ количества теплоты, силы тока, сопротивленія и времени.

Слѣдуетъ твердо помнить, что всѣ формулы, подобныя (1), встрѣчающіяся въ физикѣ, выражаютъ связи между численными значеніями различныхъ величинъ и что поэтому буквы, входящія въ формулы, суть представители чиселъ. Это тѣмъ болѣе необходимо помнить, что общепринято сокращенно формулировать законы физики, называя при этомъ самыя величины и упуская слова «численное значеніе». Вмѣсто правильной формулировка закона, которую мы привели выше, принято выражаться такъ: количество тепла, выдѣляющагося въ проволокѣ при прохожденіи черезъ нее тока, пропорціонально квадрату силы тока, пропорціонально сопротивленію проволоки и пропорціонально времени. Мы увидимъ ниже, къ какимъ уже прямо опаснымъ послѣдствіямъ можетъ повести въ частныхъ случаяхъ такая сокращенная формулировка.

Коеффиціентъ пропорціональности имѣетъ всегда нѣсколько (по крайней мѣрѣ два) физическихъ значеній, которыя легко указать. Ограничиваемся примѣромъ. Формула (1) показываетъ, что при $i = 1$, $w = 1$ и $t = 1$ число $q = C$. Отсюда слѣдуетъ, что число C равно числу единицъ тепла, которыя въ единицу времени выдѣляются въ проволокѣ, сопротивленіе которой равно единицѣ, если черезъ нее проходитъ единица силы тока (какъ принято выражаться). Та же формула даетъ однако при $q = 1$, $i = 1$ и $t = 1$, что $C = \frac{1}{w}$. Это показываетъ, что число C равно также единицѣ, дѣленной на число единицъ сопротивленія, которыми должна обладать проволока, въ которой въ единицу времени выдѣляется единица количества тепла при единицѣ проходящаго тока.

Полагая $q = 1$, $i = 1$, $w = 1$ получимъ далѣе, что $C = \frac{1}{t}$ и наконецъ при $q = 1$, $w = 1$, $t = 1$, что $C = \frac{1}{i^2}$. Отсюда получаются еще два значенія числа C, которыя легко формулируются. Все это еще болѣе выясняетъ, что коеффиціентъ пропорціональности C въ физическихъ формулахъ зависитъ отъ выбора единицъ тѣхъ величинъ, которыя входятъ въ формулу. При безконечно разнообразныхъ возможныхъ единицахъ и коеффиціентъ C можетъ принимать всевозможныя численныя значенія.

Обратимся къ важному вопросу о томъ, что произойдетъ, если мы коеффиціенту пропорціональности придадимъ опредѣленное численное зна-

ченіе, произвольно нами выбранное. Въ этомъ случаѣ мы лишаемся возможности произвольно выбирать единицы всѣхъ величинъ, входящихъ въ нашу формулу; отъ насъ зависитъ въ этомъ случаѣ выборъ единицъ всѣхъ этихъ величинъ кромѣ одной, впрочемъ, опять-таки произвольно которой изъ нихъ. Единица этой величины оказывается уже однозначно опредѣленной; эта единица какъ бы является сама собою въ зависимости отъ выбранныхъ нами остальныхъ единицъ и коэффиціента пропорціональности.

Положимъ, что мы желаемъ, чтобы въ формулѣ (1) коэффиціентъ C былъ равенъ пяти, такъ что получается $q = 5i^2wt$. Выберемъ, напримѣръ произвольно единицы величинъ Q, I и T; при $q = 1$, $i = 1$ и $t = 1$ имѣемъ $w = \frac{1}{5}$. Отсюда слѣдуетъ, что выбравъ произвольно единицы количества теплоты, силы тока и времени, мы за единицу сопротивленія уже непремѣнно должны выбрать пятикратное отъ сопротивленія такой проволоки, въ которой при единицѣ силы тока въ единицу времени выдѣляется единица количества теплоты. Не трудно сообразить, какія пришлось бы принять единицы количества тепла или силы тока или времени, если каждый разъ единицы остальныхъ трехъ величинъ выбраны нами произвольно.

Весьма часто принимаютъ коэффиціентъ пропорціональности равнымъ единицѣ. Формула (1) въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ $q = i^2wt$. Если мы, напримѣръ, произвольно выбрали единицы количества тепла, сопротивленія и времени, то мы за единицу силы тока въ этомъ случаѣ должны принять силу того тока, который, проходя въ теченіе единицы времени по проволокѣ, сопротивленіе которой равно единицѣ, выдѣляетъ въ ней единицу количества тепла, ибо при $w = 1$, $t = 1$ и $q = 1$ наша формула даетъ $i = \pm 1$. Двойной знакъ, какъ увидимъ впослѣдствіе, показываетъ, что этотъ токъ можетъ имѣть произвольное направленіе.

Мы указали выше на часто встрѣчающееся утвержденіе, будто множитель пропорціональности можетъ иногда имѣть значеніе физической величины, измѣряющейся своею единицею, и упомянули, что это не вѣрно, что въ подобныхъ случаяхъ мы имѣемъ дѣло съ неполнымъ выраженіемъ закона, которое не исчерпываетъ всѣхъ сторонъ даннаго явленія. Приведемъ примѣръ. Положимъ, что мы изслѣдуемъ прохожденіе тепла черезъ пластинку, сдѣланную изъ какого-либо вещества въ томъ случаѣ, когда одна изъ ея сторонъ поддерживается при постоянной температурѣ T_1, а другая при другой, болѣе низкой температурѣ T_2. Пусть площадь каждой изъ сторонъ пластинки равна s квадратнымъ единицамъ, а толщина ея равна d единицамъ длины. Положимъ далѣе, что мы произвели рядъ опытовъ, измѣряя разность температуръ $T_1 - T_2$, площадь s, время t, количество тепла q и наконецъ толщину d различныхъ взятыхъ для опытовъ пластинокъ, сдѣланныхъ однако изъ одного и того же матеріала. Опыты покажутъ, что числа q пропорціональны числамъ s, числамъ t и числамъ $T_1 - T_2$ и обратно пропорціональны числамъ d. Обозначивъ коэффиціентъ пропорціональности черезъ k, имѣемъ формулу

$$q = kst\frac{T_1 - T_2}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Обыкновенно разсуждаютъ такъ: полагая въ этой формулѣ $s=1$, $t=1$, $T_1 - T_2 = 1$ (т. е. 1^0) и $d=1$, находимъ $q=k$; слѣдовательно k есть то количество тепла, которое въ единицу времени протекаетъ черезъ единицу площади, параллельной сторонамъ пластинки, если температура на протяженіи единицы длины уменьшается на одинъ градусъ. Это k зависитъ отъ вещества пластинки, представляетъ особую физическую величину, которая имѣетъ и свою единицу.

Такое разсужденіе неправильно. Приведенныя выше, найденныя изъ опытовъ зависимости не исчерпываютъ всѣхъ сторонъ явленія: количество q зависитъ не только отъ величины площади s, отъ времени t, отъ разности температуръ $T_1 - T_2$ и отъ толщины d, но также еще отъ новой введенной нами величины, которую назовемъ теплопроводностью и которая съ своей стороны зависитъ отъ матеріала пластинки. Опыты, конечно, не могутъ дать намъ зависимость q отъ k, ибо мы ввели эту новую величину и мы полагаемъ, что q пропорціонально k. Но этимъ не мѣняется сущность дѣла, заключающаяся въ томъ, что q зависитъ отъ пяти величинъ k, s, t, $T_1 - T_2$ и d. Здѣсь мы имѣемъ всего шесть существенно различныхъ физическихъ величинъ, изъ которыхъ каждая можетъ быть измѣрена своею, совершенно произвольною единицею. За единицы можно, напримѣръ, принять: малую калорію (q), квадратный дюймъ (s), сантиметръ (d), минуту (t), градусъ Цельсія ($T_1 - T_2$) и теплопроводность ртути (k). Въ этомъ случаѣ мы должны формулу (2) замѣнить формулою.

$$q = Ckst\frac{T_1 - T_2}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

въ которой C, дѣйствительный множитель пропорціональности, есть только число, не представляющее численнаго значенія какой-либо физической величины и зависящее только отъ выбора единицъ шести величинъ, входящихъ въ формулу. Принимая въ (3) $C=1$, мы уже лишаемся возможности произвольно выбирать всѣ эти единицы; мы можемъ выбрать единицы только пяти величинъ. Естественнѣе всего (но не необходимо) произвольно выбрать единицы величинъ q, s, t, $T_1 - T_2$ и d. Въ этомъ случаѣ при $q=1$, $s=1$, $t=1$, $T_1 - T_2 = 1$ и $d=1$ мы получаемъ $k=1$. Отсюда слѣдуетъ, что, принимая въ общей формулѣ (3) $C=1$, мы за единицу теплопроводности должны принять теплопроводность матеріала такой пластинки, черезъ единицу поверхности которой въ единицу времени проходитъ единица количества теплоты, если на единицу толщины температура падаетъ на одинъ градусъ. Если при тѣхъ же условіяхъ пройдутъ не одна, но q единицъ тепла, то и теплопроводность будетъ не единица, а нѣкоторое k, причемъ числа q и k окажутся равными. Равенство $q=k$ говоритъ теперь, что число q единицъ тепла равно числу k единицъ теплопроводности, и это получается только въ томъ частномъ случаѣ, когда мы въ общей формулѣ (3) произвольно положимъ $C=1$. Теперь ясно, что упомянутое выше обычное разсужденіе, приводящее къ опредѣленію: «k есть то количество тепла и т. д.» неправильно.

Опасная путаница въ понятіяхъ особенно возможна въ тѣхъ простѣй-

шихъ случаяхъ, когда мы имѣемъ дѣло всего только съ двумя физическими величинами, причемъ одна изъ нихъ пропорціональна другой. Обозначимъ величины (т.-е. ихъ численныя значенія, ибо только послѣднія могутъ быть обобщенно «обозначены» буквами) черезъ a и b. Допустимъ, что опыты или самыя опредѣленія этихъ величинъ показываютъ, что

$$a = Cb,$$

гдѣ C множитель пропорціональности, зависящій отъ выбора единицъ двухъ величинъ, входящихъ въ формулу. Полагая (что можно было бы и не сдѣлать) $C = 1$, получаемъ

$$a = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Такихъ формулъ очень много въ физикѣ и слѣдуетъ крайне остерегаться смѣшивать подобныя равенства съ тождествами. Мы имѣемъ дѣло съ двумя различными физическими величинами, однако связанными между собою закономъ пропорціональности. При нѣкоторомъ опредѣленномъ выборѣ единицъ, численныя значенія обѣихъ величинъ оказываются равными. Если въ подобныхъ случаяхъ говорить о равенствѣ величинъ, то легко можетъ возникнуть представленіе о ихъ внутреннемъ тождествѣ, вовсе не вытекающемъ изъ случайнаго равенства численныхъ значеній. Для избѣжанія недоразумѣнія, мы въ подобныхъ случаяхъ будемъ пользоваться глаголомъ «измѣряться». Итакъ слова: величина a измѣряется величиною b — обозначаютъ, что при произвольномъ выборѣ единицъ, численныя значенія двухъ существенно различныхъ физическихъ величинъ мѣняются другъ другу пропорціонально, при нѣкоторомъ же опредѣленномъ выборѣ этихъ единицъ, численныя значенія величинъ окажутся равными между собою. Сказанное непремѣнно слѣдуетъ относить и къ такимъ связямъ между двумя величинами, которыя не выводятся изъ опытовъ, но вытекаютъ изъ даннаго нами опредѣленія одной изъ этихъ величинъ.

Приведемъ примѣръ. Въ элементарной физикѣ вводится понятіе о теплоемкости тѣла. Не слѣдуетъ говорить, что теплоемкость равняется количеству тепла, потребнаго для нагрѣванія тѣла на одинъ градусъ. Количество тепла q и теплоемкость k тѣла суть различныя физическія величины, единицы которыхъ вообще могутъ быть выбраны совершенно произвольно (напримѣръ малая калорія и теплоемкость фунта ртути). Мы имѣемъ общую формулу $q = Ckt$, гдѣ t число градусовъ, на которое тѣло нагрѣлось. Только полагая $C = 1$ мы получаемъ при $t = 1^\circ$ равенство $q = k$, означающее, что теплоемкость тѣла измѣряется количествомъ тепла, нагрѣвающимъ его на 1°.

Въ предыдущемъ § мы на стр. 14 указывали на совершенно излишнее раздвоеніе нѣкоторыхъ физическихъ величинъ какъ бы на двѣ величины съ различными названіями и указали, какъ на примѣръ, на плотность и удѣльный вѣсъ. Теперь можемъ точнѣе выяснить, откуда произошло это ошибочное раздвоеніе понятій. Вѣсъ p, объемъ v и плотность δ суть три существенно различныя величины, единицы которыхъ могутъ быть выбраны

совершенно произвольно (напримѣръ: фунтъ, кубическій дециметръ и плотность ртути). Онѣ связаны формулою $p = C\delta v$. Полагая $C = 1$, имѣемъ $p = \delta v$ и въ этомъ случаѣ мы за единицу плотности уже обязаны принять плотность такого тѣла, единица объема котораго обладаетъ единицею вѣса. Тогда при $v = 1$ получается $p = \delta$, откуда не слѣдуетъ, что плотность вообще равна вѣсу единицы объема. Мы должны сказать, что «плотность измѣряется вѣсомъ единицы объема» (плотность, измѣряемая массою единицы объема, совсѣмъ другая величина).

Одна физическая величина «измѣряется» другою — означаетъ, что при нѣкоторомъ особомъ, но не необходимомъ выборѣ единицъ этихъ двухъ величинъ, ихъ численныя значенія дѣлаются равными.

Эмпирическія формулы. Отыскивая путемъ опыта или наблюденія закономѣрную связь между двумя величинами, мы получаемъ два ряда сопряженныхъ численныхъ значеній a и b обѣихъ величинъ. Весьма часто оказывается, что вслѣдствіе крайней сложности искомой связи мы не въ состояніи ее угадать, искомый истинный законъ остается намъ неизвѣстенъ. Въ такихъ случаяхъ можно выразить результаты наблюденій эмпирическою формулою, т.-е. подобрать такую алгебраическую зависимость $a = f(b)$, которая для всѣхъ измѣренныхъ значеній b дала бы измѣренное a съ достаточнымъ приближеніемъ. Равенство $a = f(b)$ и выражаетъ эмпирическій законъ, въ предѣлахъ наблюденій близкій къ истинному закону. Удача подбора относится, какъ къ общему виду функціи $f(b)$, такъ и къ численнымъ значеніямъ входящихъ въ нее коэффиціентовъ.

Если намъ удалось найти такую эмпирическую зависимость $a = f(b)$, которая «въ предѣлахъ опыта» достаточно хорошо выражаетъ зависимость между числами a и b, то мы можемъ воспользоватся ею, чтобы вычислить числа a', соотвѣтствующія такимъ числамъ b', которыя непосредственно не измѣрялись. Такое вычисленіе возможно въ случаѣ, когда эти числа b' находятся въ промежуткахъ между числами b, которыя были нами измѣрены; оно называется интерполированіемъ и даетъ надежные результаты особенно въ тѣхъ случаяхъ, когда измѣренныя числа b близки другъ къ другу. Съ другой стороны слѣдуетъ весьма осторожно пользоваться эмпирическими формулами для вычисленія чиселъ a, соотвѣтствующихъ числамъ b, лежащимъ внѣ предѣловъ наблюденій, гдѣ истинный, неизвѣстный законъ можетъ весьма существенно отличаться отъ закона эмпирическаго. Такое вычисленіе называется экстраполированіемъ; имъ слѣдуетъ пользоваться съ величайшею осторожностью.

§ 8. Величины, имѣющія и величины, не имѣющія геометрическаго отношенія. Величины, съ которыми мы будемъ встрѣчаться въ курсѣ физики, могутъ быть раздѣлены на двѣ группы, отличающіяся другъ отъ друга весьма важнымъ и характернымъ признакомъ, на который рѣдко обращаютъ должное вниманіе.

Къ первой группѣ относятся величины въ обыденномъ смыслѣ этого слова; для нихъ возможность значенія нуль непосредственно ясно; ихъ можно между собою складывать и ихъ геометрическое отношеніе есть от-

влеченное число, выражающее сколько разъ одна изъ величинъ заключается въ другой. Къ такимъ величинамъ относятся длина, поверхность, объемъ, скорость, сила, давленіе, электрическое сопротивленіе, электродвижущая сила, сила звука, сила свѣта, напряженіе магнитнаго поля и т. д.

Но существуетъ другая группа величинъ, которыя безъ оговорокъ или разъясненій даже нельзя считать за величины. Понятіе о нулѣ для нихъ несуществуетъ и можетъ быть введено лишь весьма условно. Нельзя говорить объ ихъ геометрическомъ отношеніи. Такія величину вводятся въ науку, прежде всего, для того, чтобъ служить характеристикою качественныхъ различій. Составляя непрерывный рядъ, онѣ даютъ возможность ввести понятіе о разности двухъ величинъ, какъ о нѣкоторомъ количествѣ.

Два примѣра разъяснятъ въ чемъ дѣло. Къ величинамъ второй группы относятся, напр., температура и высота тона, очевидно характеризующія нѣкоторыя качественныя различія. Отмѣчая нѣкоторыя опредѣленныя температуры или высоты опредѣленныхъ тоновъ, мы можемъ ввести понятіе о разностяхъ или интерваллахъ двухъ температуръ или высотъ тона, а это даетъ возможность составить шкалу температуръ и тоновъ и выбрать единицу разности температуръ (градусовъ) или высотъ тоновъ (октава или, напр., большой полутонъ). Эти разности суть величины перваго рода; онѣ могутъ быть измѣрены и геометрическое отношеніе двухъ разностей можетъ быть найдено. Но температуры и высоты тоновъ сами по себѣ измѣрены быть не могутъ, нуля для нихъ не существуетъ и нельзя говорить о геометрическомъ отношеніи двухъ температуръ или высотъ двухъ тоновъ. Этому не противорѣчитъ то условное понятіе объ абсолютной температурѣ, которое отчасти будетъ введено ниже, отчасти будетъ разсмотрѣно въ ч. III (см. шкала лорда Кельвина) или вполнѣ условное измѣреніе высоты тона числомъ колебаній. Мы впослѣдствіе познакомимся еще съ другими величинами второго рода (напр. электрическій потенціалъ). Строго говоря, къ нимъ относится и время.

§ 9. Состояніе матеріи. Въ § 1 мы назвали матеріей или веществомъ содержимое того мѣста пространства, въ которомъ мы объектируемъ причину воспринятаго нами ощущенія; матерію, наполняющую ограниченную часть пространства, мы назвали тѣломъ. Физика имѣетъ главнымъ образомъ дѣло съ матеріей и сравнительно рѣдко обращается къ изслѣдованію свойствъ тѣлъ, насколько эти свойства зависятъ отъ ихъ формы.

Матерія можетъ быть однородною и неоднородною. Въ первомъ случаѣ всѣ ея части обладаютъ абсолютно одинаковыми, во второмъ — неодинаковыми свойствами. Соотвѣтственно принято говорить объ однородныхъ и неоднородныхъ тѣлахъ. Неоднородность матеріи можетъ происходить отъ двухъ причинъ.

Во-первыхъ, различныя ея части могутъ быть таковыми, что ни при какихъ условіяхъ одна часть не можетъ пріобрѣсти всѣхъ свойствъ другой части (по крайней мѣрѣ, по воззрѣніямъ современной науки); въ этомъ случаѣ части матеріи отличаются по составу, ихъ различіе химическое.

Во-вторыхъ, различныя части матеріи, отличаясь по свойствамъ, мо-

гутъ однако при нѣкоторыхъ условіяхъ пріобрѣтать, каждая, всѣ свойства любой другой части; въ этомъ случаѣ неоднородность физическая и части матеріи отличаются по состоянію.

Свойства матеріи опредѣляются цѣлымъ рядомъ различныхъ физическихъ величинъ. Мы будетъ называть функціями точки такія величины, которыя въ различныхъ точкахъ пространства обладаютъ различными численными значеніями; сюда относятся физическія величины, характеризующія свойства матеріи въ различныхъ ея точкахъ. Всякая величина, которая, относясь къ опредѣленной точкѣ, обладаетъ еще и опредѣленнымъ направленіемъ, называется векторомъ (скорость, сила, электрическій токъ). Нѣкоторыя свойства векторовъ будутъ разсмотрѣны ниже.

Матерія называется изотропною, когда не только всѣ ея части обладаютъ одинаковыми свойствами, но и во всякой точкѣ ея свойства во всѣхъ направленіяхъ одинаковы, не зависятъ отъ направленія (напр. теплопроводность во всѣхъ направленіяхъ одинаковая). Матерія называется анизотропной, когда она въ данной точкѣ обладаетъ различными свойствами въ различныхъ направленіяхъ. Матерія анизотропная можетъ быть въ то же время однородною, а именно когда во всѣхъ точкахъ, а также въ параллельныхъ направленіяхъ ея свойства одинаковы. Для простоты иногда говорятъ объ изотропныхъ и анизотропныхъ тѣлахъ.

Изъ элементарной химіи извѣстно, что матерія бываетъ простая и сложная. Послѣдняя состоитъ изъ такъ называемаго химическаго соединенія нѣсколькихъ простыхъ матерій.

Матерія состоитъ изъ весьма малыхъ частей, называемыхъ частицами. Частица, вообще, наименьшая часть, которая еще способна обнаружить хотя бы существеннѣйшія свойства данной матеріи. Смотря по характеру этихъ свойствъ, иногда отличаютъ частицы физическія и химическія, причемъ физическимъ частицамъ приписываютъ болѣе сложный составъ, чѣмъ химическимъ; первыя могутъ содержать въ себѣ, каждая, большое число послѣднихъ.

Современная химія допускаетъ существованіе атомовъ, т.-е. такихъ мельчайшихъ частей матеріи, которыя ни при какихъ намъ извѣстныхъ явленіяхъ не раздѣляются далѣе на части. Ихъ слѣдуетъ поэтому назвать недѣлящимися. Этотъ терминъ слѣдуетъ предпочесть общеупотребительному «недѣлимые», съ которымъ по недоразумѣнію связано неправильное представленіе, какъ о чемъ-то, даже мысленно, вслѣдствіе своей малости, недѣлимомъ. Простѣйшая химическая частица состоитъ изъ атомовъ и притомъ частица вещества простаго изъ одного или нѣсколькихъ одинакихъ, частица вещества сложнаго изъ двухъ или бо́льшаго числа, по крайней мѣрѣ отчасти различныхъ атомовъ.

Говоря о тѣлахъ неоднородныхъ, мы упомянули о томъ, что одна и та же по составу матерія можетъ находиться въ различныхъ физическихъ состояніяхъ. Терминъ «состояніе матеріи» употребляется двояко. Въ тѣсномъ смыслѣ слова отличаютъ три состоянія матеріи: твердое, жидкое и газообразное. Объ нихъ мы скажемъ ниже.

Въ обширномъ смыслѣ слова всякая матерія можетъ имѣть безко-

нечное множество состояній, если мы «состояніе» условимся характеризовать совокупностью всѣхъ свойствъ матеріи, такъ что измѣненіе хотя бы только одного свойства будетъ соотвѣтствовать измѣненію состоянія. Всѣ величины, которыя характеризуютъ свойства матеріи, мѣняющіяся такимъ образомъ вмѣстѣ съ ея состояніемъ, называются функціями состоянія; такихъ свойствъ очень много. Оказывается, что состояніе матеріи (даннаго рода или состава) вообще опредѣляется двумя функціями состоянія, которыя, однако, должны быть выбраны такимъ образомъ, чтобы одна изъ нихъ не опредѣлялась другою на основаніи какихъ-либо спеціальныхъ свойствъ разсматриваемой матеріи; онѣ должны быть независимы другъ отъ друга.

Къ наиболѣе важнымъ функціямъ состоянія принадлежатъ: температура, плотность (или вмѣсто нея удѣльный объемъ) и давленіе или упругость. Разсмотримъ вкратцѣ эти величины.

I. Температура. Органъ осязанія, подвергаясь при соприкосновеніи нашего тѣла съ матеріей, особаго рода раздраженію, даетъ намъ знать о такъ называемъ тепловомъ состояніи матеріи, о степени его нагрѣтости. Понятія о холодномъ, тепломъ, горячемъ столь же мало поддаются опредѣленію, какъ и другія субъективныя ощущенія (краска, высота звука и др.); какъ общедоступныя, они понятны всѣмъ. Величина, характеризующая степень нагрѣтости вещества, называется температурою; увеличенію нагрѣтости соотвѣтствуетъ увеличеніе или повышеніе температуры; уменьшенію — пониженіе температуры. Причину большей или меньшей степени нагрѣтости тѣлъ называютъ теплотою.

На стр. 24 было указано на температуру, какъ на примѣръ величины «второго рода», которая сама по себѣ измѣрена быть не можетъ. Отмѣчая нѣкоторыя температуры, мы получаемъ возможность построить шкалу температуръ и ввести разности температуръ какъ величины «перваго рода».

Субъективному ощущенію измѣненія температуры должно соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное измѣненіе, происходящее въ самомъ тѣлѣ, температура котораго мѣняется. Это измѣненіе заключается въ слѣдующемъ. Частицы тѣлъ никогда не находятся въ покоѣ, онѣ постоянно движутся. Быстрота движеній частицъ можетъ, однако, мѣняться и вотъ это-то измѣненіе и представляетъ собою сущность того, что въ нашемъ органѣ осязанія вызываетъ представленіе объ измѣненіи тепловаго состоянія матеріи. Чѣмъ быстрѣе частицы движутся, тѣмъ выше температура данной матеріи.

Для огромнаго большинства матерій мы замѣчаемъ, что съ повышеніемъ температуры увеличивается объемъ, занимаемый опредѣленнымъ ея количествомъ, и вотъ этимъ-то пользуются для опредѣленія единицы разности температуры, называемой градусомъ, и для составленія температурной шкалы. Напомнимъ, какимъ образомъ такая шкала можетъ быть получена, основываясь на наблюденіи измѣненія объема водорода, находящагося при постоянномъ внѣшнемъ давленіи. Въ т. III, гл. 2 мы познакомимся съ другимъ способомъ построенія температурной шкалы, основаннымъ на наблюденіи измѣненія давленія водорода, сохраняющаго по-

стоянный объемъ. Опыты указали на существованіе, между прочими, двухъ вполнѣ опредѣленныхъ температуръ: температуры таянія льда и температуры кипѣнія воды, на поверхность которыхъ производится (воздухомъ или инымъ газомъ) давленіе, составляющее 10,336 килогр. на каждый квадратный сантиметръ или 10336 килогр. на каждый квадратный метръ, каковое давленіе равно давленію слоя ртути (при 0^0) толщиною въ 760 мм.

Возьмемъ нѣкоторое опредѣленное количество водорода, напр., 1 килогр., и помѣстимъ его въ сосудъ, окруженный тающимъ льдомъ, вслѣдствіе чего онъ приметъ температуру этого льда. Обозначимъ его объемъ при этомъ черезъ v, гдѣ v число хотя бы кубическихъ метровъ, занимаемыхъ водородомъ. Если затѣмъ то же количество водорода окружить парами кипящей воды, то онъ займетъ бо̀льшій объемъ V. Полное увеличеніе объема $V - v$ раздѣлимъ на 100 равныхъ частей и условимся называть однимъ градусомъ (1^0) ту разность температуръ, которой соотвѣтствуетъ увеличеніе объема водорода на величину $\frac{V-v}{100}$. Температуру таянія льда можно принять за начало шкалы температуръ; съ нею сравниваются всѣ другія температуры. Условно это выражается тѣмъ, что температуру таянія льда принимаютъ равною нулю (0^0); ей соотвѣтствуетъ объемъ v; ясно, что температура кипѣнія воды, при которой взятое нами количество водорода имѣетъ объемъ V, при такомъ счетѣ температуръ будетъ равна 100^0. Температуру, при которой этотъ объемъ равенъ

$$v + n\frac{V-v}{100}$$

принимаютъ равною n^0. Понятно, что 100^0 и n^0 не суть, строго говоря, температуры тѣлъ, но лишь разности температуръ тѣлъ и температуры тающаго льда.

Весь промежутокъ между температурами таянія льда и кипѣнія воды оказывается у насъ раздѣленнымъ на 100 частей или градусовъ, причемъ каждый градусъ повышенія температуры вызываетъ одинаковое увеличеніе $\frac{V-v}{100}$ объема водорода. Отношеніе этого увеличенія къ объему v водорода при 0^0 называется коэффиціентомъ расширенія водорода; обозначимъ его черезъ α; въ такомъ случаѣ

$$\alpha = \frac{V-v}{100v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Изъ опытовъ оказалось, что

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}00366 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Величина α представляется отвлеченнымъ числомъ; но, какъ это было показано на стр. 13—14, не трудно убѣдиться, что α есть численное значеніе нѣкоторой особой физической величины, которую можно назвать тепловою расширяемостью водорода. Еслибы мы измѣнили единицу температуры (градусъ), раздѣливъ, напр., объемъ $V - v$ водорода не на 100 (шкала Цель-

зія), а на 80 (Реомюръ) или на 180 (Фаренгейтъ) частей, то измѣнилась бы и единица тепловой расширяемости, а вмѣстѣ съ нею и численное ея значеніе α.

Изъ самаго опредѣленія коэффиціента расширенія α слѣдуетъ, что это (для водорода) величина постоянная, независящая отъ температуры и что если теперь обозначить черезъ v_0 объемъ даннаго количества водорода при 0^0, черезъ v_T и v_t объемы при температурахъ T и t, то для α можно написать

$$\alpha = \frac{1}{v_0} \frac{v_T - v_t}{T - t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

ибо измѣненія температуры мы положили пропорціональными измѣненіямъ объема водорода, такъ что $(T-t):(v_T-v_t)=100:(v_{100}-v_0)$. Въ формулѣ (5) $V=v_{100}$ и $v=v_0$. Изъ (7) получается, какъ частный случай

$$\alpha = \frac{v_t - v_0}{v_0 t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

если положить $t=0$ и вмѣсто T написать t. Наконецъ (8) даетъ

$$v_t = v_0(1+\alpha t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Для другой температуры T имѣемъ $v_T=v_0\ (1+\alpha T)$, откуда

$$v_T = \frac{v_t(1+\alpha T)}{1+\alpha t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Двучленъ $1+\alpha t$ называется биномомъ расширенія.

Приборъ, который даетъ намъ возможность по объему даннаго количества водорода судить о температурѣ, называется водороднымъ термометромъ. Его устройство будетъ описано въ ч. III.

Возьмемъ вмѣсто водорода опредѣленное количество произвольнаго другого вещества и сдѣлаемъ рядъ измѣреній его объемовъ v_t и соотвѣтствующихъ имъ температуръ t, которыя измѣряемъ помощью водороднаго термометра. Получаются два ряда чиселъ v_t и t. Если при этомъ окажется, что равнымъ повышеніямъ температуры соотвѣтствуютъ и равныя измѣненія объема, то величина α, вычисленная по одной изъ формулъ (7) или (8), окажется нѣкоторымъ постояннымъ числомъ, которое мы назовемъ коэффиціентомъ расширенія изслѣдуемаго вещества. Остаются также справедливыми формулы (9) и (10).

Если же однако окажется, что числа, найденныя для объема и температуры вещества, не даютъ постояннаго числа α, вычисленнаго по формулѣ (7), то понятіе о коэффиціентѣ расширенія вещества, соотвѣтствующее введенному нами понятію о такой же величинѣ для водорода (величинѣ постоянной по самому ея опредѣленію) теряетъ смыслъ. Въ этомъ случаѣ мы, однако, можемъ ввести понятіе о коэффиціентѣ расширенія, какъ величинѣ перемѣнной, зависящей отъ температуры. Формула (7) даетъ намъ сперва

такъ называемый средній коэффиціентъ расширенія α_m между температурами T и t, такъ что

$$\alpha_m = \frac{1}{v_0} \frac{v_T - v_t}{T - t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Эта величина зависитъ отъ двухъ температуръ T и t.

Формула (8) дастъ намъ средній коэффиціентъ расширенія между температурами 0^0 и t^0, каковая величина войдетъ и въ формулу (9)

$$v_t = v_0(1 + \alpha_m t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

гдѣ α_m зависитъ отъ t. Вмѣсто (10) получаемъ теперь

$$v_T = \frac{v_t(1 + \alpha'_m T)}{1 + \alpha_m t}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

гдѣ α_m средній коефф. расширенія между 0^0 и t^0, а α'_m -средній коефф. расширенія между 0^0 и T^0.

Положимъ, что вещество имѣетъ при t^0 объемъ v; увеличимъ температуру на малую величину Δt [1]), что вызоветъ увеличеніе объема на малую величину Δv.

По формулѣ (11) находимъ величину

$$\alpha_m = \frac{1}{v_0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

т.-е. средній коефф. расширенія для малаго температурнаго промежутка Δt между температурами t и $t + \Delta t$. Если уменьшать безпредѣльно величину Δt, то вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ безпредѣльно уменьшаться и величина Δv; средній коэффиціентъ α_m при этомъ будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу α, зависящему отъ той температуры t, къ которой мы прибавили малую величину Δt. Итакъ

$$\alpha = \frac{1}{v_0} \text{пред.} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Величина α называется коэффиціентомъ расширенія вещества при температурѣ t^0; она представляется функціею температуры t, опредѣленной водороднымъ термометромъ.

Иногда разсматриваютъ измѣненіе линейныхъ размѣровъ матеріи (твердой) въ зависимости отъ измѣненій температуры. Обозначимъ черезъ l_0, l_T и l_t длину какой-нибудь прямой линіи, соединяющей двѣ точки взятаго количества матеріи при температурахъ 0^0, T^0 и t^0, измѣряемыхъ, какъ

[1]) Малое приращеніе какой либо величины x вообще принято обозначать символомъ Δx.

и прежде, водороднымъ термометромъ; если изъ этой матеріи приготовленъ стержень, то l_0, l_T и l_t могутъ обозначить длину стержня. Величина

$$\beta_m = \frac{1}{l_0} \frac{l_T - l_t}{T - t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

называется среднимъ коеффиціентомъ линейнаго расширенія между температурами T и t. Мы имѣемъ далѣе, соотвѣтственно (12)

$$l_t = l_0(1 + \beta_m t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

гдѣ β_m среднiй коефф. линейнаго расширенія между 0^0 и t^0. Наконецъ

$$\beta = \frac{1}{l_0} \text{пред.} \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

даетъ намъ коеффиціентъ линейнаго расширенія при температурѣ t^0.

Температуры ниже 0^0 считаются отрицательными. Если за температуру нуль принять не температуру таянія льда, но другую, лежащую по шкалѣ Цельзія ниже на 273^0, то температура называется абсолютною. Обозначимъ ее черезъ T; изъ опредѣленія слѣдуетъ, что

$$T = 273 + t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

гдѣ t температура по обыкновенной шкалѣ Цельзія.

2. Плотность и удѣльный объемъ. Въ физикѣ обозначаютъ терминомъ «плотность» двѣ совершенно различныя величины; съ одной изъ нихъ мы познакомимся въ отдѣлѣ второмъ. Понятіе о другой величинѣ возникаетъ на основаніи наблюденнаго факта, что вѣсъ p матеріи, взятой въ данномъ объемѣ v зависитъ отъ рода этой матеріи. Отсюда возникаетъ понятіе о нѣкоторой величинѣ δ, характерной для каждаго рода матеріи; называя ее плотностью, мы предполагаемъ, что она для различныхъ матерій пропорціональна вѣсу p равныхъ объемовъ v этихъ матерій, опредѣляемому въ одномъ и томъ же мѣстѣ на земной поверхности и обратно пропорціональна объемамъ v различныхъ матерій, имѣющихъ равные вѣса p. Отсюда получается

$$\delta = C \frac{p}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Приравнивая коеффиціентъ C единицѣ (см. стр. 20) мы получаемъ

$$\delta = \frac{p}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Эта формула показываетъ, что при $p = 1$ и $v = 1$ плотность $\delta = 1$; отсюда слѣдуетъ, что за единицу плотности слѣдуетъ принять плотность такого вещества, единица объема котораго обладаетъ единицею вѣса. Если граммъ и кубическій сантиметръ принять за единицы вѣса и объема, то единица плотности будетъ приблизительно (см. стр. 15 внизу) плот-

ность воды при 4° Ц. Сохраняя формулу (20), мы можемъ плотность воды принять за единицу и въ то же время совершенно произвольно выбрать единицы объема и вѣса.

Формула (21) даетъ при $v=1$ равенство $\delta=p$. Это показываетъ, что при особомъ выборѣ единицъ плотность матеріи измѣряется вѣсомъ единицы ея объема (какъ для краткости принято выражаться).

Обозначивъ теперь черезъ p_1 вѣсъ объема v воды, плотность которой принимаемъ за единицу, мы получаемъ согласно (20).

$$1=C\frac{p_1}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Раздѣливъ (20) на (22), получаемъ

$$\delta=\frac{p}{p_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Численное значеніе плотности нѣкоторой матеріи получается раздѣляя вѣсъ произвольнаго объема этой матеріи на вѣсъ такого же объема воды.

Мы на стр. 14 указали на то, что нѣтъ никакой причины вводить понятія о двухъ якобы различныхъ величинахъ, называемыхъ плотностью и удѣльнымъ вѣсомъ.

Обозначая число $\frac{1}{C}$ черезъ c, мы получаемъ вмѣсто (20) и (21) выраженія для численнаго значенія p вѣса однороднаго тѣла

$$p=c\delta v \quad \text{или} \quad p=\delta v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Здѣсь c есть численное значеніе вѣса единицы объема матеріи, плотность которой принята за единицу; вторая формула относится къ случаю, когда единица объема такой матеріи обладаетъ единицею вѣса.

Для случая неоднородной матеріи первоначальное опредѣленіе плотности, выраженное формулами (20) и (21), перестаетъ имѣть смыслъ. Мы можемъ, однако, перейти отъ понятія о плотности, какъ величинѣ постоянной для данной матеріи, къ понятію о плотности, какъ величинѣ непрерывно мѣняющейся. Мы имѣемъ формулы,

$$\delta_m=C\frac{p}{v} \quad \text{или} \quad \delta_m=\frac{p}{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

которыя даютъ среднюю плотность объема v и формулы

$$\delta=C\ \text{пред.}\frac{\Delta p}{\Delta v} \quad \text{или} \quad \delta=\text{пред.}\frac{\Delta p}{\Delta v} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

для «плотности въ данной точкѣ» (около которой былъ взять весьма малый объемъ Δv), какъ предѣлъ средней плотности безпредѣльно убывающаго объема Δv.

Удѣльнымъ объемомъ однородной матеріи называется объемъ, занимаемый единицею вѣса этой матеріи. Обозначимъ эту величину черезъ V. Вторая изъ формулъ (24) даетъ

$$\delta V = 1 \text{ и } V = \frac{1}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

При опредѣленномъ выборѣ единицъ, численное значеніе удѣльнаго объема равно обратному численному значенію плотности.

Съ измѣненіемъ температуры мѣняются удѣльный объемъ согласно формулѣ

$$V_t = V_0(1 + \alpha t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

гдѣ α средній коэффиціентъ расширенія между температурами 0° и t°. Формулы (27) и (28) даютъ

$$\frac{1}{\delta_t} = \frac{1}{\delta_0}(1 + \alpha t)$$

или

$$\delta_t = \frac{\delta_0}{1 + \alpha t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

гдѣ δ_t и δ_0 плотности при t° и при 0°.

Въ таблицахъ численныхъ значеній различныхъ физическихъ величинъ обыкновенно помѣщаютъ плотность при 0°, причемъ плотность воды при 4° Ц. принята за единицу; мы будемъ ее называть табличною плотностью.

Замѣтимъ, что для ртути

$$\delta_0 = 13,6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

(точнѣе 13,596).

3. Давленіе и упругость. Тѣла въ природѣ, какъ показываетъ наблюденіе, всегда подвержены давленію на ихъ поверхность, исходящему отъ другихъ, окружающихъ его тѣлъ. Это давленіе p мы будемъ выражать въ килограммахъ на квадратный метръ поверхности, т.-е. за единицу внѣшняго давленія мы принимаемъ давленіе въ одинъ килограммъ на каждый квадр. метръ поверхности. Другая единица давленія называется для краткости атмосферою; она равна давленію слоя ртути толщиною въ 760 мм., находящагося при 0°. Обозначимъ эту единицу давленія черезъ A. Такъ какъ слой воды, толщиною въ 1 мм. производитъ на квадратный метръ поверхности давленіе, равное одному килограмму, то ясно, что $A = 760 \times \delta_0$, гдѣ δ_0 плотность ртути; (30) даетъ

$$A = 760 \times 13,6 = 10336 \text{ килогр. на кв. метръ} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Подъ вліяніемъ внѣшняго давленія уменьшается объемъ тѣла, но вмѣстѣ съ тѣмъ увеличивается и противодавленіе сжатаго тѣла на непосредственно окружающія его тѣла; это контръ-давленіе мы будемъ называть

упругостью; за единицу упругости тѣла мы принимаемъ ту, при которой тѣло производитъ на кв. метръ поверхности окружающихъ его тѣлъ давленіе въ одинъ килогр. Измѣненіе объема тѣла тогда только прекращается, когда его упругость равна внѣшнему давленію. Разсматривая тѣло при условіяхъ, когда его объемъ не мѣняется подъ вліяніемъ внѣшнихъ давленій, мы для упругости и для внѣшняго давленія всегда будемъ имѣть одинаковыя численныя значенія. Вслѣдствіе этого можно, при указанныхъ условіяхъ, даже безразлично пользоваться терминами «давленіе» и «упругость», хотя эти двѣ величины по существу совершенно различны. Впрочемъ легко понять, что давленіе, подъ которымъ находится тѣло, есть не что иное, какъ упругость того или тѣхъ тѣлъ, которыя окружаютъ первое тѣло со всѣхъ сторонъ.

На стр. 26 мы указали на температуру, плотность (или удѣльный объемъ) и давленіе или упругость какъ на важнѣйшія функціи состоянія и упомянули, что при всякомъ измѣненіи какого-либо изъ свойствъ тѣла, характеризованнаго какою-либо изъ этихъ функцій, мы будемъ говорить объ измѣненіи состоянія тѣла. Отсюда слѣдуетъ, что, напр., всякое измѣненіе температуры или плотности или давленія соотвѣтствуетъ измѣненію «состоянія» тѣла, понимая этотъ терминъ въ наиболѣе обширномъ смыслѣ слова.

Въ тѣсномъ смыслѣ слова, какъ было сказано на стр. 25, различаютъ три состоянія матеріи: твердое, жидкое и газообразное. Они, однако, не отличаются рѣзко другъ отъ друга; иногда матерія находится въ состояніяхъ, которыя можно назвать промежуточными. Особый интересъ представляетъ, какъ мы увидимъ въ отдѣлѣ четвертомъ, матерія въ такъ наз. коллоидальномъ состояніи, промежуточномъ между состояніями твердымъ и жидкимъ.

Укажемъ на нѣкоторые особо характерные признаки трехъ состояній матеріи.

1. Состояніе твердое. Матерія въ твердомъ состояніи, взятая въ опредѣленномъ количествѣ, такъ наз. твердое тѣло, обладаетъ опредѣленною формою, которая, вообще говоря, сохраняется неопредѣленно долго. Эта форма можетъ измѣниться подъ вліяніемъ внѣшнихъ давленій, по исчезновеніи которыхъ форма болѣе или менѣе возстановляется. Температура и внѣшнія давленія весьма мало мѣняютъ объемъ твердаго тѣла. Частицы его, хотя и находятся въ движеніи, однако каждая изъ нихъ при этомъ, вообще, весьма мало удаляется отъ нѣкотораго средняго положенія. Раздѣленіе твердаго тѣла на части возможно только при сравнительно большихъ давленіяхъ, производимыхъ на ту или другую часть его поверхности.

2. Состояніе жидкое. Матерія въ жидкомъ состояніи или такъ наз. жидкое тѣло не обладаетъ опредѣленною формою, которая вообще весьма легко мѣняется; столь же легко происходитъ раздѣленіе жидкаго тѣла на части. Объемъ жидкости весьма мало уменьшается, когда она на всей поверхности подвергается давленію, по исчезновеніи котораго прежній объемъ вполнѣ возстановляется. Частицы жидкости, двигаясь, каждая около нѣкотораго средняго положенія, мало-по-малу переходятъ съ одного мѣста къ другому, такъ что взаимное расположеніе ихъ непрерывно мѣняется.

Жидкости слѣдуютъ основному закону Паскаля: давленіе на поверх-

ность жидкости, произведенное внѣшними для жидкости силами, передается ею равномѣрно во всѣ стороны, т.-е. если на единицу поверхности жидкости производится давленіе, то такое же давленіе передается ею на каждую единицу поверхности непосредственно окружающихъ ее тѣлъ. Если принять во вниманіе собственный вѣсъ жидкости, то изъ закона Паскаля вытекаетъ, какъ слѣдствіе, законъ Архимеда: тѣло, погруженное въ жидкость претерпѣваетъ со стороны послѣдней давленіе снизу вверхъ, которое вызываетъ кажущуюся потерю вѣса, равную вѣсу вытѣсненной имъ жидкости.

Всѣ жидкости сами собою и при всѣхъ условіяхъ непрерывно переходятъ въ газообразное состояніе, каковое явленіе называется испареніемъ.

3. Состояніе газообразное. Вещество въ газообразномъ состояніи или, проще, газъ состоитъ изъ частицъ, двигающихся, каждая, прямолинейно и мѣняющихъ направленіе движенія только въ случаѣ столкновенія между собою или съ поверхностью тѣла, ограничивающаго газъ (напр. стѣнки сосуда, въ которомъ газъ помѣщенъ). Вслѣдствіе этого газъ немедленно заполняетъ всякую, расположенную рядомъ съ нимъ пустоту; онъ, какъ говорятъ, стремится расшириться, т.-е. занять по возможности большій объемъ.

Совокупность ударовъ частицъ газа, налетающихъ на поверхность сосѣдняго съ газомъ тѣла, складывается въ давленіе, претерпѣваемое этимъ тѣломъ со стороны газа. Это давленіе, называемое упругостью газа, измѣряется, какъ мы видѣли, или килограммами на кв. метръ поверхности, или атмосферами. Для неизмѣнности объема газа необходимо, чтобъ его упругость равнялась внѣшнему, производимому на газъ давленію. Объемъ газа увеличивается или уменьшается, если его упругость больше или меньше внѣшняго давленія.

Законы Паскаля и Архимеда остаются вѣрными и для газовъ.

Газы приблизительно слѣдуютъ законамъ Бойля (Маріотта) и Гей-Люссака.

Законъ Гей-Люссака гласитъ, что коеффиціентъ расширенія α газовъ, нагрѣваемыхъ при неизѣмнномъ внѣшнемъ давленіи, есть величина постоянная и притомъ для всѣхъ газовъ одна и та же, а именно

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}00366 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Формула (12) стр. (29) принимаетъ видъ (пишемъ v вмѣсто v_t)

$$v = v_0 \left(1 + \frac{1}{273} t\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Законъ Бойля: объемъ даннаго количества газа обратно пропорціоналенъ внѣшнему давленію (или упругость даннаго количества газа обратно пропорціональна его объему), если температура газа остается неизмѣнною.

Эти два закона показываютъ, что объемъ газа можетъ подвергаться весьма значительнымъ измѣненіямъ, когда мѣняется температура или, въ особенности, внѣшнее давленіе.

Плотность газа. Слѣдуетъ весьма твердо помнить, что для измѣренія плотности газовъ употребляются двѣ различныя единицы.

a. За единицу плотности принимается плотность воды. Численное значеніе плотности даннаго газа, измѣренной этой единицей, есть величина, мѣняющаяся въ широчайшихъ предѣлахъ въ зависимости отъ температуры газа и того давленія, подъ которымъ онъ находится. Плотность газа, измѣренную этой единицей, мы будемъ иногда называть первою плотностью газа.

b. Опредѣляя плотность газа, весьма часто принимаютъ за единицу плотность воздуха, находящагося при той же температурѣ и подъ тѣмъ же давленіемъ, какъ и изслѣдуемый газъ. Эта плотность есть величина постоянная для даннаго газа по крайней мѣрѣ въ предѣлахъ примѣнимости законовъ Бойля и Гей-Люссака къ воздуху и къ разсматриваемому газу. Мы назовемъ ее второю плотностью газа.

Чтобы вполнѣ была понятна необходимость строго отличать эти двѣ плотности, мы замѣтимъ, что въ формулировкахъ различныхъ законовъ, относящихся къ газамъ, принято упоминать просто «плотность газа«, хотя въ однихъ законахъ говорится о первой, въ другихъ о второй плотности. Вотъ два примѣра:

1. Законъ Бойля видоизмѣненный: плотность даннаго количества газа при постоянной температурѣ прямо пропорціональна внѣшнему давленію. Здѣсь говорится о первой плотности.

2. Скорость газовыхъ частицъ при данной температурѣ обратно пропорціональна квадратному корню изъ плотности газа. Здѣсь подразумѣвается вторая плотность; скорость газовыхъ частицъ не мѣняется, слѣд., при сгущеніи или разрѣженіи газа, какъ это можетъ показаться, если не отличать надлежащимъ образомъ двѣ различныя плотности газовъ.

Состояніе системы. Когда мы имѣемъ дѣло съ системою тѣлъ или отдѣльныхъ частицъ, то понятіе о состояніи можетъ быть еще болѣе обобщено. Мы условимся всякое измѣненіе взаимнаго расположенія частей системы также называть измѣненіемъ состоянія системы.

Замѣтимъ въ заключеніе, что переходъ тѣла или системы изъ одного даннаго состоянія въ другое можетъ быть совершенъ безконечно многими различными способами или, какъ говорятъ, путями. Такъ, напр., переходъ даннаго количество газа отъ состоянія, опредѣляемаго низкой температурой и малымъ объемомъ, къ состоянію, которое опредѣляется высокой температурой и большимъ объемомъ, можетъ быть сдѣланъ, нагрѣвая сперва газъ при неизмѣнномъ объемѣ и расширяя его потомъ при постоянной температурѣ или, наоборотъ, мѣняя сперва объемъ, а потомъ температуру или, наконецъ, мѣняя одновременно и объемъ, и температуру, что̀ можетъ быть сдѣлано на безконечное число манеровъ.

§ 10. Сохраненіе матеріи. Въ предыдущемъ параграфѣ мы познакомились съ измѣненіями состоянія матеріи.

Къ измѣненіямъ состоянія матеріи можно причислить и то, что̀ происходитъ при химическихъ реакціяхъ. Когда водородъ и кислородъ

соединяются, образуя воду, то въ послѣдней находятся и водородъ и кислородъ, но уже въ совершенно особаго рода состояніи раздробленія на атомы.

Ко всѣмъ возможнымъ измѣненіямъ состоянія, какъ физическимъ, такъ и химическимъ, относится слѣдующій основной принципъ:

Принципъ сохраненія матеріи: при всевозможныхъ физическихъ и химическихъ измѣненіяхъ, которымъ матерія подвергается при явленіяхъ, происходящихъ въ мірѣ, она не создается вновь и не исчезаетъ; полное ея количество остается неизмѣннымъ.

Въ § 4 главы II Отдѣла второго мы дадимъ дальнѣйшее разъясненіе этого принципа, указывая точнѣе къ какой величинѣ собственно относится та неизмѣнность, о которой здѣсь говорится.

§ 11. Нѣкоторые вопросы изъ математики. Полагая, что читатель, только что приступающій къ изученію этой книги, еще не успѣлъ ознакомиться съ высшею математикою, мы, по крайней мѣрѣ въ первыхъ отдѣлахъ, будемъ избѣгать ея примѣненія. Здѣсь будетъ, однако, мѣсто указать на нѣкоторые математическіе вопросы, которые не всегда входятъ въ курсъ среднихъ учебныхъ заведеній и къ которымъ намъ придется обращаться неоднократно.

I. Мѣра плоскаго и тѣлеснаго угловъ. Обыкновенно измѣряютъ плоскіе (а слѣд. и двугранные) углы градусами, минутами и секундами, причемъ прямой уголъ принимается равнымъ 90°. Мы вообще будемъ пользоваться инымъ способомъ измѣрять величину угловъ. Опишемъ около вершины угла, какъ около центра, окружность произвольнымъ радіусомъ r и обозначимъ черезъ s длину дуги окружности, заключенной между сторонами угла. Отношеніе $\frac{s}{r}$, какъ извѣстно, не зависитъ отъ величины радіуса r; такъ какъ въ то же время дуга s, при неизмѣнномъ r, пропорціональна углу, то ясно, что дробь $\frac{s}{r}$ пропорціональна величинѣ α угла. Отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ положить $\alpha = C\frac{s}{r}$, гдѣ C множитель пропорціональности. Положимъ $C = 1$, такъ что

$$\alpha = \frac{s}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

За численное значеніе угла мы принимаемъ отношеніе дуги s къ радіусу r. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы за единицу угла принимаемъ уголъ, для котораго дуга s равна радіусу r. Эта единица угла равна $57^{\circ}17'44'',8 = 57^{\circ},29578...$ Уголъ $\alpha = 3,5$ обозначаетъ, слѣд., уголъ, для котораго дуга s въ 3,5 раза больше радіуса r. Изъ (34) получается

$$s = r\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Уголъ, вполнѣ окружающій точку (четыре прямыхъ) равенъ $\alpha = 2\pi = 6,28319$, ибо $s = 2\pi r$; уголъ въ два прямыхъ равенъ $\alpha = \pi = 3,14159...$; прямой уголъ равенъ $\alpha = \frac{\pi}{2}$; половина прямаго (45°) равна $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

При показанномъ здѣсь способѣ опредѣленія численнаго значенія угловъ, мы, для весьма малыхъ угловъ, можемъ положить

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha = \alpha \\ \operatorname{tg}\alpha = \alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Это явствуетъ изъ самаго опредѣленія синуса и тангенса.

Тѣлесный уголъ (при вершинѣ произвольнаго конуса) измѣряется слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ поверхность шара, радіуса r, центръ котораго находился бы въ вершинѣ тѣлеснаго угла, который выдѣлитъ изъ поверхности шара нѣкоторую часть; обозначимъ ее черезъ s.

Отношеніе $\frac{s}{r^2}$ не зависитъ отъ радіуса r и такъ какъ s пропорціонально тѣлесному углу α, то мы можемъ положить $\alpha = C\frac{s}{r^2}$. Принимая $C = 1$, получаемъ

$$\alpha = \frac{s}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

т.-е. численное значеніе тѣлеснаго угла равно отношенію поверхности s къ квадрату радіуса. За единицу тѣлеснаго угла мы принимаемъ при этомъ такой уголъ, для котораго поверхность s содержитъ r^2 единицъ поверхности. Весь тѣлесный уголъ, окружающій со всѣхъ сторонъ данную точку въ пространствѣ равенъ 4π, такъ какъ для него $s = 4\pi r^2$; тѣлеснѣй уголъ, ограниченный плоскостью, проходящей черезъ его вершину, равенъ 2π, ибо для него s есть поверхность полушарія. Тѣлесный уголъ, образованный тремя взаимно перпендикулярными плоскостями равенъ $\frac{1}{8}4\pi = \frac{\pi}{2}$. Изъ (37) получаемъ

$$s = \alpha r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

II. **Вычисленіе нѣкоторыхъ величинъ вида пред.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Формулы (15) стр. 29, (18) стр. 30 и (26) стр. 31 указываютъ на необходимость умѣнья вычислять величины вида пред. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, гдѣ Δx весьма малое приращеніе нѣкоторой величины x, а Δy соотвѣтствующее приращеніе другой величины y, зависящей отъ x. Если y есть нѣкоторая функція отъ x, что символически пишется такъ

$$y = f(x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

то искомый предѣлъ представляется въ видѣ нѣкоторой новой функціи отъ x, которую обозначимъ черезъ y' или $f'(x)$, такъ что

$$y' = f'(x) = \text{пред.}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Эта новая функція называется **производною функціею отъ функціи** y или производною y-ка «по x».

Вычислимъ производныя для двухъ частныхъ случаевъ.

1. Положимъ, что

$$y = f(x) = Ax^n + Bx^m + Cx^p + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

гдѣ n, m, p и т. д. цѣлыя положительныя числа; A, B, C... произвольные численные коеффиціенты. Если къ величинѣ x прибавить Δx, то вмѣсто y получится измѣненная величина $y + \Delta y$, причемъ будемъ имѣть равенство

$$y + \Delta y = A(x + \Delta x)^n + B(x + \Delta x)^m + C(x + \Delta x)^p + \ldots$$

или

$$y + \Delta y = A\left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots\right) + B\left(x^m + mx^{m-1}\Delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots\right) + C\left(x^p + px^{p-1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + \ldots\right).$$

Вычитая отсюда (41), раздѣляя разность на Δx и выписывая сперва члены, не содержащіе Δx, получаемъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = Anx^{n-1} + Bmx^{m-1} + Cpx^{p-1} + \ldots + K\Delta x,$$

гдѣ K сумма членовъ, получающихся, если Δx взять, какъ общій множитель, за скобки. Въ предѣлѣ, при безконечномъ убываніи величины Δx, членъ $K\Delta x$ исчезаетъ и мы получаемъ такой результатъ: если $y = f(x)$ имѣетъ видъ (41), то производная функція опредѣляется формулою

$$y' = f'(x) = \text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = Anx^{n-1} + Bmx^{m-1} + Cpx^{p-1} + \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Такъ напр. $y = 4x^3 - 5x^2$ даетъ $y' = 12x^2 - 10x$.

2. Положимъ, что

$$y = A\sin px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

гдѣ A и p произвольныя числа. Мы имѣемъ

$$y + \Delta y = A\sin p(x + \Delta x) = A\sin px\cos p\Delta x + A\cos px\sin p\Delta x.$$

Вычитая отсюда (43), получаемъ

$$\Delta y = -A\sin px(1 - \cos p\Delta x) + A\cos px\sin p\Delta x.$$

Въ первомъ членѣ замѣняемъ $1 - \cos p\Delta x$ величиною $2\left(\sin\frac{p\Delta x}{2}\right)^2$, а затѣмъ, на основаніи формулъ (36) стр. 37. синусы весьма малыхъ угловъ самими углами; раздѣливъ все равенство на Δx, получаемъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}Ap^2(\Delta x)\sin px + Ap\cos px.$$

Въ предѣлѣ первый членъ исчезаетъ и мы получаемъ такой результатъ:

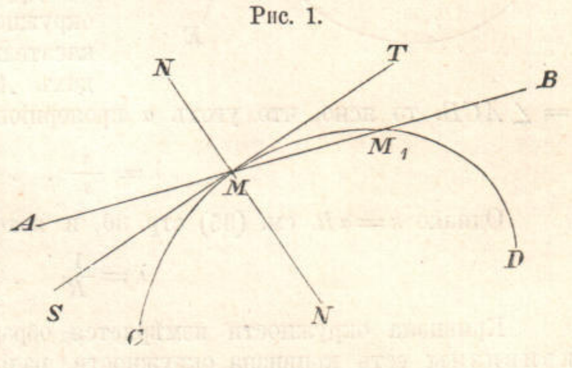
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Если} & y = A\sin px \\ \text{то} & y' = f'(x) = \text{пред.}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = Ap\cos px\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

3. Предоставляемъ читателю доказать аналогичную формулу:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Если} & y = A\cos px \\ \text{то} & y' = f'(x) = \text{пред.}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = -Ap\sin px\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

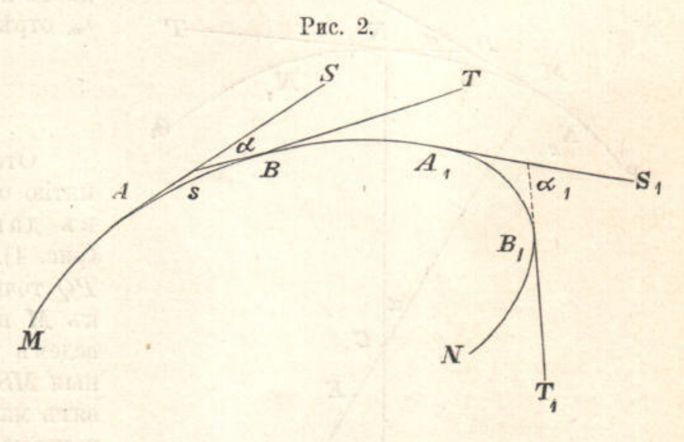
III. **Касательная и радіусъ кривизны.** Понятіе о касательной въ данной точкѣ M (рис. 1) кривой CD получается слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ на кривой другую точку M_1, близкую къ M и проведемъ черезъ M и M_1 прямую AB; такая прямая называется *сѣкущею* къ кривой CD. Вообразимъ, что точка M_1, не сходя съ кривой, начинаетъ безпредѣльно приближаться къ M и что въ то же время сѣкущая BA не перестаетъ проходить черезъ данную точку M и черезъ подвижную точку M_1. Понятно, что она будетъ вращаться около точки M. Съ приближеніемъ M_1 къ M, сѣкущая безпредѣльно будетъ приближаться къ положенію нѣкоторой прямой ST, которая и называется *касательною* въ точкѣ M. Прямая NN, перпендикулярная къ касательной, называется *нормалью* въ точкѣ M къ данной кривой.

Рис. 1.



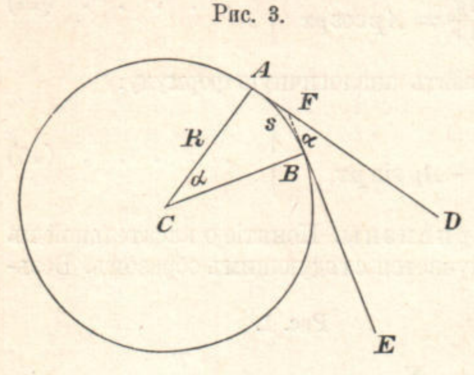
Направленіе кривой въ каждой ея точкѣ опредѣляется направленіемъ касательной. Разсматривая кривыя линіи, мы замѣчаемъ, что въ нѣкоторыхъ частяхъ направленіе кривой мѣняется весьма быстро, а въ другихъ частяхъ той же или другой кривой это направленіе мѣняется болѣе медленно; отсюда у насъ является представленіе о большей или мѣньшей кривизнѣ кривой. Не входя, пока, въ точное опредѣленіе этого понятія, мы скажемъ, что кривизна тѣмъ

Рис. 2.



больше, чѣмъ больше уголъ α (рис. 2) между касательными AS и BT, проведенными въ концахъ отрѣзка кривой, имѣющаго данную длину s. Принимая $A_1B_1 = AB = s$ и замѣчая что $\alpha_1 > \alpha$, мы скажемъ, что часть A_1B_1 обладаетъ бо̀льшею кривизною, чѣмъ часть AB.

Рис. 3.



Обратимся къ окружности, обладающей во всѣхъ частяхъ одинаковою кривизною. За мѣру λ этой кривизны примемъ уголъ между касательными, проведенными въ двухъ точкахъ, находящихся на единицѣ разстоянія другъ отъ друга. Пусть $AB = s$ (рис. 3) дуга окружности и $\alpha = \angle DFE$ уголъ между касательными, проведенными въ точкахъ A и B. Такъ какъ $\angle DFE = \angle ACB$, то ясно, что уголъ α пропорціоналенъ дугѣ s и мы имѣемъ

$$\lambda = \frac{\alpha}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

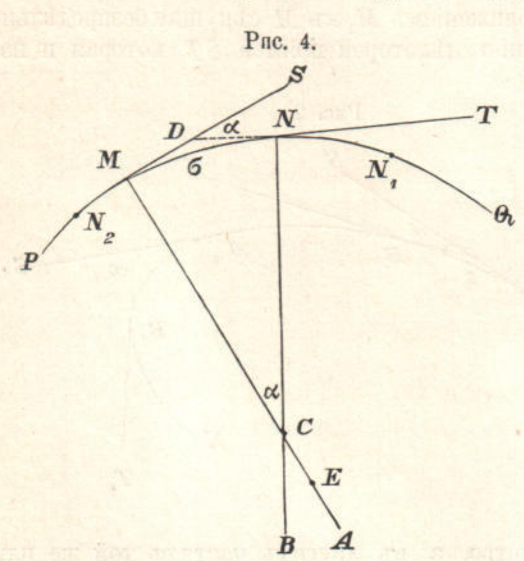
Однако $s = \alpha R$, см. (35) стр. 36, и потому

$$\lambda = \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Кривизна окружности измѣряется обратнымъ радіусомъ. **Единица кривизны** есть кривизна окружности, радіусъ которой равенъ единицѣ. Для произвольной кривой MN, (рис. 2) формула, подобная (46) дастъ намъ среднюю кривизну λ_m отрѣзка $AB = s$ кривой:

$$\lambda_m = \frac{\alpha}{s} \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Рис. 4.



Отсюда перейдемъ къ понятію **о кривизнѣ кривой въ данной точкѣ кривой** (рис. 4). Возьмемъ на кривой PQ точку N, весьма близкую къ M и пусть $MN = \sigma$; проведемъ въ M и N касательныя MS и NT, которыя составятъ малый уголъ $\angle SDT = \alpha$ и нормали MA и NB, которыя пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ C. Средняя кривизна малой дуги σ будетъ равна $\lambda_m = \frac{\alpha}{\sigma}$. Предѣлъ λ, къ которому стремится эта величина при безконечномъ приближеніи

точки N къ M и даетъ численное значеніе кривизны въ точкѣ M. Итакъ кривизна

$$\lambda = \text{пред.} \frac{\alpha}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Когда N станетъ приближаться къ M, то нормаль NB будетъ мѣнять свое положеніе и слѣдовательно точка C перемѣщаться вдоль нормали MA. Оказывается, что она при этомъ будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣльному положенію, которое обозначимъ черезъ E.

Проведемъ черезъ точку M окружность, центръ которой находился бы на нормали MA и кривизна которой равнялась бы кривизнѣ кривой въ точкѣ M. Изъ (47) и (49) слѣдуетъ, что радіусъ R этого круга долженъ удовлетворять равенству

$$\lambda = \text{пред.} \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Этотъ кругъ называется кругомъ кривизны, а его радіусъ радіусомъ кривизны данной кривой въ точкѣ M. Можно доказать: 1) что $R = ME$, т.-е. что центръ круга кривизны опредѣляется предѣльнымъ положеніемъ точки пересѣченія двухъ безконечно близкихъ нормалей къ кривой и 2) что кругъ кривизны есть предѣлъ круга, окружность котораго проходитъ черезъ точку M и двѣ точки N и N_1 или N и N_2, безпредѣльно приближающіяся къ M.

§ 12. Векторы. На стр. (25) мы назвали векторомъ величину, обладающую въ данной точкѣ не только опредѣленнымъ численнымъ значеніемъ, но и опредѣленнымъ направленіемъ.

Всякій векторъ можетъ быть изображенъ стрѣлкою. Начало стрѣлки берется въ той точкѣ, къ которой онъ относится; эту точку будемъ называть точкою приложенія вектора. Направленіе стрѣлки дѣлается равнымъ направленію вектора и, наконецъ, длина стрѣлки пропорціональной величинѣ вектора, т.-е. число линейныхъ единицъ, заключающихся въ длинѣ стрѣлки, дѣлается равнымъ или (особенно если приходится изображать нѣсколько векторовъ) пропорціональнымъ численному значенію вектора.

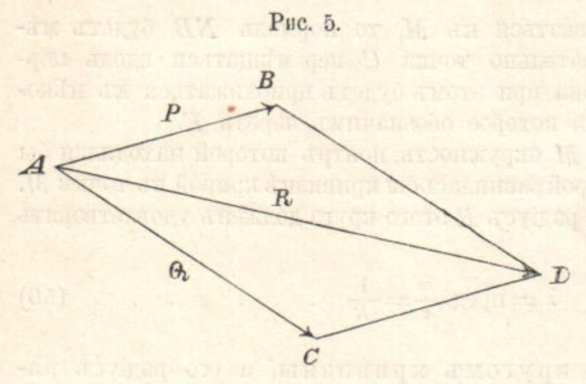
По двумъ даннымъ векторамъ, имѣющимъ общую точку приложенія, можно построить третій, изображаемый діагональю параллелограмма, построеннаго на данныхъ векторахъ, которые называются слагаемыми векторами. Такой переходъ отъ двухъ данныхъ векторовъ къ третьему называется геометрическимъ сложеніемъ для отличія отъ сложенія алгебраическаго, т.-е. обыкновеннаго суммированія. Третій векторъ называется геометрическою суммою данныхъ векторовъ $P = AB$ и $Q = AC$ (рис. 5); ихъ геометрическая сумма изображена стрѣлкою $R = AD$. Символически принято геометрическое суммированіе писать слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Черточки надъ буквами показываютъ, что складываніе происходитъ геометрическое.

Построеніе геометрической суммы можетъ быть произведено упрощенно: изъ конца B одного изъ двухъ векторовъ проведемъ линію BD, равную и параллельную другому вектору $Q = AC$; съ концомъ D этой линіи соединимъ точку A прямою, которая и представитъ искомую геометрическую сумму.

Рис. 5.



Если данъ одинъ векторъ R, то отъ него на безконечное множество манеровъ можно перейти къ двумъ такимъ векторамъ P и Q, что R представитъ геометрическую сумму векторовъ P и Q. Такой переходъ называется разложеніемъ вектора R на двѣ слагаемыя P и Q. Если P и Q составляютъ прямой уголъ, то

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \qquad \cos(R, P) = \frac{P}{R} \text{ и } \cos(R, Q) = \frac{Q}{R}.$$

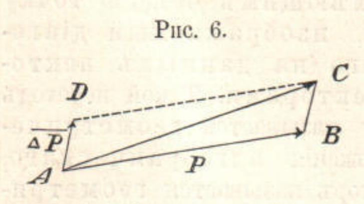
Геометрическая сумма равна алгебраической, когда два слагаемыхъ вектора имѣютъ одинаковое направленіе. Это же относится къ двумъ векторамъ, имѣющимъ противоположныя направленія, если таковымъ приписывались разные знаки; въ противномъ случаѣ геометрическая сумма дѣлается равною алгебраической разности. Если векторы P и Q считать за величины существенно положительныя, то имѣется такое очевидное неравенство

$$P - Q \leqslant \overline{P} + \overline{Q} \leqslant P + Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (52)$$

если $P \geqslant Q$.

Измѣненіе вектора можетъ быть геометрическое. Положимъ, что векторъ $P = AB$ (рис. 6) измѣняется по величинѣ и по направленію, такъ что измѣнившійся векторъ изобразится стрѣлкою AC. Построивъ параллелограммъ, мы видимъ, что измѣненіе можно себѣ представить происшедшимъ вслѣдствіе геометрическаго сложенія вектора P съ нѣкоторымъ векторомъ AD, который назовемъ геометрическимъ приращеніемъ вектора P и обозначимъ черезъ $\overline{\Delta P}$, для отличія отъ алгебраическаго приращенія ΔP.

Рис. 6.

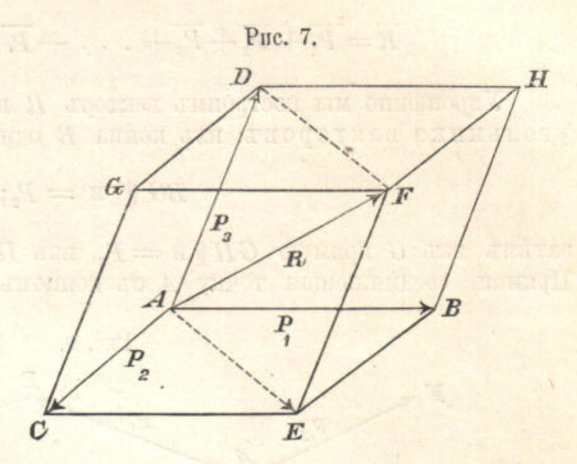


Геометрическая сумма R трехъ векторовъ P_1, P_2 и P_3, имѣющихъ общую точку приложенія A (рис. 7), получается, складывая сперва два вектора P_1 и P_2, геометрическая сумма которыхъ есть векторъ AE и затѣмъ векторы AE и P_3, сумма которыхъ $R = AF$. Изъ чертежа видно, что

$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3$ изображается діагональю параллелепипеда, построеннаго на трехъ данныхъ векторахъ.

Проще можно R найти, приводя изъ конца B любого изъ трехъ векторовъ прямую $BE \parallel$ и $= P_2$ и затѣмъ изъ E прямую $EF \parallel$ и $= P_3$. Прямая, соединяющая A съ F и есть искомый векторъ.

Рис. 7.



Наоборотъ, векторъ R можно на безконечное число манеровъ замѣнить тремя слагаемыми векторами, ребрами параллелепипеда, діагональ котораго R. Если слагаемые три вектора взаимно перпендикулярны, то параллелепипедъ прямоугольный. Возьмемъ точку приложенія векторовъ за начало координатныхъ осей x, y, z, имѣющихъ направленіе трехъ слагаемыхъ векторовъ, которые обозначимъ черезъ R_x, R_y, R_z (рис. 8), ихъ геометрическую сумму черезъ R. Въ этомъ случаѣ имѣемъ

Рис. 8.

$$\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_y + \overline{R}_z \quad . \; . \; (53)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \, . \; (53,a)$$

$$\cos(R,x) = \frac{R_x}{R};\ \cos(R,y) = \frac{R_y}{R};\ \cos(R,z) = \frac{R_z}{R} \; . \; (53,b)$$

R_x, R_y и R_z суть проекціи вектора R на направленія координатныхъ осей.

Пусть даны два вектора P и Q и слагаемыя ихъ вдоль координатныхъ осей P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y и Q_z. Изъ аналитической геометріи извѣстно, что $\cos(P,Q) = \cos(P,x)\cos(Q,x) + \cos(P,y)\cos(Q,y) + \cos(P,z)\cos(Q,z)$.

Вставляя съ справой стороны значенія косинусовъ по формулѣ (53,b), получаемъ

$$PQ\cos(P,Q) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

Если произвольное число векторовъ P_1, P_2, P_3.... P_i... имѣютъ общую

точку приложенія A (рис. 9), то ихъ геометрическая сумма R получится, если сперва геометрически сложить два вектора; полученную сумму сложить съ третьимъ и т. д. Символически напишемъ

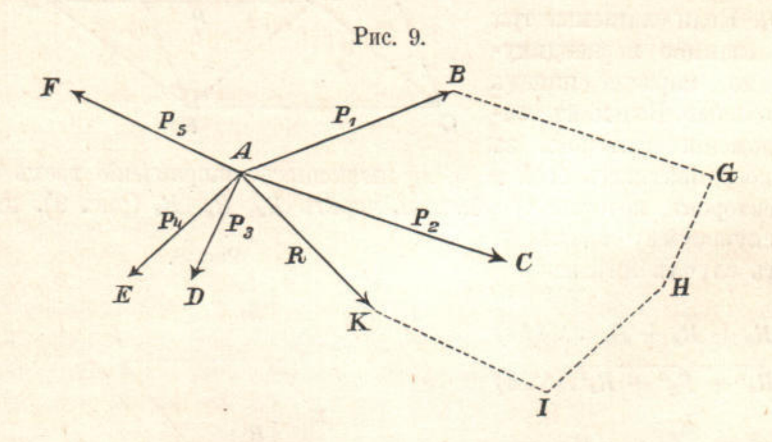
$$\overline{R}=\overline{P_1}+\overline{P_2}+\overline{P_3}+\ldots+\overline{P_i}+\ldots=\sum\overline{P_i}\quad.\;.\;.\;.\quad(55)$$

Упрощенно мы построимъ векторъ R при помощи такъ наз. многоугольника векторовъ: изъ конца B одного изъ векторовъ проводимъ

$$BG \parallel \text{ и } = P_2;$$

затѣмъ изъ G прямую $GH \parallel$ и $= P_3$, изъ H прямую $HI \parallel$ и $= P_3$ и т. д. Прямая, соединяющая точку A съ концомъ K ломанной линіи т.-е. такъ

Рис. 9.



назыв. замыкающая ломанной линіи и представитъ искомую геометрическую сумму R.

Если $P_{i,x}$ проекція вектора P_i по произвольному направленію x и R_x проекція вектора R на то же направленіе, то

$$R_x=\sum P_{i,x}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(56)$$

т.-е. R_x есть алгебраическая сумма векторовъ $P_{i,x}$. Отсюда (53,a) даетъ

$$R^2=\left(\sum P_{i,x}\right)^2+\left(\sum P_{i,y}\right)^2+\left(\sum P_{i,z}\right)^2.\quad.\;.\;.\;.\quad(57)$$

§ 13. Журнальная литература. Литература физики, на сколько она относится къ оригинальнымъ работамъ, не имѣющимъ характера дидактическаго, почти вся разбросана по весьма многочисленнымъ журналамъ, издаваемымъ большею частью учеными обществами и учрежденіями (университетами, академіями и др.).

Весьма подробныя литературныя указанія по отдѣльнымъ вопросамъ можно найти, между прочимъ, въ слѣдующихъ книгахъ:

Winkelmann. Handbuch der Physik. Breslau. 1891—1896.

Landolt. Physicalisch-chemische Tabellen. Berlin. 1894. На стр. 539 находится весьма полезный обзоръ журналовъ.

Verdet. Conférences de Physique.

Далѣе нѣкоторые учебники, посвященные отдѣламъ физики, изобилуютъ литературными указаніями, напр. G. Wiedemann, Electricitaet; Verdet, Théorie mécanique de la chaleur; H. v. Helmholtz, Physiologische Optik и т. д.

Указывая на опредѣленную ученую статью, принято сокращенно обозначать наименованіе журнала. И мы будемъ далѣе пользоваться подобными сокращеніями при литературныхъ указаніяхъ, помѣщенныхъ въ концѣ отдѣльныхъ главъ, а потому считаемъ нужнымъ познакомить читателей съ нѣкоторыми изъ важнѣйшихъ журналовъ. Замѣтимъ, что нѣкоторые журналы выходятъ серіями, причемъ въ каждой серіи нумерація томовъ отдѣльная. Въ цитатахъ нумеръ серіи помѣщается въ скобкахъ передъ нумеромъ тома. Буква *p.* обозначаетъ «pagina», т.-е. «страница».

1. *Журналъ русскаго Физико-химическаго Общества, С. П.* съ 1869 года; ежегодно одинъ томъ (въ 1896 г. томъ 28); начиная съ 1874 г. выходятъ два отдѣла: химическій и физическій. Каждый отдѣлъ имѣетъ двѣ части; первая содержитъ статьи оригинальныя, вторая—рефераты. Обозначеніе: **Ж. Ф. Х. О.**

2. *Труды отдѣленія физическихъ наукъ общества любителей естествознанія. Москва.* Въ 1895 г. вышелъ томъ 7. Обозначеніе: **О. Ф. Н. Об. Л. Е.**

3. *Извѣстія, записки, протоколы* и т. д. русскихъ университетовъ и различныхъ, состоящихъ при нихъ физико-математическихъ или физико-химическихъ Обществъ.

4. *Bulletin de l'Academie Impériale des sciences de St. Petersbourg.* С. П. Съ 1843—1859 г. вышли 17 томовъ, подъ названіемъ Bulletin de la classe physico-mathematique de l'Acad. и т. д., затѣмъ 32 тома съ 1860 до 1888 г. Новая серія съ 1890 г. Обозначеніе: **Bull. Ac. d. St. Petersb.**

5. *Mémoires* de l'Acad. Impér. des sciences de St. Petersb. I серія, 14 томовъ (Commentarii) 1726—1746; II серія (Novi commentarii) 1747—1776; III серія (Acta) 1777—1782; IV серія (Nova acta) 1783—1802; V серія 1803—1829; VI серія 1830—1852 (параллельно шли: «Sciences mathematiques et physiques» и «Mémoires, présentés par divers savants»); VII серія началась въ 1859 году; въ 1893 г. вышелъ 41-ый томъ. Обозначеніе: **Mém. de l'Acad. de St. Petersb.**

6. *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris.* Еженедѣльно одинъ нумеръ; ежегодно два тома; съ 1835 г. Въ 1896 г. вышли томы 122 и 123. Обозначеніе: **C. R.**

7. *Annales de Chimie et de Physique.* Paris. Съ 1789 г.; нынѣ по 3 тома ежегодно. Выходитъ серіями; начиная съ третьей, каждая серія по 30 томовъ. Въ 1894 г. началась серія 7-ая. Обозначеніе: **Ann. ch. et. phys.**

8. *Journal de Physique théorique et appliqué*; Paris. Съ 1872 г.; ежегодно одинъ томъ; выходитъ серіями по 10 томовъ. Въ 1892 г. началась серія третья. Иногда называется Journ. d'Almeida. Обозначеніе: **J. de phys.**

9. *Mémoires de l'Academie des Sciences de l'Institut de France,* Paris. Съ 1818 г. Обозначеніе: **Mém. de l'Acad. Fr.**

10. *Annalen der Physik und Chemie,* Leipzig. Съ 1799 г., по три тома ежегодно. Съ 1799—1824 г. подъ названіемъ *Gilberts Annalen* (т. 1—76). Обозначеніе: **Gilb. Ann.**

Съ 1824 г.—1877 подъ названіемъ *Poggendorff's Annalen* (т. 1—160). Обозначеніе: **Pogg. Ann.**

Между 1842 и 1878 вышли 8 дополнительныхъ томовъ (Ergaenzungsbände). Обозначеніе: **Pogg. Ann. Ergbd.**

Въ 1874 вышелъ *Iubelband.* Обозначеніе: **Pogg. Ann. Jublbd.**

Съ 1877 г. подъ названіемъ *Wiedemann's Annalen*; въ 1896 вышли томы 57—59. Обозначеніе: **Wied. Ann.** или **W. A.**

11. *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie,* Leipzig. Ежегодно одинъ томъ рефератовъ; съ 1877 г. Въ 1896 г. вышелъ томъ 20-ый. Обозначеніе: **Beibl.**

12. *Sitzungsberichte der königlich preussischen Academie der Wissenschaften.* Berlin. Обозначеніе: **Berl. Ber** или **Stzber. Berl. Acad.**

13. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften zu Wien.* Съ 1848 г.; ежегодно 1 или 2 тома. Въ 1895 г. вышелъ т. 104. Обозначеніе: **Wien. Ber.** или **Stsber. Wien. Acad.**

14. *Abhandlungen der mathematisch-physicalischen Classe der Koenigl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Muenchen.* Съ 1832 г.; выходятъ неправильно. Обозначеніе: **Abhandl. Bayer. Ac.**

15. *Sitzungsberichte der mathematisch-physicalischen Ctasse der Koenigl. Bayer. Akad. der Wissenschaften in Muenchen.* Съ 1871 г.; ежегодно одинъ томъ. Обозначеніе: **Stzber. Bayer. Ac.**

16. *Zeitschrift fuer Mathematik und Physik.* Съ 1856 г.; ежегодно одинъ томъ. Издается Schloemilch'омъ вмѣстѣ съ другими лицами, съ 1893 г. вмѣстѣ съ Cantor'омъ. Обозначеніе: **Schloemilch's Ztschr.**

17. *Repertorium der Physik*; съ 1865—1883 г. Carl's Repertorium; съ 1883—1891 г. Exner's Repertorium; всего 27 томовъ. Обозначеніе: **Repert. d. Phys.**

18. *Zeitschrift für physicalische Chemie,* Leipzig. Въ 1896 году вышелъ т. 19. Обозначеніе: **Ztschr. phys. Ch.**

19. *Zeitschrift für Instrumentenkunde,* Berlin. Съ 1881 г.; въ 1896 г. вышелъ т. 16. Обозначеніе: **Jnstr**

20. *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft,* Berlin. Съ 1868 г.; въ 1896 г. вышелъ т. 29. Обозначеніе: **Chem. Ber.**

21. *Die Fortschritte der Physik.* Berlin. Выходятъ неправильно за предыдущіе годы. Въ 1895 г. вышли части, относящіяся къ 1893 г. (49-ый годъ изданія). Обозначеніе: **Fortschr.**

22. *Archives des sciences physiques et naturelles,* Женева. Выходитъ серіями (periodes). Въ 1896 г. началась серія 4-ая. Обозначеніе: **Arch. sc. phys.**

23. *The Philosophical Magazine and Journal of Science,* London. Съ 1798 г.; выходитъ серіями. Съ 1830 г. подъ названіемъ The London and

Edinburg Phil. Mag. и т. д. Въ 1876 г. началась серія 5-ая; ежегодно два тома. Въ 1896 г. вышли томы 43 и 44. Обозначеніе: **Phil. Mag.**

24. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* Съ 1665 г. Въ 1896 г. вышелъ т. 187. Ежегодно 1 или 2 тома. Обозначеніе: **Trans. R. Soc**

25. *Proceedings of the Royal Society of London.* Съ 1832 г. Въ 1896 г. вышелъ т. 56. Обозначеніе: **Proc. R. Soc.**

26. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.* Съ 1822 г.; выходитъ неправильно. Обозначеніе: **Trans. Cambr. Soc.**

27. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* Съ 1866 г.; выходитъ неправильно. Обозначеніе: **Proc. Cambr. Soc.**

28. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh.* Съ 1788 г.; выходитъ неправильно. Обозначеніе: **Trans Edinb. Soc.**

29. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.* Съ 1835 г.; выходитъ неправильно. Обозначеніе: **Proc. Edinb. Soc.**

30. *Report of the British Association for the Advancement of Science.* Съ 1833 г. Ежегодно одинъ томъ за годъ предыдущій съ обозначеніемъ города, гдѣ состоялся съѣздъ. Въ 1896 г. вышелъ т. 65. Обозначеніе: **Report.**

31. *Atti della Reale Academie del Lincei,* Roma. Съ 1847 г. Выходитъ серіями. Въ 1892 г. началась серія 5-ая. Обозначеніе: **Atti Ac. del Lincei.**

32. *Il nuovo Cimento.* Pisa. Съ 1855 г. Ежегодно два тома; въ 1896 г. вышли т. 39 и 40. Обозначеніе: **Nuov. Cim.**

33. *Memorie della Academia della scienze dell'Instituto di Bologna.* Съ 1850 г.; выходитъ серіями; ежегодно одинъ томъ. Въ 1890 г. началась 5-ая серія. Обозначеніе: **Mém. d. Bologna.**

34. *Memorie della Societá degli Spectroscopisti Italiani.* Съ 1872 г.; ежегодно одинъ томъ. Обозначеніе: **Spectr. Ital.**

35. *The American Journal of Science and Arts.* Иногда называется *Silliman's Journal.* Съ 1819 г. Выходитъ серіями; въ 1896 г. началась серія 4-ая. Обозначеніе: **Sill. J.** или **Amer. J. of Sc**

36. *Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia.* Съ 1840 г.; ежегодно одинъ томъ. Обозначеніе: **Proc. Phil. Soc. of Philad.**

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

МЕХАНИКА.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Движеніе.

§ 1. Вступленіе. Механикою называется ученіе о движеніи физическихъ тѣлъ и о тѣхъ причинахъ, отъ которыхъ можетъ зависѣть характеръ этого движенія въ различныхъ частныхъ случаяхъ. Въ настоящее время механика, разросшаяся въ весьма обширную науку, составляетъ отдѣльный предметъ преподаванія и ей посвящены многочисленные спеціальные учебники и курсы. Въ этомъ, второмъ, отдѣлѣ нашего курса мы, не гоняясь за полнотою, разсмотримъ исключительно только тѣ вопросы механики, къ которымъ намъ въ послѣдующемъ придется обращаться неоднократно и безъ предварительнаго, своевременнаго изученія которыхъ нѣтъ возможности разобраться въ такихъ явленіяхъ или теоріяхъ, которыя, по своему характеру, должны быть включены въ курсъ физики.

Въ главѣ I мы разсмотримъ нѣкоторыя свойства движенія, не затрогивая вовсе вопроса о причинахъ, которыми это движеніе вызывается.

Прежде чѣмъ говорить о движеніи физическихъ тѣлъ, разныя части котораго могутъ, въ одинъ и тотъ же моментъ, обладать различными движеніями, мы обратимся къ болѣе простому случаю — къ движенію матеріальной точки.

Матеріальной точкѣ мы приписываемъ слѣдующія свойства:

1. Матеріальная точка способна двигаться т.-е. мѣнять свое положеніе въ пространствѣ.

2. Она содержитъ нѣкоторое количество матеріи.

3. Она подвержена воздѣйствію остального міра.

Никакихъ другихъ свойствъ мы пока не приписываемъ матеріальной точкѣ и, прежде всего, мы не обращаемъ вниманія на ея протяженность, хотя можетъ показаться, что это противорѣчитъ тому, что она содержитъ матерію. Однако, мы предполагаемъ, что матерія, сосредоточенная около матеріальной точки, занимаетъ столь малое пространство, что всѣ части этой матеріи, ни по свойствамъ, ни по характеру движенія другъ отъ друга не отличаются. Поэтому и не приходится разсматривать протяженности матеріальной точки и мы можемъ допустить, что она этимъ свойствомъ не обладаетъ вовсе. Неизмѣняемою системою точекъ называется совокупность произвольнаго числа матеріальныхъ точекъ, которыя могутъ двигаться только съ соблюденіемъ условія неизмѣнности взаимныхъ ихъ разстояній.

Всякое физическое тѣло можетъ быть раздѣлено мысленно на безконечное число безконечно малыхъ[1]) элементовъ, изъ которыхъ каждый можетъ быть принятъ за матеріальную точку, между тѣмъ, какъ элементъ геометрическаго тѣла, понятно, не можетъ быть принятъ за точку геометрическую. Эта разница является слѣдствіемъ того, что матеріальная точка содержитъ матерію, по существу не могущую не занимать пространства.

Въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ физики (въ теоріи упругости и др.) приходится разсматривать «элементы физическаго тѣла», изъ которыхъ каждый обладаетъ невполнѣ одинаковыми свойствами или движеніями во всѣхъ своихъ геометрическихъ точкахъ. Такой «элементъ» уже не можетъ быть уподобленъ матеріальной точкѣ.

Рис. 10.

Физическія тѣла не представляютъ неизмѣнныхъ системъ матеріальныхъ точекъ. Это весьма важное обстоятельство, показывающее, что результаты изученія свойствъ неизмѣнной системы не приложимы, безъ надлежащихъ оговорокъ, къ физическимъ тѣламъ.

Мы разсмотримъ, прежде всего, движеніе матеріальной точки.

§ 2. Скорость. Изучая движеніе точки, мы имѣемъ дѣло, прежде всего, съ траекторіей, пройденнымъ путемъ, временемъ и направленіемъ движенія.

Траекторіей называется та линія, по которой совершается движеніе. Смотря по роду траекторіи, отличаютъ движенія прямолинейное и криволинейное.

Пройденный путь имѣетъ въ механикѣ значеніе, не всегда совпадающее съ буквальнымъ смысломъ этого термина. Положимъ, что движеніе совершается по нѣкоторой линіи *MM* (рис. 10), извѣстной намъ по ея геометрическому характеру (прямая, кругъ, эллипсъ и т. д.). Выберемъ на этой линіи произвольную точку *O*, отъ которой мы, вдоль самой линіи, будемъ

[1]) Безконечно малою называется такая перемѣнная величина, которая имѣетъ своимъ предѣломъ нуль.

измѣрять разстоянія $s = OA$ точекъ A на линіи. Величину s будемъ считать положительною въ одну сторону, напр. въ сторону OM, и отрицательною въ другую. Когда точка движется по линіи NM, то перемѣнное ея разстояніе отъ O, т.-е. величину s мы и будемъ называть «пройденнымъ путемъ». Если точка начинаетъ свое движеніе отъ O и все время движется въ одномъ направленіи, то s представляетъ пройденный путь въ буквальномъ смыслѣ слова. Если движеніе начинается отъ нѣкоторой точки A_0, то $s_0 = OA_0$ называется начальнымъ значеніемъ пути. Когда точка, удалившись отъ O, вновь станетъ къ нему приближаться, то «путь» s уменьшается. Точка имѣетъ положительное направленіе движенія, когда положительное s увеличивается или отрицательное по абсолютному значенію уменьшается; при отрицательномъ направленіи движенія имѣемъ обратное.

Время t считается отъ какого-либо момента; всякому позднѣйшему моменту соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе времени t. Два момента времени t_1 и t_2 опредѣляютъ промежутокъ времени $t_2 - t_1$, который можно также обозначать черезъ t, подобно тому, какъ и соотвѣтствующій ему путь $s_2 - s_1$ иногда будемъ обозначать черезъ s. Начальному пути s_0 соотвѣтствуетъ вообще нѣкоторое начальное значеніе t_0 времени.

Путь s вообще представляетъ нѣкоторую функцію времени t, что символически пишется такъ:

$$s = f(t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Простѣйшій случай движенія точки по произвольной траекторіи мы имѣемъ, когда

$$s = s_0 + at \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ s_0 начальное значеніе пути s, a нѣкоторый коеффиціентъ, который равенъ пути, пройденному въ единицу времени, т. е., точнѣе, a есть число, равное числу линейныхъ единицъ, содержащихся въ этомъ пути. Въ случаѣ, къ которому относится формула (2), пути, пройденные въ произвольные, равные промежутки времени, равны между собою. Такое движеніе называется равномѣрнымъ.

Скорость равномѣрнаго движенія есть понятіе первоначальное (стр. 11), не поддающееся опредѣленію и въ таковомъ не нуждающееся. Мы называемъ скоростью равномѣрнаго движенія величину пропорціональную пути s, пройденному въ данное время t и обратно пропорціональную времени t, потребному для прохожденія опредѣленнаго пути. За единицу скорости возьмемъ скорость какого-нибудь равномѣрнаго движенія; численное значеніе v всякой другой скорости выразится формулою

$$v = C\frac{s}{t}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ путь s былъ фактически пройденъ за промежутокъ времени t. Полагая коеффиціентъ C равнымъ единицѣ ($C = 1$), мы должны за единицу скорости

принять скорость такого движенія, при которомъ въ единицу времени была пройдена единица длины; тогда

$$v = \frac{s}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Пользуясь формулою (2), мы должны написать, вмѣсто (3) или (4),

$$v = C\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad \text{или} \quad v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Формула (2) даетъ $s_2 - s_1 = a(t_2 - t_1)$, а слѣд.

$$v = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

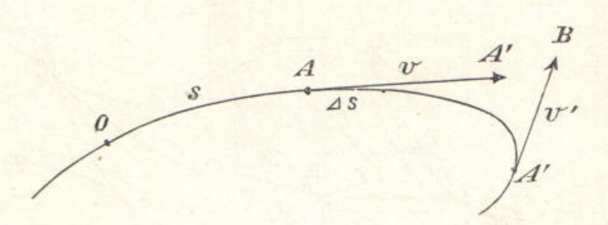
Эта формула показываетъ, что при $C = 1$, т.-е. при указанномъ выборѣ единицы скорости, скорость равномѣрнаго движенія численно равна пути, пройденному въ единицу времени, т.-е. она «измѣряется» этимъ путемъ см. стр. 23 (но не скорость равна пути и т. д.; скорость есть величина sui generis и потому не можетъ равняться пути).

При неравномѣрномъ движеніи, когда $s = f(t)$, гдѣ f символъ какой-либо зависимости, средняя скорость v_m, т.-е. скорость точки, равномѣрно проходящей одинаковый съ данною точкою путь въ одинаковое съ нею время, опредѣляется формулою

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Понятіе о скорости въ данный моментъ t при криволинейномъ движеніи не есть понятіе первоначальное и нуждается въ опредѣленіи. Положимъ, что въ малый промежутокъ времени Δt, слѣдующій послѣ момента времени t, точка прошла малый путь Δs (рис. 11), положительный или отрицательный, смотря по направленію движенія. Въ такомъ случаѣ отношеніе $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ даетъ среднюю скорость v_m за малый промежутокъ времени Δt. Предѣлъ, къ которому стремится эта средняя скорость при безконечномъ убываніи промежутка времени Δt и называется скоростью v въ данный моментъ. Итакъ мы имѣемъ

Рис. 11.



$$v = \text{пред.}\, v_m = \text{пред.}\, \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

На основаніи формулы (40), стр. 39, и введенныхъ тамъ обозначенія и термина, мы можемъ сказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{если} & s = f(t) \\ \text{то} & v = f'(t) \end{array} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

т. е. «скорость есть производная пути по времени».

Если напр. $s = 4t^5 - 7t^3 + 5t^2$, то $v = 20t^4 - 21t^2 + 10t$, см. форм. (42) стр. 38. Если

$$\left.\begin{aligned} s &= at + bt^2 \\ \text{то} \quad v &= a + 2bt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

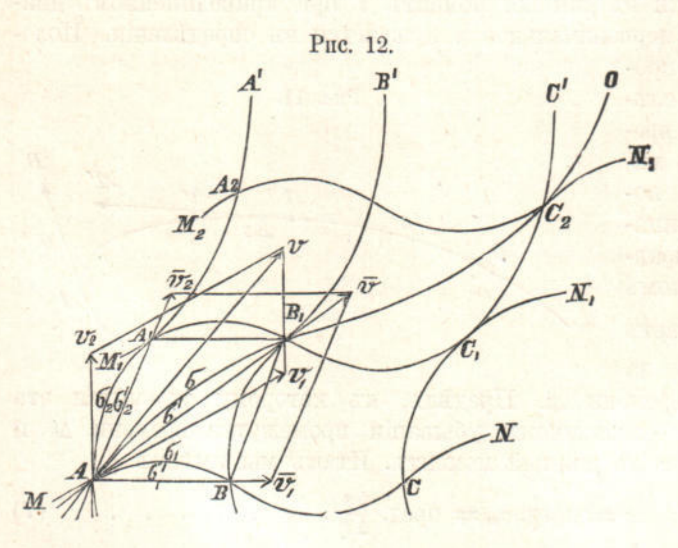
Скорость имѣетъ знакъ величины Δs, т.-е. она положительная или отрицательная, смотря по тому, движется-ли точка въ сторону положительныхъ (возрастающихъ) или отрицательныхъ (убывающихъ) величинъ s. За направленіе средней скорости $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ можно принять направленіе весьма малой хорды дуги Δs; направленіе скорости v въ данный моментъ есть направленіе касательной къ траекторіи.

Направленіе скорости совпадаетъ, такимъ образомъ, съ направленіемъ самаго движенія.

Скорость, имѣя направленіе, есть векторъ и потому (см. стр. 25 и 41) можетъ быть изображена стрѣлкою, длина которой содержитъ столько единицъ длины, сколько въ изображаемой скорости единицъ скорости. На рис. 11 изображены случаи, когда точка, находясь въ A, обладаетъ положительною скоростью v; находясь въ A', ея скорость отрицательна и по величинѣ изображена стрѣлкою v'.

§ 3. Сложеніе скоростей. Положимъ, что нѣкоторая точка движется по кривой MN (рис. 12) и что въ то-же время сама кривая перемѣщается параллельно самой себѣ, такъ что всѣ ея геометрическія точки движутся по одинаковымъ кривымъ AA', BB', CC' и т. д., параллельнымъ между собою. Въ этомъ случаѣ наша точка обладаетъ двумя движеніями: одно вдоль кривой MN, другое вмѣстѣ съ этой кривой. Чтобы узнать, каково истинное движеніе точки, слагающееся изъ этихъ двухъ, построимъ для ряда различныхъ моментовъ времени положенія этой точки. Положимъ, что она сперва находится въ A; черезъ нѣкоторое время t_1 она перемѣстилась по кривой MN въ B; но въ это время сама кривая MN приняла положеніе M_1N_1, а геометрическая ея точка B перешла въ B_1; это и будетъ истинное новое положеніе разсматриваемой движущейся точки во время t_1. Подобнымъ же образомъ находимъ ея положеніе C_2 въ другой моментъ времени t_2. Ука-

Рис. 12.



заннымъ способомъ мы можемъ построить большое число положеній, занимаемыхъ нашей точкой въ разные моменты времени. Соединяя эти точки прямыми, получаемъ нѣкоторую ломанную линію. Если увеличивать (мысленно) безпредѣльно число построенныхъ такимъ способомъ положеній нашей точки, то ломанная линія будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу, который представится въ видѣ нѣкоторой кривой линіи AB_1C_2O, истинной траекторіи точки въ ея т. наз. составномъ движеніи. Опредѣлимъ скорость v движенія точки по этой кривой для какого-либо даннаго момента напр. для момента, когда наша точка находится въ A. Скорость v_1 движенія вдоль AN и скорость v_2 движенія вдоль AA' мы считаемъ извѣстными. Пусть теперь, на рис. 12, AB обозначаетъ тотъ малый путь $\sigma_1 = \Delta s_1$, который проходитъ точка въ малое время Δt; въ это же время AN переходитъ въ A_1N_1, такъ что дуга $AA_1 = \sigma_2 = \Delta s_2$ представляетъ путь, пройденный во второмъ изъ двухъ слагаемыхъ движеній. Истинный путь, пройденный точкою во время Δt изобразится дугою $AB_1 = \sigma = \Delta s$. Хорды σ_1', σ_2' и σ' трехъ указанныхъ дугъ составляютъ двѣ стороны и діагональ параллелограмма AA_1B_1B.

Три среднія скорости двухъ слагаемыхъ и одного составного движенія численно равны дугамъ σ_1, σ_2 и σ, дѣленнымъ на Δt. Намѣреваясь найти три скорости въ точкѣ A, мы будемъ искать предѣлы этихъ трехъ дробей. Изъ началъ теоріи предѣловъ извѣстно, что въ случаяхъ, подобныхъ разбираемому, мы можемъ дуги замѣнить хордами и написать для трехъ среднихъ скоростей, которыя обозначимъ черезъ $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ и $\overline{v}$

$$\overline{v}_1 = \frac{\sigma_1'}{\Delta t}, \quad \overline{v}_2 = \frac{\sigma_2'}{\Delta t}, \quad \overline{v} = \frac{\sigma'}{\Delta t} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

По направленію эти три скорости совпадаютъ съ соотвѣтствующими хордами, какъ показано на рис. 12, а такъ какъ онѣ по величинѣ пропорціональны этимъ хордамъ, см. (10), то ясно, что стрѣлки $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ и $\overline{v}$, изображающія эти скорости, также составляютъ двѣ стороны и діагональ параллелограмма. При безконечномъ уменьшеніи времени Δt три среднія скорости будутъ приближаться къ тремъ предѣламъ, которые представляютъ не что иное, какъ двѣ скорости v_1 и v_2 слагаемыхъ и скорость v составного движенія. По направленію эти три скорости опредѣлятся касательными въ точкѣ A къ тремъ кривымъ двухъ слагаемыхъ и составнаго движенія. По величинѣ онѣ должны обладать тѣмъ свойствомъ, которымъ обладаютъ три среднія скорости (10) при всякомъ, произвольно маломъ значеніи времени Δt, т.-е. составная скорость v въ каждый данный моментъ по величинѣ и по направленію опредѣляется діагональю параллелограмма, построеннаго на двухъ слагаемыхъ скоростяхъ.

Полученный результатъ можно обобщить и послѣдовательнымъ построеніемъ найти скорость составного движенія, получающагося какъ результатъ трехъ и бо́льшаго числа слагаемыхъ движеній, для возможности одновременнаго существованія которыхъ не трудно подобрать физическія условія. Данную скорость v всегда можно разсматривать, какъ составную и на безконечное число манеровъ «разложить» ее на двѣ или большее

число скоростей слагаемыхъ. При разложенiи на двѣ скорости мы построимъ параллелограмъ (въ частномъ случаѣ прямоугольникъ); при разложенiи на три скорости мы построимъ параллелепипедъ (въ частномъ случаѣ прямоугольный).

На основанiи сказаннаго на стр. 41, мы видимъ, что составная скорость v точки есть геометрическая сумма ея слагаемыхъ скоростей и можетъ быть построена по правилу многоугольника векторовъ, см. стр. 44.

Если точка движется въ пространствѣ, то ея скорость v, въ каждый данный моментъ, можетъ быть разложена на три скорости v_x, v_y, v_z, имѣющiя направленiя координатныхъ осей. Положимъ, что движенiе задано такимъ образомъ, что координаты x, y и z движущейся точки даны, какъ функцiи времени $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \theta(t)$. Движенiе точки можно разсматривать, какъ составное изъ трехъ прямолинейныхъ движенiй, параллельныхъ координатнымъ осямъ, которыя примемъ за прямоугольныя. Скорости этихъ движенiй, т. е. величины v_x, v_y и v_z опредѣлятся по формуламъ:

$$v_x = \text{пред.} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t);\quad v_y = \text{пред.} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \psi'(t);\quad v_z = \text{пред.} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \theta'(t)\ .\ (11)$$

Далѣе имѣемъ:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (12)$$

$$\cos(v,\ x) = \frac{v_x}{v};\ \cos(v,\ y) = \frac{v_y}{v};\ \cos(v,\ z) = \frac{v_z}{v}\ \ .\ .\ .\ .\ (13)$$

§ 4. Ускоренiе прямолинейнаго равноперемѣннаго движенiя. Скорость, какъ векторъ, опредѣляется величиною и направленiемъ. Соотвѣтственно этому возможны два, различныхъ по характеру, измѣненiя скорости: измѣненiе по величинѣ и измѣненiе по направленiю.

Если къ данной скорости v геометрически присоединить другую, допустимъ, небольшую скорость $\overline{\Delta v}$, то, смотря по направленiю послѣдней, можетъ произойти различное по характеру измѣненiе первоначальной скорости v. Если $\overline{\Delta v}$ и v одинаковаго или прямо противоположнаго направленiя, то скорость измѣнится только по величинѣ. Если v и $\overline{\Delta v}$ составляютъ произвольный уголъ, то, вообще говоря, новая скорость будетъ отличаться отъ старой и по величинѣ и по направленiю. Въ частномъ случаѣ присоединенiе скорости $\overline{\Delta v}$ можетъ вызвать одно только измѣненiе направленiя скорости v безъ измѣненiя ея величины. Наоборотъ, всякое измѣненiе скорости v, т.-е. переходъ ея въ новую скорость v', можно разсматривать, какъ происшедшее вслѣдствiе геометрическаго присоединенiя къ v нѣкоторой скорости $\overline{\Delta v}$, которую легко построить, если исвѣстны $v = AB$ и $v' = AC$, рис. 13. Для этого соединимъ точки B и C и построимъ параллелограммъ

Рис. 13.

$ABCD$; сторона AD и опредѣлить скорость $\overline{\Delta v}$. Продоливъ AB до величины $AG = AC = v'$, соединивъ точки G и C и проводя $DF \parallel CG$, мы можемъ скорость $\overline{\Delta v} = AD$ разложить на двѣ скорости, которыя символически обозначимъ черезъ $\Delta_1 v = AF = BG$ и $\overline{\Delta_2 v} = AE = GC$. Изъ нихъ $\Delta_1 v$ вызываетъ измѣненіе скорости только по величинѣ, а $\overline{\Delta_2 v}$ — только по направленію; $\Delta_1 v$ есть алгебраическое, $\Delta_2 v$ геометрическое приращеніе скорости v, см. стр. 42.

Обратимся сперва къ случаю прямолинейнаго движенія, при которомъ скорость мѣняется только по величинѣ. Простѣйшій случай такого движенія мы имѣемъ, когда скорость v въ зависимости отъ времени t выражается формулою

$$v = v_0 + bt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

въ которой v_0, т. наз. начальная скорость, соотвѣтствуетъ скорости въ моментъ $t = o$. При такомъ движеніи, называемомъ равноперемѣннымъ, скорость пріобрѣтаетъ въ произвольные равные промежутки времени одинаковыя приращенія, которыя, смотря по знаку коеффиціента b, могутъ быть положительныя или отрицательныя. Формула (14) показываетъ, что b равно численному значенію скорости, пріобрѣтенной въ единицу времени. Мы можемъ написать

$$b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

гдѣ $v_1 = v_0 + bt_1$ и $v_2 = v_0 + bt_2$ суть скорости въ моменты времени t_1 и t_2. Если пріобрѣтенную скорость $v_2 - v_1$ обозначить просто черезъ v, а промежутокъ времени просто черезъ t, то получается

$$b = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

откуда еще яснѣе усматривается выше приведенное значеніе числа b.

Ускореніе равноперемѣннаго прямолинейнаго движенія есть величина своего рода (sui generis), служащая характеристикою или мѣрою степени измѣняемости скорости. Она слѣдовательно пропорціональна скорости v, пріобрѣтенной (или потерянной) за данный промежутокъ времени t и обратно пропорціональна времени t, потребнаго для измѣненія скорости на данную величину v. За единицу ускоренія мы можемъ принять ускореніе какого-либо равноперемѣннаго движенія. Тогда численное значеніе w ускоренія въ произвольномъ случаѣ равноперемѣннаго прямолинейнаго движенія выразится формулою

$$w = C\frac{v}{t}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

въ которой C равно численному значенію ускоренія такого движенія, при которомъ въ единицу времени пріобрѣтается единица скорости. Принимая $C = 1$, т.-е. полагая

$$w = \frac{v}{t}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

мы за единицу ускоренія уже непремѣнно должны принять ускореніе такого движенія, при которомъ въ единицу времени пріобрѣтается единица скорости. Сравнивая (18) съ (16), мы находимъ, что

$$w = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Это показываетъ (см. стр. 23), что если въ общей формулѣ (17) положить $C = 1$, то ускореніе будетъ измѣряться скоростью, пріобрѣтенною въ единицу времени. Мы всегда и будемъ полагать $C = 1$, т.-е. примемъ формулу (18). Въ этомъ случаѣ мы вмѣсто (14), можемъ положить

$$v = v_0 + wt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Формулы (9) на стр. 52 показываютъ, что въ этомъ случаѣ пройденный путь выразится формулою

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} wt^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

причемъ разстоянія s считаются отъ той точки, въ которой находилась движущаяся точка во время $t = 0$, обладая скоростью v_0. Движеніе, опредѣляющееся формулами (20) и (21), называется равноускореннымъ при w положительномъ и равнозамедленномъ при w отрицательномъ.

Для двухъ моментовъ времени t_1 и t_2 мы имѣемъ скорости $v_1 = v_0 + wt_1$ и $v_2 = v_0 + wt_2$ и пройденные пути $s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} w t_1^2$ и $s_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} wt_2^2$. Эти формулы даютъ немедленно

$$v_2^2 - v_1^2 = 2w(s_2 - s_1).$$

Обозначая пройденный путь $s_2 - s_1$ просто буквою s, получаемъ

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ws \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

т.-е. при равноперемѣнномъ движеніи измѣненіе квадрата скорости за нѣкоторый промежутокъ времени равно удвоенному произведенію ускоренія на путь, пройденный въъ это же время. При $v_0 = 0$ имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l} v = wt \\ s = \frac{1}{2} wt^2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22,a)$$

откуда, исключивъ t,

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{2ws} \\ s = \frac{v^2}{2w} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22,b)$$

Случай равнозамедленнаго движенія выражается формулами

$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 - wt \\ s = v_0 t - \frac{1}{2} wt^2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

если ускореніе обозначить черезъ $-w$. Вмѣсто (22) имѣемъ теперь

$$v_1^2 - v_2^2 = 2ws \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Точка, движущаяся равнозамедлительно съ начальною скорость v_0 и съ ускореніемъ $-w$ остановится во время T, опредѣляющееся изъ уравненія $v = v_0 - wT = 0$, откуда

$$T = \frac{v_0}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,a)$$

Подставляя это T вмѣсто t въ выраженіе (23) для s, получаемъ для всего пути S, пройденнаго точкою отъ момента, когда она обладала скоростью v_0, до момента остановки

$$S = \frac{v_0^2}{2w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,b)$$

§ 5. Ускореніе при произвольномъ прямолинейномъ движеніи. Въ произвольномъ прямолинейномъ движеніи скорость есть нѣкоторая функція времени t; обозначимъ ее черезъ

$$v = \varphi(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Въ этомъ случаѣ мы можемъ говорить о среднемъ ускореніи w_m за промежутокъ времени между моментами t_1 и t_2, которымъ соотвѣтствуютъ скорости v_1 и v_2; оно равно ускоренію точки, движущейся равноперемѣнно и пріобрѣтающей скорость $v_2 - v_1$ во время $t_2 - t_1$, т.-е.

$$w_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v}{t},$$

если пріобрѣтенную скорость и промежутокъ времени обозначить просто черезъ v и t.

Отъ средняго ускоренія мы можемъ перейти къ ускоренію въ данный моментъ t. Положимъ, что въ малый промежутокъ времени Δt скорость v измѣняется на величину Δv. Тогда $w_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ среднее ускореніе за малый промежутокъ времени Δt. Предѣлъ, къ которому стремится это среднее ускореніе при безконечномъ убываніи времени Δt и составляетъ ускореніе w въ данный моментъ. Итакъ

$$w = \text{пред. } w_m = \text{пред. } \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Форм. (40) стр. 37 показываетъ, что если $v = \varphi(t)$, то

$$w = \varphi'(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

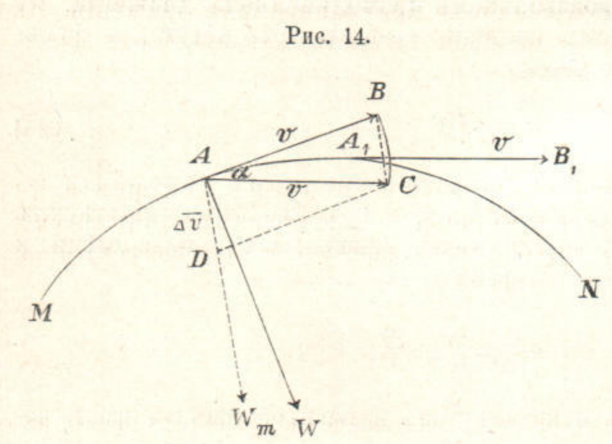
т.-е. ускореніе при прямолинейномъ движеніи есть производная скорости по времени. На основаніи форм. (42) стр. 38 имѣемъ, напр.

если $v = 7t^4 - 8t^3 + 5t$, то ускореніе $w = 28t^3 - 24\ t^2 + 5$. Если $v = bt^2$, то $w = 2bt$.

Ускореніе w прямолинейнаго движенія имѣетъ направленіе приращенія Δv скорости. Отсюда слѣдуетъ, что ускореніе положительное, когда скорость положительная растетъ или когда скорость отрицательная (стр. 52) по абсолютной величинѣ убываетъ; наоборотъ ускореніе отрицательное, когда положительная скорость убываетъ или отрицательная по абсолютной величинѣ растетъ. Иначе можно такъ выразиться: ускореніе имѣетъ направленіе движенія, когда скорость по абсолютной величинѣ растетъ; она имѣетъ направленіе, противоположное направленію движенія, когда эта скорость убываетъ.

§ 6. Ускореніе при криволинейномъ движеніи. Разсмотримъ сперва случай равномѣрнаго криволинейнаго движенія, при которомъ скорость v, оставаясь постоянною по величинѣ, мѣняется только по направленію. Положимъ, что точка движется по плоской кривой MN (рис. 14), обладая въ A скоростью $v = AB$. Черезъ время Δt, пройдя путь $AA_1 = \Delta s$, она въ точкѣ A_1 будетъ обладать скоростью $v = A_1B_1$. Проведя $AC \parallel A_1B_1$ и по величинѣ $AC = A_1B_1 = v$, мы видимъ, что скорость v получила во время Δt приращеніе $\overline{\Delta v} = AD = BC$. Среднее ускореніе w_m и здѣсь равно

Рис. 14.



$$w_m = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{AD}{\Delta t} = \frac{BC}{\Delta t}\,. \quad (28)$$

При безконечномъ убываніи времени Δt, среднее ускореніе w_m будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу, который и есть ускореніе w въ данный моментъ. Для опредѣленія этого предѣла мы опишемъ изъ A, какъ центра, дугу BC радіусомъ $v = AB$ и преобразуемъ (28), полагая $\angle BAC = \alpha$, такъ что $\smile BC = v\alpha$, см. (35) стр. 36:

$$w_m = \frac{BC}{\Delta t} = \frac{\smile BC}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{BC}{\smile BC} = v\,\frac{\alpha}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{BC}{\smile BC} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Переходя къ предѣлу, мы имѣемъ пред. $\dfrac{BC}{\smile BC} = 1$; пред. $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$ см. (7) стр. 51 и пред. $\dfrac{\alpha}{\Delta s} = \dfrac{1}{R}$, гдѣ R радіусъ кривизны кривой въ точкѣ A см. (50) стр. 41. Такимъ образомъ мы получаемъ

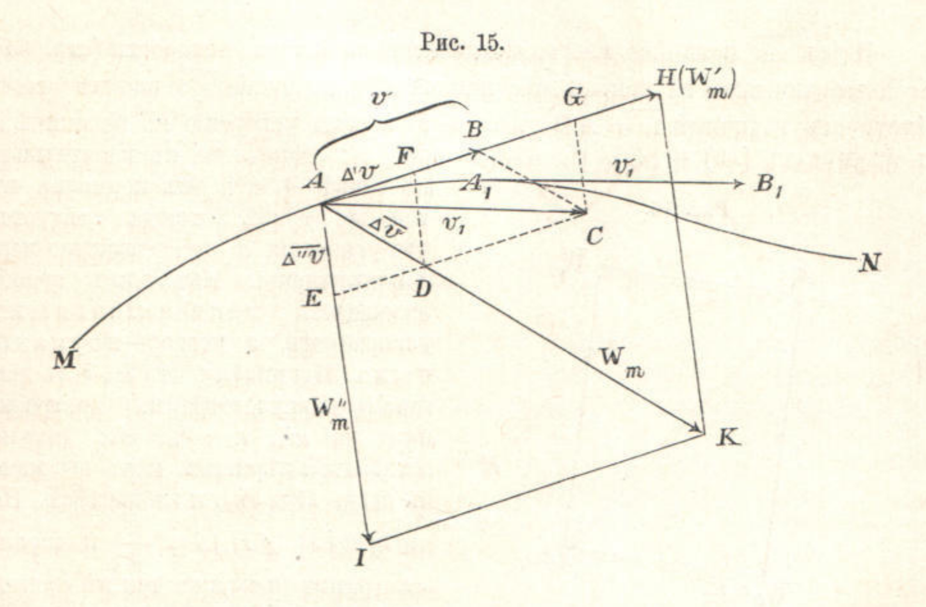
$$w = \text{пред. } w_m = \frac{v^2}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Направленіе ускоренія w опредѣляется слѣдующимъ образомъ: $w_m \parallel BC$; но линія BC, какъ основаніе равнобедреннаго треугольника, составляетъ равные углы со сторонами AB и AC. Предѣлъ угла α есть нуль, а потому $\angle ABC$ безконечно приближается къ прямому; среднее ускореніе w_m, будучи параллельно BC, въ предѣлѣ дѣлается перпендикулярнымъ къ $v = AB$. Отсюда слѣдуетъ, что ускореніе w перпендикулярно къ касательной AB, т.-е. имѣетъ направленіе нормали въ точкѣ A къ кривой MN.

При криволинейномъ равномѣрномъ движеніи ускореніе, въ каждый данный моментъ, направлено по нормали къ кривой и по величинѣ равно $\frac{v^2}{R}$, т.-е. его численное значеніе равно численному значенію квадрата скорости, дѣленному на численное значеніе радіуса кривизны.

Переходимъ къ общему случаю неравномѣрнаго криволинейнаго движенія. Положимъ, что точка обладаетъ въ A (рис. 15) скоростью $v = AB$

Рис. 15.



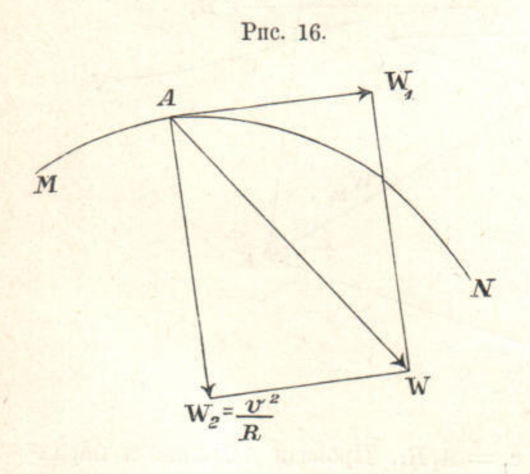
и спустя время Δt въ A_1 скоростью $v_1 = A_1B_1$. Проведя AC равно и параллельно A_1B_1, мы видимъ, что пріобрѣтенная скорость $\overline{\Delta v} = AD = BC$. Отсюда среднее ускореніе $w_m = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{AD}{\Delta t} = AK$. Дѣлаемъ $AG = AC = A_1B_1 = v_1$, проводимъ $DF \parallel CG$ и разлагаемъ $\overline{\Delta v} = AD$ на двѣ скорости $\Delta' v = AF = BG$ и $\overline{\Delta'' v} = AE = CG$; изъ нихъ первая вызываетъ алгебраическое измѣненіе скорости, т.-е. измѣненіе по величинѣ ($\Delta' v = v_1 - v$), вторая—геометрическое измѣненіе скорости, т.-е. измѣненіе по направленію. Соотвѣтственно получаемъ среднее ускореніе $w'_m = \frac{\Delta' v}{\Delta t} = \frac{AF}{\Delta t} = AH$, которое служитъ мѣрою средней измѣняемости скорости по величинѣ и среднее уско-

реніе $w''_m = \frac{\overline{\Delta'' v}}{\Delta t} = \frac{AE}{\Delta t} = AJ$, которое опредѣляетъ собою среднюю измѣняемость скорости по направленію. Такъ какъ три величины $w_m = AK$, $w'_m = AH$ и $w''_m = AJ$ пропорціональны линіямъ AD, AF и AE, то ясно, что w_m опредѣляется діагональю параллелограмма, построеннаго на w'_m и w''_m. При безконечномъ уменьшеніи времени Δt, три среднія ускоренія будутъ стремиться къ предѣльнымъ направленіямъ и значеніямъ, которыя обозначимъ черезъ w, w_1, w_2. Притомъ

$$\left.\begin{aligned} w &= \text{пред. } \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} \\ w_1 &= \text{пред. } \frac{\Delta' v}{\Delta t} \\ w_2 &= \text{пред. } \frac{\overline{\Delta'' v}}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Здѣсь $\overline{\Delta v}$ истинное, т.-е. геометрическое приращеніе скорости (стр. 54). $\Delta_1 v$ алгебраическое ея приращеніе; наконецъ приращеніе $\overline{\Delta_2 v}$ вполнѣ соотвѣтствуетъ величинѣ $\overline{\Delta v} = AD$ рис. 13-го, а само ускореніе w_2 величинѣ w въ формулахъ (29) и (30). По направленію, w_1 совпадаетъ съ касательной въ точкѣ A, а w_2 съ нормалью въ той же точкѣ; отсюда слѣдуетъ, что ускоренія w_1 и w_2 взаимно перпендикулярны. Изъ нихъ первое называется **тангенціальнымъ** ускореніемъ, а второе—**нормальнымъ**. Мы видѣли, что w_m есть діагональ параллелограмма, построеннаго на w'_m и w''_m. Это должно оставаться вѣрнымъ, какъ бы мало ни было Δt, слѣд. и въ предѣлѣ. Но въ предѣлѣ $\angle HAJ = \frac{\pi}{2}$ и параллелограммъ превращается въ прямоугольникъ. Изъ всего сказаннаго получается такой результатъ:

Рис. 16.



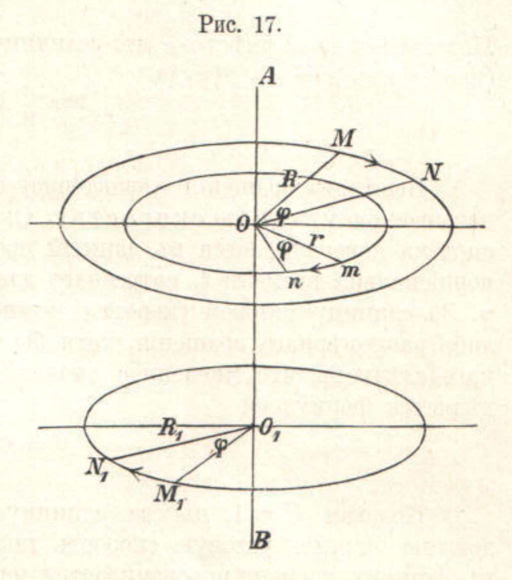
При криволинейномъ неравномѣрномъ движеніи точка обладаетъ въ каждый данный моментъ нѣкоторымъ ускореніемъ w, вообще составляющимъ нѣкоторый уголъ съ направленіемъ движенія и служащимъ мѣрою полной измѣняемости скорости. Ускореніе w, рис. 16, можетъ быть геометрически разложено на ускореніе тангенціальное w_1, направленное по касательной и на ускореніе нормальное w_2, перпендикулярное къ направленію движенія и равное $\frac{v^2}{R}$, гдѣ R радіусъ кривизны въ данной точкѣ. Ускоренія w_1 и w_2 соотвѣтственно служатъ мѣрою измѣняемости скорости по величинѣ и по направленію.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{\left(\text{пред.}\,\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

§ 7. Движеніе вращательное. Неизмѣнная система точекъ или, какъ мы для краткости будемъ говорить, «тѣло» (хотя, какъ мы видѣли на стр. 49 физическое тѣло не представляетъ примѣра неизмѣнной системы) можетъ обладать весьма различными движеніями, изъ которыхъ мы однако здѣсь разсмотримъ только одно, а именно движеніе вращательное. Оно характеризуется слѣдующимъ образомъ. Дана прямая линія AB (рис. 17), которая называется осью вращенія. Всѣ точки m, M, M_1 и т. д. движутся по кругамъ, плоскости которыхъ перпендикулярны къ оси вращенія и центры которыхъ лежатъ на этой оси. Всѣ радіусы Om, OM, O_1M_1 и т. д. поворачиваются въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени на одинъ и тотъ же уголъ $\varphi = \angle mOn = \angle MON = \angle M_1O_1N_1$ и т. д. Если считать уголъ φ отъ нѣкотораго начальнаго положенія радіусовъ (перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ движущихся точекъ на ось вращенія), то, вообще говоря, этотъ уголъ представится нѣкоторою функціею времени. Положимъ

Рис. 17.



$$\varphi = F(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Путь s, пройденный точкою, равенъ

$$s = r\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

гдѣ r радіусъ круга, описываемаго точкою, см. (35) стр. 36.

Простѣйшій случай вращенія тотъ, когда

$$\varphi = at \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

гдѣ a постоянное число, равное углу, на который система поворачивается въ единицу времени. Такое вращеніе называется равномѣрнымъ. Путь s, пройденный точкою, равенъ, въ этомъ случаѣ

$$s = r\varphi = rat \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ точки системы движутся равномѣрно. Скорость v этого движенія равна

$$v = ra. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Скорости различныхъ точекъ системы пропорціональны ихъ разстояніямъ отъ оси. Точки самой оси неподвижны.

Обозначимъ черезъ T время полнаго оборота системы около оси; въ теченіе этого времени φ увеличивается на 2π. Формула (35) даетъ $2\pi = aT$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Подставляя сюда вмѣсто a его величину, взятую изъ (37), имѣемъ $2\pi r = vT$ (проще изъ $s = vt$), откуда

$$v = \frac{2\pi r}{T} \text{ и } T = \frac{2\pi r}{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Быстрота вращенія характеризуется особою величиною (sui generis), называемою *угловою скоростью*. Она пропорціональна углу φ, на который система поворачивается въ данный промежутокъ времени t и обратно пропорціональна времени t, потребнаго для поворота системы на данный уголъ φ. За единицу угловой скорости можно принять угловую скорость какого-либо равномѣрнаго вращенія, хотя бы, напр., вращенія земли. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что численное значеніе θ угловой скорости, вообще, опредѣляется формулою:

$$\theta = C\frac{\varphi}{t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Полагая $C = 1$, мы за единицу угловой скорости уже непремѣнно должны принять угловую скорость такого движенія, при которомъ система въ единицу времени поворачивается на единицу угла (57°,29... стр. 36). Въ этомъ случаѣ имѣемъ, см. (35),

$$\theta = \frac{\varphi}{t} = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Угловая скорость *измѣряется* угломъ, на который система поворачивается въ единицу времени. Если секунду принять за единицу времени, то угловая скорость вращенія земли равна

$$\theta = \frac{2\pi}{24.60.60} = 0{,}0000764.$$

формула (37) даетъ

$$v = r\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Точка, находящаяся на единицѣ разстоянія отъ оси ($r = 1$), обладаетъ скоростью v_1, которая численно равна a, см. (37). Теперь (41) даетъ

$$\theta = v_1$$

Угловая скорость *измѣряется* также скоростью точки, находящейся на единицѣ разстоянія отъ оси вращенія.

Угловая скорость, смотря по направленію вращенія, можетъ быть положительная или отрицательная.

При неравномѣрномъ вращеніи, когда $\varphi = F(t)$, см. (33), средняя угловая скорость $\theta_m = \frac{\varphi}{t}$; средняя угловая скорость за малый промежутокъ времени Δt, въ теченіе котораго система повернулась на малый уголъ $\Delta\varphi$, равна $\theta_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Предѣлъ этой величины, т. е.

$$\theta = \text{пред. } \theta_m = \text{пред. } \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = F'(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

называется угловою скоростью въ данный моментъ. Мы видимъ, что угловая скорость есть производная угла поворота φ по времени. Если напр., $\varphi = bt^3 - ct^2$, то $\theta = 3bt^2 - 2ct$.

Точка, находящаяся на разстояніи r отъ оси, проходитъ во время Δt путь $\Delta s = r\Delta\varphi$. Слѣд. его скорость v равна

$$v = \text{пред. } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{пред. } \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r \text{ пред. } \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

или

$$v = r\theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

При $r = 1$ имѣемъ, какъ и выше, $\theta = v_1$.

Равноперемѣннымъ вращеніемъ называется такое, при которомъ угловая скорость θ въ одинаковые промежутки времени мѣняется на одну и ту же, положительную или отрицательную, величину. Въ этомъ случаѣ θ вида

$$\theta = \theta_0 + bt.$$

Угловымъ ускореніемъ ϑ называется величина (sui generis), пропорціональная угловой скорости θ, пріобрѣтенной въ данное время t и обратно пропорціональная времени t, потребнаго для пріобрѣтенія данной угловой скорости θ.

Такимъ образомъ вообще $\vartheta = C\frac{\theta}{t}$. Полагая $C = 1$, мы должны за единицу углового ускоренія принять угловое ускореніе такого движенія, при которомъ въ единицу времени пріобрѣтается единица угловой скорости. Въ этомъ случаѣ

$$\vartheta = \frac{\theta}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

Въ общемъ случаѣ угловая скорость θ есть нѣкоторая функція $\theta = f(t)$. Понятіе объ угловомъ ускореніи въ данный моментъ получается слѣдующимъ образомъ. Если въ теченіе времени t была пріобрѣтена угловая скорость θ, то $\vartheta_m = \frac{\theta}{t}$ представляетъ среднее угловое ускореніе, а предѣлъ средняго углового ускоренія за безконечно малый промежутокъ времени и есть угловое ускореніе ϑ въ данный моментъ:

$$\vartheta = \text{пред. } \vartheta_m = \text{пред. } \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = f'(t) \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

Угловое ускореніе есть производная угловой скорости по времени. Его знакъ зависитъ отъ знака величины $\Delta\theta$.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Сила.

§ 1. Опредѣленіе термина „сила“. На стр. 48 мы указали на одно изъ свойствъ матеріальной точки, на ея способность подвергаться воздѣйствію остального міра. Такимъ же свойствомъ обладаетъ и система матеріальныхъ точекъ, а слѣд. и физическое тѣло. Если это воздѣйствіе такого рода, что оно можетъ имѣть послѣдствіемъ измѣненіе скорости по величинѣ или по направленію, вообще появленіе ускоренія, то мы говоримъ, что на тѣло дѣйствуетъ сила. О присутствіи силы можно судить не только по вызванному ею ускоренію въ движеніи тѣла, но и по той внѣшней обстановкѣ, которая окружаетъ это тѣло и при которой, какъ показали прежнія наблюденія, тѣло подвергается дѣйствію силы. Эта обстановка иногда такова, что мы по ея измѣненію можемъ судить о томъ, во сколько разъ увеличилась или уменьшилась сила, дѣйствующая на тѣло. Положимъ, что черезъ неподвижный блокъ перекинута нить, къ концамъ которой прикрѣплены вполнѣ одинаковыя тѣла A и B. Если къ тѣлу B прицѣпить тѣло C, то тѣло A пріобрѣтаетъ ускореніе, на него дѣйствуетъ сила. Ясно, что если къ B прицѣпить два, три и т. д. вполнѣ одинаковыхъ тѣла C, то сила, дѣйствующая на A, увеличится въ два, три и т. д. раза.

Если за веревку, прикрѣпленную къ какому-либо тѣлу A, будутъ тянуть два, три работника или двѣ, три лошади, то сила, дѣйствующая на тѣло A удвоится и утроится, если можно считать силы отдѣльныхъ рабочихъ или лошадей вполнѣ между собою равными. Если къ желѣзу приблизить магнитъ, то на желѣзо будетъ дѣйствовать сила, которая удвоится, если одновременно приблизить два магнита (пренебрегаемъ второстепенными обстоятельствами).

Такимъ образомъ получается представленіе о силѣ, какъ о величинѣ и является возможность сравнивать между собою различныя силы и выбрать какую-либо единицу силы. Замѣтимъ уже теперь, что второй законъ движенія, о которомъ будетъ сказано ниже, только и имѣетъ смыслъ закона (а не опредѣленія термина «сила»), если допустить возможность сравненія силъ независимо отъ сравненія вызванныхъ ими дѣйствій.

§ 2. Инерція. Три основныхъ закона движенія были впервые формулированы Ньютономъ въ его «Principia Philosophiae Naturalis» въ отдѣлѣ Axiomata sive leges motus». Мы по порядку разберемъ эти три закона.

Первый законъ движенія (законъ инерціи или косности) формулированъ Ньютономъ такимъ образомъ: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statuum suum mutare.

Т.-е.: Всякое тѣло сохраняетъ состояніе покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія, пока дѣйствіе силъ не заставитъ его измѣнить своего состоянія (движенія). Этотъ законъ, выражающій особое свойство матеріи, называемое инерціей или косностью, былъ открытъ Галилеемъ. Онъ говоритъ, что тѣло, предоставленное самому себѣ, т.-е. не подверженное силамъ, движется прямолинейно и съ постоянною скоростью или остается въ покоѣ.

Законъ инерціи представляетъ непреодолимое затрудненіе уразумѣнію, если постараться вникнуть глубже въ его внутренній смыслъ. Въ немъ говорится о прямой линіи; но непонятно, къ какимъ координатнымъ осямъ слѣдуетъ отнести прямую, по которой стало бы двигаться тѣло, не подверженное абсолютно никакимъ силамъ. Весьма интересныя подробности по этому вопросу, о которомъ писали Ньютонъ, Эйлеръ, Кантъ, Махъ, К. Нейманъ и друг., можно найти въ книгѣ H. Streintz'a «Die physicalischen Grundlagen der Mechanik», Leipzig 1883.

§ 3. Второй законъ движенія. Законъ инерціи не можетъ быть провѣренъ опытомъ; мы доходимъ до его познанія на основаніи того, что для всякаго измѣненія скорости потребна наличность силы, съ уменьшеніемъ которой уменьшается и измѣненіе скорости. На вопросъ о связи между силою и ускореніемъ отвѣчаетъ

Законъ II движенія: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.

Т.-е. измѣненіе движенія пропорціонально приложенной движущей силѣ и имѣетъ одинаковое съ нею направленіе. Подъ измѣненіемъ движенія слѣдуетъ подразумѣвать измѣненіе скорости. Слова «vis motrix» слѣдуетъ понимать въ особомъ смыслѣ, недостаточно выраженномъ терминомъ «движущая сила». Въ формулировкѣ Ньютономъ второго закона вовсе не упоминается время: само собою разумѣется, что сила вызоветъ тѣмъ бóльшее измѣненіе скорости, чѣмъ дольше она дѣйствовала. Отсюда слѣдуетъ, что измѣненіе скорости пропорціонально силѣ и времени, въ теченіе котораго она дѣйствовала.

Раздѣлимъ время на весьма малыя части Δt; пусть f есть сила, дѣйствовавшая въ теченіе времени Δt и пусть скорость v точки пріобрѣла въ это же время геометрическое приращеніе (см. стр. 54) $\overline{\Delta v}$. Смыслъ второго закона тотъ, что геометрическое приращеніе $\overline{\Delta v}$ скорости пропорціонально силѣ f и времени Δt и имѣетъ направленіе силы f. Итакъ $\overline{\Delta v} = kf\Delta t$ или наоборотъ

$$f\Delta t = c\overline{\Delta v}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ k и $c = \frac{1}{k}$ коэффиціенты пропорціональности.

Первое слѣдствіе изъ закона II. (Законъ независимости дѣйствія силы отъ состоянія тѣла и присутствія другихъ силъ). Второй законъ, указывая отъ какихъ величинъ зависитъ приращеніе скорости, въ то же время обладаетъ и т. ск. отрицательною стороною.

Исчерпывая вопросъ о томъ, отъ чего зависитъ величина $\overline{\Delta v}$ для даннаго тѣла, этотъ законъ указываетъ на независимость величины $\overline{\Delta v}$ отъ состоянія движенія самаго тѣла и отъ присутствія другихъ силъ. Итакъ сила f вызоветъ во время Δt одинаковое геометрическое приращеніе $\overline{\Delta v}$ скорости, находится ли само тѣло въ покоѣ или въ произвольномъ состояніи движенія и будетъ ли сила f единственная сила или кромѣ нея дѣйствуютъ еще другія силы. Этотъ законъ независимости дѣйствія силъ можно разсматривать и какъ отдѣльный законъ.

Второе слѣдствіе изъ закона II. Формула (1) строго вѣрна только для силы, не мѣняющейся въ теченіе времени Δt. Для случая непрерывно мѣняющейся силы, мы можемъ ввести понятіе о средней силѣ f_m за время Δt

$$f_m = c\,\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и затѣмъ понятіе о силѣ, дѣйствующей въ данный моментъ времени, какъ о предѣлѣ средней силы (2)

$$f = c \text{ пред. } \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}.$$

Первая изъ формулъ (31) стр. (60) даетъ

$$f = cw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Истинное ускореніе w имѣетъ, какъ и f, направленіе геометрическаго приращенія скорости.

Сила въ каждый данный моментъ пропорціональна вызванному ею ускоренію и имѣетъ одиноковое съ нимъ направленіе.

§ 4. Масса. Единица силы. Плотность. Формулы (1) и (3), содержащія коеффиціентъ c, относятся къ данному опредѣленному тѣлу. Опытъ и наблюденіе показываютъ, что различныя тѣла при вполнѣ одинаковой обстановкѣ, т.-е. когда мы можемъ быть увѣрены, что на нихъ дѣйствуютъ одинаковыя силы, движутся съ различными ускореніями. Это показываетъ что для разныхъ тѣлъ коеффиціентъ c различный; онъ зависитъ отъ индивидуальнаго особаго свойства тѣла, называемаго его инертностью или его массою. Мы говоримъ, что тѣла обладаютъ одинаковою инертностью или массою, если они подъ вліяніемъ одной и той же силы движутся съ одинаковымъ ускореніемъ. Одно тѣло обладаетъ въ 2, 3, 4 и т. д., вообще въ n разъ бо́льшею инертностью или массою, чѣмъ другое, если необходима сила въ 2, 3, 4 и т. д., вообще въ n разъ бо́льшая, чѣмъ для второго тѣла, чтобы обоимъ тѣламъ придать одинаковыя ускоренія или если одна и та же сила придаетъ первому тѣлу въ 2, 3, 4 и т. д., вообще въ n разъ меньшее ускореніе, чѣмъ второму. Опредѣляя силы, необходимыя, чтобы придать различнымъ тѣламъ одно и то же ускореніе или наблюдая ускоренія, пріобрѣтаемыя различными тѣлами подъ вліяніемъ одной и той же

силы, мы можемъ сравнить между собою инертности или массы различныхъ тѣлъ. Массу какого-либо опредѣленнаго тѣла A мы можемъ выбрать за единицу массы. Обозначая численное значеніе массы какого-либо другаго тѣла черезъ m, мы видимъ, что сила f, долженствующая придать этому тѣлу ускореніе w, должна быть пропорціональна числу m и числу w, такъ что можно положить

$$f = Cmw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Въ эту формулу входятъ сила, масса и ускореніе, изъ которыхъ каждая можетъ быть измѣрена своею, вполнѣ произвольною единицей. Коеффиціентъ пропорціональности C равенъ числу единицъ силы, потребныхъ, чтобы единицѣ массы придать единицу ускоренія (при $m = 1$ и $w = 1$ имѣемъ $f = C$).

Если мы положимъ $C = 1$, т.-е. напишемъ формулу (4) въ видѣ

$$f = mw, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

то произвольно могутъ быть выбраны уже только двѣ изъ трехъ единицъ силы, массы и ускоренія. Выбравъ произвольно, напр., единицы массы и ускоренія, мы за единицу силы уже непремѣнно должны выбрать силу, которая, дѣйствуя на единицу массы, придаетъ ей единицу ускоренія. Можно однако поступить и иначе, а именно произвольно выбрать единицы ускоренія и силы; въ этомъ случаѣ за единицу массы придется принять массу тѣла, которое подъ вліяніемъ единицы силы пріобрѣтаетъ единицу ускоренія. Единицы массы получили различныя названія. Одна изъ важнѣйшихъ единицъ массы получила названіе граммъ; по первоначальному опредѣленію, это масса кубическаго сантиметра чистой воды при 4°*C*. Русскія единицы массы суть пудъ, фунтъ, лотъ, золотникъ и т. д. Ихъ не слѣдуетъ смѣшивать съ единицами вѣса, о которыхъ будетъ сказано ниже и которыя имѣютъ тѣ же наименованія.

Можно приготовить тѣла произвольной формы изъ желѣза, мѣди, алюминія, платины или кварца, масса которыхъ равнялась бы одной изъ принятыхъ единицъ массы или опредѣленной его части или его кратному. Такія эталоны или прототипы массы называются гирями или разновѣсками; послѣднее названіе неправильное, ибо гири суть именно эталоны массы, а не вѣса. Въ Парижѣ хранится эталонъ изъ платины, масса котораго называется килограммомъ; тысячная доля этой массы въ настоящее время принимается за единицу массы подъ названіемъ граммъ; оказывается, что эта единица не вполнѣ отвѣчаетъ вышеприведенному теоретическому опредѣленію и что кубическій сантиметръ чистой воды при 4° Ц. обладаетъ массою, нѣсколько большею одного грамма. Масса однороднаго тѣла пропорціональна его объему.

Для тѣлъ однородныхъ можно говорить о «количествѣ матеріи» и понятно, что количества матеріи, содержащіяся въ тѣлахъ однородныхъ, пропорціональны объемамъ, занимаемымъ этими тѣлами. Отсюда слѣдуетъ, что массы однородныхъ тѣлъ (т. е. тѣлъ, состоящихъ изъ одной и той же матеріи) пропорціональны количествамъ содержащейся въ ней матеріи.

Если за единицу количества матерiи принять то количество, которое содержится въ тѣлѣ, масса котораго единица, то получается результатъ: масса или инертность однородныхъ тѣлъ измѣряется количествомъ содержащейся въ нихъ матерiи.

Для тѣлъ разнородныхъ не можетъ быть и рѣчи о сравненiи количества матерiи, въ нихъ содержащейся. Имѣя дѣло съ тѣлами, изъ которыхъ одно состоитъ изъ мѣди, другое изъ стекла, или одно изъ ртути, другое изъ водорода, мы, очевидно, даже и представить себѣ не можемъ, что а priori слѣдуетъ понимать подъ словами «равныя или неравныя количества разнородныхъ матерiй». Но отъ насъ зависитъ ввести этотъ терминъ, давъ ему научное опредѣленiе. Итакъ, условимся называть равными такiя количества разнородныхъ матерiй, которыя обладаютъ одинаковою массою, т.-е. которыя подъ влiянiемъ одинаковыхъ силъ движутся съ одинаковымъ ускоренiемъ. Вводя такое, чисто условное понятiе о равныхъ количествахъ матерiй и выбирая единицу количества матерiи, какъ было сказано выше, мы получаемъ въ обобщенномъ видѣ соотношенiе между массою и количествомъ матерiи, а именно: масса тѣла измѣряется количествомъ содержащейся въ немъ матерiи. Изъ вышеизложеннаго явствуетъ, что первоначальное опредѣленiе термина «масса», какъ количество матерiи, не можетъ быть допущено, ибо, какъ было сказано, для разнородныхъ матерiй самое представленiе о равныхъ или неравныхъ количествахъ матерiи а priori отсутствуетъ.

Въ § 10 отдѣла I, стр. 35—36, мы познакомились съ принципомъ сохраненiя матерiи. Теперь можемъ добавить, что было бы правильнѣе назвать его принципомъ сохраненiя массъ, ибо то, что остается неизмѣннымъ при всѣхъ физическихъ и химическихъ явленiяхъ, есть масса тѣлъ, принимающихъ участiе въ этихъ явленiяхъ.

Масса m однороднаго тѣла зависитъ отъ его объема v и, кромѣ того, еще отъ рода матерiи, изъ которой оно состоитъ. Это указываетъ на существованiе особаго свойства, различнаго для матерiй различнаго рода, опредѣляющаго массу тѣла, помимо занимаемаго имъ объема. Это свойство характеризуется величиною особаго рода, которую мы назовемъ плотностью и которую мы полагаемъ пропорцiональною массѣ m тѣла, при данномъ объемѣ v и обратно пропорцiональною объему v, занимаемому данною массою m. За единицу плотности мы можемъ принять плотность какой-либо матерiи (напримѣръ: воды, ртути, воздуха, водорода). Численное значенiе δ плотности выразится формулою

$$\delta = C\frac{m}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

гдѣ C множитель пропорцiональности. Принимая $C = 1$, т.-е. полагая

$$\delta = \frac{m}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

или

$$m = \delta v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

мы за единицу плотности уже непремѣнно должны принять плотность такой матеріи, единица объема которой содержитъ единицу массы.

Принявъ граммъ и кубическій сантиметръ за единицы массы и объема, мы за единицу плотности должны принять плотность воды при такой температурѣ, при которой кубическій ея сантиметръ обладаетъ массою, равною одному грамму.

Форм. (8) показываетъ, что при $v = 1$ масса $m = \delta$; отсюда слѣдуетъ, что плотность однородной матеріи измѣряется (стр. 23) массою, содержащеюся въ единицѣ ея объема. Для неоднородныхъ тѣлъ величина

$$\delta_m = \frac{m}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

опредѣляетъ среднюю плотность. Если дана средняя плотность δ_m, то масса тѣла находится по формулѣ

$$m = v\delta_m. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Предѣлъ средней плотности безконечно малаго объема Δv, содержащаго массу Δm, называется плотностью δ въ данной точкѣ:

$$\delta = \text{пред.}\ \frac{\Delta m}{\Delta v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Въ теоретическихъ вопросахъ физики мы почти всегда будемъ имѣть дѣло съ плотностью, опредѣленной формулами (7), (9) и (11), т.-е. измѣряемой массой единицы объема. Ее не слѣдуетъ смѣшивать съ тою плотностью, о которой уже въ отдѣлѣ первомъ (стр. 30) было говорено и которая измѣряется вѣсомъ единицы объема.

§ 5. Давленіе. Въ предыдущемъ параграфѣ мы познакомились съ силою, какъ причиною появленія геометрическаго приращенія $\overline{\Delta v}$ скорости, а затѣмъ и ускоренія w. Формула (5) дала намъ возможность установить и единицу силы; сравненіе или измѣреніе силъ мы при этомъ основывали на сравненіи вызванныхъ ими ускореній. Такое измѣреніе силъ называется динамическимъ. Встрѣчаются, однако, весьма часто случаи, когда на нѣкоторое тѣло A несомнѣнно дѣйствуетъ одна опредѣленная сила, а между тѣмъ это тѣло остается въ покоѣ вслѣдствіе того, что оно касается другого тѣла B, мѣшающаго ему пріобрѣсти ту скорость $\overline{\Delta v}$, которая опредѣляется величиною f силы, продолжительностью Δt ея дѣйствія и массою m самаго тѣла A и которая дѣйствительно проявляется, если устранить тѣло B. Опытъ показываетъ, что въ этомъ случаѣ тѣло A производитъ давленіе на тѣло B. На стр. 11 мы указали на давленіе, какъ на понятіе первоначальное, извѣстное намъ изъ ежедневаго опыта (ощущеніе мышечнаго напряженія). Мы говоримъ въ этомъ случаѣ, что сила уничтожается сопротивленіемъ тѣла B, на которое тѣло A производитъ давленіе. Оставляя пока въ сторонѣ вопросъ о механизмѣ этого уничтоженія, мы на основаніи наблюденій можемъ сказать, что давленія пропорціональны уничтоженнымъ силамъ. Принимая за единицу давленія то, которое испытываетъ тѣло B,

когда на тѣло A дѣйствуетъ единица силы, мы въ разсматриваемомъ случаѣ получимъ равенство численныхъ значенiй давленiя и силы. Обозначая ихъ одинаковою буквою, мы можемъ сказать, что формула (5), $f=mw$, даетъ намъ численное значенiе давленiя тѣла A на тѣло B. Сила и вызванное ею давленiе имѣютъ, при такомъ выборѣ единицъ, одинаковыя численныя значенiя, а потому измѣренiе силъ можетъ быть произведено путемъ сравненiя вызванныхъ ими давленiй. Такое измѣренiе силъ называется статическимъ.

§ 6. Вѣсъ. На всякое тѣло, находящееся на земной поверхности, дѣйствуетъ сила, направленная (приблизительно) къ центру земли. Плоскость, перпендикулярная къ направленiю этой силы, называется горизонтальною. Эта сила называется вѣсомъ тѣла; мы обозначимъ ее черезъ p. Такъ какъ вѣсъ есть частный случай силы, то ясно, что единица вѣса тожественна съ единицею силы. Тѣла, не опирающiяся на другiя тѣла, движутся (падаютъ) въ безвоздушномъ пространствѣ подъ влiянiемъ собственнаго вѣса или, какъ эту силу еще принято называть, подъ влiянiемъ «силы тяжести», съ ускоренiемъ, которое мы обозначимъ черезъ g. Общая формула (5) принимаетъ въ этомъ частномъ случаѣ видъ

$$p=mg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Опыты показываютъ, что g величина постоянная для всѣхъ тѣлъ. Отсюда слѣдуетъ, что сила тяжести, дѣйствующая на тѣла, т.-е. ихъ вѣсъ, есть сила, обладающая тою спецiальною особенностью, что она сама пропорцiональна массѣ тѣла. Мы видѣли, однако, что сила можетъ быть измѣрена тѣмъ давленiемъ, которое, подъ ея влiянiемъ, тѣло производитъ на другое тѣло, служащее ему опорою. Отсюда слѣдуетъ, что давленiе, производимое на земной поверхности тѣломъ на другое тѣло, находящееся подъ нимъ, можетъ служить мѣрою его вѣса. Если же, какъ выше было условлено, за единицу давленiя принять давленiе тѣла, на которое дѣйствуетъ единица силы, т.-е. тѣла, обладающаго единицею вѣса, то давленiе дѣлается численно равнымъ вѣсу. Вотъ почему подъ «вѣсомъ» можно понимать давленiе, производимое спокойно лежащимъ тѣломъ. Взвѣшиванiемъ называется манипуляцiя сравненiя давленiй тѣлъ на горизонтальную опору. Изъ вышеизложеннаго явствуетъ, что взвѣшиванiе даетъ отношенiе массъ тѣлъ и что разнородныя тѣла, обладающiя одинаковымъ вѣсомъ, обладаютъ одинаковою массою.

Помимо вышеуказаннаго динамическаго способа сравненiя массъ разнородныхъ тѣлъ, мы нашли такимъ образомъ еще способъ статическаго ихъ сравненiя.

Въ формулѣ (12) g имѣетъ опредѣленное численное значенiе, зависящее отъ избранной нами единицы ускоренiя. На стр. 67 было сказано, что пользуясь формулою (5), а слѣд. и частнымъ ея видомъ (12), мы можемъ произвольно выбрать, напр., единицы ускоренiя и массы, или ускоренiя и силы. (12) даетъ, что при $m=1$ вѣсъ $p=g$, т.-е. что тѣло, обладающее

единицею массы имѣетъ g единицъ вѣса. Выбравъ произвольно единицу массы, мы за единицу вѣса (и вообще силы) должны принять вѣсъ тѣла, обладающаго $\frac{1}{g}$ единицы массы. Если, напр., одну изъ массъ: граммъ, фунтъ золотникъ (стр. 67) и т. д. принять за единицу массы, то единица вѣса (и силы) будетъ вѣсъ $\frac{1}{g}$-ой доли грамма, фунта, золотника и т. д.

Форм. (12) даетъ, далѣе, что при $p = 1$ масса $m = \frac{1}{g}$, т. е. тѣло, вѣсъ котораго равенъ единицѣ вѣса или силы, обладаетъ $\frac{1}{g}$-ой долею единицы массы. Выбравъ произвольно единицу вѣса, мы за единицу массы должны принять массу тѣла, обладающаго g единицами вѣса. Подъ названіемъ граммъ, фунтъ, золотникъ и т. д. иногда понимають вѣса кубическаго сантиметра чистой воды (см. стр. 67) и тѣхъ гирь, которыя въ дѣйствительности суть эталоны массы. Принимая граммъ или фунтъ за единицу вѣса (и силы), мы за единицу массы должны принять g граммовъ или g фунтовъ.

Съ понятіями: о плотности однороднаго тѣла, которая измѣряется вѣсомъ единицы объема, о средней плотности и о плотности въ данной точкѣ мы уже познакомились въ отдѣлѣ первомъ стр. 30 и 31.

§ 7 Третій законъ движенія былъ Ньютономъ формулированъ такимъ образомъ: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Т. е. дѣйствіе и противодѣйствіе всегда равны по величинѣ и противоположны (по направленію); или дѣйствія двухъ тѣлъ другъ на друга всегда равны и направлены въ противоположныя стороны.

Когда два тѣла A и B дѣйствуютъ другъ на друга, то двѣ силы, которыя вслѣдствіе этого вліяютъ на эти тѣла, равны между собою и направлены въ противоположныя стороны.

Слѣдуетъ отличать два случая взаимодѣйствія тѣлъ.

1. Тѣла соприкасаются и производятъ давленіе другъ на друга. Всякое давленіе на физическое тѣло непремѣнно вызываетъ измѣненіе его формы напр. уменьшеніе объема; въ этомъ случаѣ частицы тѣла стремятся возвратиться къ начальному расположенію, т.-е. къ возстановленію измѣненной формы тѣла. Въ этомъ стремленіи и заключается источникъ реакціи или контръ-давленія тѣла, подверженнаго давленію. Измѣненіе формы происходитъ и для давящаго тѣла, на которое непосредственно дѣйствуетъ данная сила f. Въ результатѣ каждое изъ двухъ соприкасающихся тѣлъ давитъ на другое и вотъ эти то два давленія равны по величинѣ и противоположны по направленію.

Если грузъ A давитъ на горизонтальную поверхность тѣла B съ нѣкоторою силою f, то стремленіе тѣла B возстановить форму (напр., уничтожить образовавшуюся вогнутость) является источникомъ давленія этого тѣла (снизу вверхъ) на тѣло A, также равнаго f. Если тѣло A виситъ на снуркѣ B, то послѣдній натягивается съ нѣкоторою силою, равною вѣсу

тѣла A; съ такою же силою дѣйствуетъ растянутый снурокъ B, стремясь сократиться до первоначальной длины, на тѣло A. Если газъ заключенъ въ сосудѣ, то, вслѣдствіе своего стремленія расшириться, онъ производитъ на стѣнку сосуда нѣкоторое давленіе f на каждую единицу ея поверхности. Подъ вліяніемъ этого давленія сосудъ нѣсколько расширится и его стремленіе возстановить форму выразится давленіемъ f на единицу поверхности газа.

2. Тѣла не соприкасаются, но присутствіе тѣла A въ опредѣленномъ мѣстѣ пространства должно быть разсматриваемо какъ причина появленія силы f, дѣйствующей на тѣло B. Наблюденія убѣждаютъ насъ, что во всѣхъ подобныхъ случаяхъ присутствіе B въ занимаемомъ имъ мѣстѣ является причиною возникновенія силы, дѣйствующей на тѣло A, по величинѣ равной f, но имѣющей противоположное съ f направленіе. Это относится ко всѣмъ тѣмъ случаямъ взаимодѣйствія, для которыхъ роль промежуточной среды, передающей воздѣйствіе отъ одного тѣла къ другому, еще не выяснена, къ явленіямъ всемірнаго тяготѣнія, электрическимъ и магнитнымъ.

Сила, съ которою земля притягиваетъ камень или луну, равна силѣ, съ которой земля, въ то-же время и по направленію противоположному, притягивается камнемъ или луною. Тоже самое относится и къ взаимодѣйствію тѣлъ наэлекризованныхъ и намагниченныхъ, къ взаимодѣйствію тѣлъ, черезъ которыя проходятъ электрическіе токи и, наконецъ, къ взаимодѣйствію токовъ и магнитовъ.

Изъ третьяго закона движенія получается, какъ слѣдствіе: если взаимодѣйствующія тѣла свободны и каждый изъ нихъ находится только подъ вліяніемъ другого, то они движутся съ ускореніями, обратно пропорціональными ихъ массамъ.

§ 8. Импульсъ силы и количество движенія. Третье слѣдствіе изъ закона II движенія. Положимъ, что сила f, постоянная по величинѣ и по направленію, дѣйствуетъ на тѣло A въ теченіе нѣкотораго времени t. Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что тѣло A подверглось импульсу силы. Импульсъ силы есть величина особаго рода (sui generis), которую мы принимаемъ пропорціональною силѣ f и пропорціональною времени t. За единицу импульса K можно принять импульсъ какой-либо произвольной силы, дѣйствовавшей въ теченіе произвольнаго времени. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ вообще $K = Cft$. Принимая $C = 1$, т.-е. полагая

$$K = ft, \qquad (13)$$

мы за единицу импульса должны принять импульсъ единицы силы, дѣйствовавшей въ теченіе единицы времени.

Если сила мѣняется по величинѣ и по направленію, то мы раздѣлимъ время t, въ теченіе котораго она дѣйствовала, на весьма большое число весьма малыхъ частей Δt. Съ погрѣшностью, которая уменьшается съ увеличеніемъ числа частей, на которыя мы раздѣлили время t, т.-е. съ уменьшеніемъ Δt, мы можемъ силу f считать постоянною въ теченіе

каждаго изъ малыхъ промежутковъ времени Δt. Импульсъ за время Δt, т.-е. величину $f\Delta t$ мы будемъ называть элементарнымъ импульсомъ. Обозначимъ его символически черезъ ΔK, такъ что

$$\Delta K = f\Delta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Предѣлъ, къ которому стремится алгебраическая сумма величинъ $\Delta K = f\Delta t$ при безконечномъ возростаніи числа частей Δt, мы назовемъ импульсомъ K перемѣнной силы за время t. Символически это можетъ быть обозначено такимъ образомъ

$$K = \text{пред.} \sum \Delta K = \text{пред.} \sum f\Delta t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Введемъ еще новую величину sui generis, которую назовемъ количествомъ движенія. Мы принимаемъ эту величину пропорціональною массѣ m и пропорціональною скорости v тѣла. За единицу количества движенія мы можемъ принять количество движенія любой массы, движущейся съ любою скоростью. Въ этомъ случаѣ численное значеніе L количества движенія массы m, обладающей скоростью v, выразится формулою $L = Cmv$. Принимая $C = 1$, мы за единицу количества движенія должны принять количество движенія единицы массы, движущейся съ единицею скорости. Въ этомъ случаѣ

$$L = mv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Величина L есть векторъ (стр. 41), имѣющій направленіе скорости v. Если скорость v получаетъ геометрическое приращеніе $\overline{\Delta v}$, то количество движенія пріобрѣтаетъ также геометрическое приращеніе

$$\overline{\Delta L} = m\overline{\Delta v} \;, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

имѣющее направленіе скорости $\overline{\Delta v}$. Новое значеніе количества движенія изобразится діагональю параллелограмма, построеннаго на L и $\overline{\Delta L}$.

Обратимся ко второму закону движенія, выраженнаго формулою (1) стр. 65, изъ которой мы вывели (3). Если формулу (5) сравнить съ форм. (3), то становится яснымъ, что коеффиціентъ $c = m$, массѣ тѣла. Поэтому (1) можно написать въ видѣ

$$f\Delta t = m\overline{\Delta v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Сравнивая теперь (18) съ (14) и (17), мы видимъ, что первую изъ этихъ формулъ можно написать въ видѣ

$$\Delta K = \overline{\Delta L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

и что второй законъ движенія приводитъ къ такой новой формулировкѣ:

Элементарный импульсъ силы измѣряется геометрическимъ приращеніемъ количества движенія.

Взявъ алгебраическую сумму выраженій величинъ $f\Delta t$ и $m\overline{\Delta v}$, входящихъ въ (18) и принимая во вниманіе (15) и (17), мы получимъ

$$K = \text{пред.} \sum f\Delta t = \text{пред.} \sum m\overline{\Delta v} = \text{пред.} \sum \overline{\Delta L} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

т.-е. импульсъ силы за произвольный промежутокъ времени измѣряется алгебраической суммой геометрическихъ приращеній количества движенія.

Эта теорема упрощается въ двухъ частныхъ случаяхъ.

1. Движеніе прямолинейное; сила имѣетъ направленіе движенія. Въ этомъ случаѣ $\overline{\Delta v}$ равно алгебраическому приращенію Δv скорости; но сумма алгебраическихъ приращеній величины есть не что иное, какъ полное приращеніе этой величины, т.-е. разность между его новымъ значеніемъ и старымъ. Если скорость во время t измѣнилась отъ v_1 до v_2, то (20) даетъ

$$K = \text{пред.} \sum f\Delta t = mv_2 - mv_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Въ случаѣ прямолинейнаго движенія импульсъ силы за произвольный промежутокъ времени измѣряется алгебраическимъ приращеніемъ количества движенія.

2. Сила имѣетъ постоянное направленіе. Въ этомъ случаѣ всѣ геометрическія приращенія $\overline{\Delta v}$ имѣютъ одно и то же направленіе и ихъ сумма очевидно не что иное, какъ полное геометрическое приращеніе скорости.

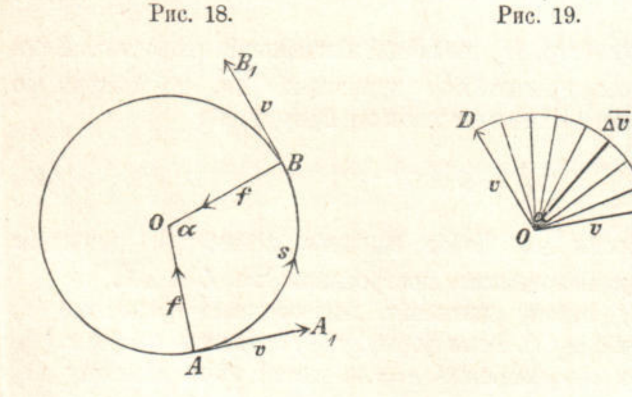


Рис. 18. Рис. 19.

Когда сила имѣетъ постоянное направленіе, хотя бы и составляющее перемѣнный уголъ съ направленіемъ движенія, то импульсъ силы за произвольный промежутокъ времени измѣряется геометрическимъ приращеніемъ количества движенія за тотъ же промежутокъ времени.

Для общаго случая силы, не имѣющей постояннаго направленія, такое упрощеніе не имѣетъ мѣста, такъ какъ алгебраическая сумма геометрическихъ приращеній очевидно неравна полному геометрическому приращенію.

Провѣримъ формулу (21) для случая прямолинейнаго равноускореннаго движенія, для котораго ускореніе w, а слѣд. и сила f величина постоянная, а пріобрѣтенная скорость $v_2 - v_1 = wt$. Общая формула $f = mw$ даетъ въ этомъ случаѣ $ft = mwt = mv_2 - mv_1$.

Пробѣримъ, далѣе, общую формулу (20) для случая равномѣрнаго со скоростью v движенія по окружности, радіусъ которой R. Вычислимъ сперва полный импульсъ силъ для времени t, въ теченіе котораго точка пробѣгаетъ дугу $AB = s = R\alpha$ (рис. 18), гдѣ $\alpha = \angle AOB$. При равномѣрномъ движеніи по окружности ускореніе w опредѣляется формулою (30) стр. 58 т.-е. $w = \frac{v^2}{R}$; оно направлено къ центру. Отсюда слѣдуетъ, что и сила f постоянно направлена по радіусу къ центру и по величинѣ равна

$$f = \frac{mv^2}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Весь импульсъ равенъ $ft = \frac{mv^2t}{R}$. Введемъ, вмѣсто времени, уголъ α: изъ $R\alpha = s$ слѣдуетъ $\alpha = \frac{s}{R} = \frac{vt}{R}$. Слѣд. импульсъ

$$K = \text{пред.} \sum f\Delta t = ft = \frac{mv^2t}{R} = mv\alpha \quad \ldots \ldots \quad (22{,}a)$$

Чтобы найти пред. $\sum m\overline{\Delta v}$, т.-е. алгебраическую сумму геометрическихъ приращеній количества движенія, проведемъ изъ произвольной точки O (рис. 19) линіи OC и OD, равныя и параллельныя $AA_1 = BB_1 = v$, а также множество промежуточныхъ линій, равныхъ и параллельныхъ скоростямъ v точки при ея движеніи по дугѣ AB. Очевидно $\angle COD = \angle AOB = \alpha$. Концы прямыхъ, проведенныхъ изъ точки O, расположены по дугѣ окружности; элементы этой дуги не что иное, какъ геометрическія приращенія $\overline{\Delta v}$ скорости (см. стр. 54). Алгебраическая сумма этихъ приращеній равна дугѣ CD, т.-е. $v\alpha$, а потому алгебраическая сумма геометрическихъ приращеній количества движенія

$$\text{пред.} \sum \Delta L = \text{пред.} \sum m\overline{\Delta v} = mv\alpha \quad \ldots \ldots \quad (22{,}b)$$

(22,a) и (22,b) подтверждаютъ справедливость формулы (20) для разсматриваемаго случая. Для полнаго оборота точки по окружности получаемъ импульсъ $K = 2\pi mv$.

§ 9. Мгновенныя силы. Мгновенною называется сила, дѣйствіе которой продолжается столь малый промежутокъ времени τ, что лишь при исключительной обстановкѣ, т.-е. при помощи особыхъ, сложныхъ инструментовъ можетъ быть наблюдаемо дѣйствіе этой силы въ различные моменты времени τ, въ теченіе котораго сила f, иногда мѣняясь по направленію, непрерывно мѣняется по величинѣ, начиная отъ нуля въ началѣ времени τ и кончая опять нулемъ, въ концѣ этого времени. Такого рода силы проявляются при соудареніи тѣлъ, при дѣйствіи мгновеннаго (напр. индукціоннаго) тока на магнитную стрѣлку и т. д. Сила f, мѣняясь въ теченіе времени τ, вызываетъ ускореніе, также непрерывно мѣняющееся. Но въ виду чрезвычайной кратковременности дѣйствія силы не приходится наблюдать этихъ ускореній, а потому и самыя перемѣнныя значенія силы

f весьма часто вовсе не разсматриваются. Мы можемъ наблюдать скорость, а слѣд. и количество движенія до и послѣ дѣйствія мгновенной силы. Обозначая импульсъ перемѣнной силы f за весь промежутокъ времени τ теперь черезъ F и полагая, что сила f въ теченіе времени τ не мѣняется по направленію, мы можемъ положить F равнымъ полному геометрическому приращенію количества движенія. Импульсъ F весьма часто берется за мѣру дѣйствія мгновенной силы и иногда даже называется «величиною мгновенной силы».

Величина мгновенной силы измѣряется геометрическимъ измѣненіемъ количества движенія тѣла, на которое она дѣйствуетъ.

Если скорость тѣла имѣла въ теченіе времени τ направленіе самой силы f, то «величина» F мгновенной силы измѣряется разностью между количествами движенія тѣла до и послѣ ея дѣйствія, см. (21).

§ 10. C. G. S. система единицъ. Мы видѣли (стр. 20), что если придать коэффиціенту пропорціональности C, входящему въ физическія формулы, выражающія связь между численными значеніями различныхъ физическихъ величинъ, опредѣленное значеніе, напр., $C=1$, то единица одной изъ этихъ величинъ является какъ бы сама собою, если единицы остальныхъ величинъ уже были выбраны. Принимая въ рядѣ физическихъ формулъ, изъ которыхъ каждая слѣдующая содержитъ одну новую величину, не встрѣчавшуюся въ предыдущихъ формулахъ, коэффиціенты пропорціональности равными единицѣ, мы можемъ «построить систему единицъ». Оказывается, что такое построеніе возможно, если произвольно выбрать единицы трехъ величинъ, независимыхъ другъ отъ друга, т.-е. изъ которыхъ одна не опредѣлялась бы двумя другими. Эти три единицы называются основными. Единицы другихъ величинъ, получающіяся путемъ приравненія коэффиціентовъ пропорціональности единицѣ, называются производными единицами; ихъ также называютъ абсолютными единицами, каковой терминъ нельзя впрочемъ признать удачнымъ.

Три основныя единицы можно выбрать весьма различно; такъ напр., существуетъ возможность построить систему абсолютныхъ единицъ на основныхъ единицахъ длины, скорости и силы, или массы, времени и ускоренія и т. д. Остановившись на подобныхъ трехъ основныхъ единицахъ опредѣленнаго рода, мы опять-таки можемъ получить безконечное множество различныхъ системъ единицъ производныхъ, мѣняя абсолютныя величины нашихъ трехъ основныхъ единицъ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что за основныя единицы приняты единицы длины l, массы m и времени t. Особенное вниманіе мы при этомъ обратимъ на случай, когда за единицу длины принятъ сантиметръ (C), за единицу массы — граммъ (G) и за единицу времени — секунда (S). Система абсолютныхъ единицъ, построенная на этихъ трехъ единицахъ длины, массы и времени, называется *C. G. S.* системою, а самыя производныя единицы — *C. G. S.* единицами.

C.G.S. единица поверхности есть квадратный сантиметръ; *C.G.S.* единица объема есть кубическій сантиметръ.

Скорость. Полагая въ формулѣ (3), стр. 50, коэффиціентъ $C=1$, т. е., принимая (4), мы за абсолютную единицу скорости должны принять скорость точки, проходящей единицу длины въ единицу времени. *C. G. S.* единица скорости есть скорость точки, проходящей одинъ сантиметръ въ одну секунду. Свѣтъ пробѣгаетъ въ одну секунду 300,000 километровъ. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\text{скорость свѣта } v = 3.10^{10} \; C.\; G.\; S. \text{ един. скорости} \quad . \; . \; . \quad (23)$$

Ускореніе. Принимая $C=1$ въ (17) стр. (55), т.-е. опредѣляя w формулою (18), мы за абсолютную единицу ускоренія должны принять ускореніе такого движенія, при которомъ скорость въ единицу времени увеличивается на единицу скорости. *C.G.S.* единица ускоренія есть ускореніе такого движенія, при которомъ въ одну секунду скорость увеличивается на *C.G.S.* единицу скорости, т.-е. на сантиметръ въ секунду. При свободномъ паденіи скорость въ одну секунду увеличивается на 981 сантим. въ секунду. Обозначая ускореніе при свободномъ паденіи черезъ g, мы имѣемъ

$$g = 981 \; C.\; G.\; S. \text{ единицѣ ускоренія} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Формула (30), стр. 58, показываетъ, что *C.G.S.* единица ускоренія есть также ускореніе точки, движущейся со скоростью сантиметра въ секунду по окружности, радіусъ которой 1 сантим.

Вращеніе. Абсолютною единицей угловой скорости, см. (40) и (41) стр. 62, обладаетъ тѣло, поворачивающееся на единицу угла ($57^0, 29...$) въ единицу времени. *C. G. S.* единицей угловой скорости обладаетъ тѣло, поворачивающееся на единицу угла въ одну секунду. Угловая скорость вращенія земли равна $\frac{2\pi}{24.60.60} = 0{,}0000764$ *C. G. S.* един. углов. скорости. Абсолютною единицею углового ускоренія, см. (45) стр. 63, обладаетъ тѣло, угловая скорость котораго въ единицу времени увеличивается на абсолютную ея единицу. *C. G. S.* единицею углового ускоренія обладаетъ тѣло, когда его угловая скорость въ одну секунду увеличивается на *C. G. S.* единицу угловой скорости.

Сила. Полагая $C=1$ въ (4) стр. 67, т.-е. принимая (5), мы за абсолютную единицу силы должны принять силу, подъ вліяніемъ которой основная единица массы пріобрѣтаетъ абсолютную единицу ускоренія.

C. G. S. единица силы (слѣд. и вѣса) есть сила, подъ вліяніемъ которой масса граммъ пріобрѣтаетъ *C. G. S.* единицу ускоренія, такъ что его скорость черезъ каждую секунду увеличивается на «сантиметръ въ секунду». Эта сила получила названіе «динъ». Милліонъ диновъ составляютъ мегадинъ. Сравнимъ динъ съ хорошо знакомою намъ французскою единицею силы или вѣса, называемою граммомъ. Для этого сравнимъ дѣйствіе силъ динъ и граммъ на одно и то же тѣло, а именно на такое, которое обладаетъ массою граммъ. Изъ самаго опредѣленія слѣдуетъ, что масса граммъ подъ вліяніемъ силы динъ пріобрѣтаетъ

одну *C. S. G.* единицу ускоренія. Та же масса граммъ подъ вліяніемъ силы граммъ, т. е. подъ вліяніемъ своего вѣса у поверхности земли пріобрѣтаетъ ускореніе $g = 981$ *C. G. S.* единицѣ ускоренія, см. (24). Отсюда слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned} \text{граммъ} &= 981 \text{ дину.} \\ \text{динъ} &= 0{,}00102 \text{ грамма.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Здѣсь нѣтъ надобности прибавлять, что рѣчь идетъ о силѣ, а не о массѣ граммъ, ибо динъ есть сила, а сравнивать между собою можно только величины однородныя. Приблизительно (ошибка $2^0/_0$) можно принять динъ равнымъ миллиграмму. Мегадинъ равенъ 1,02 килограмма.

Плотность. Полагая $C = 1$ въ (6) стр. 68, т.-е., принимая (7), мы за абсолютную единицѣ плотности должны принять плотность тѣла, содержащаго единицу массы въ единицу объема. *C. G. S.* единица плотности есть плотность тѣла, содержащаго массу граммъ въ одномъ кубическомъ сантиметрѣ. Отсюда слѣдуетъ, что *C. G. S.* единица плотности приблизительно есть плотность воды при 4^0 и далѣе, что такъ наз. «табличныя» плотности различныхъ тѣлъ (матерій), т.-е. ихъ плотности при 0^0, отнесенныя къ водѣ при 4^0, выражены въ *C. G. S.* единицахъ.

Импульсъ и количество движенія. Форм. (13) стр. 72 показываетъ, что абсолютная единица импульса силы получается, когда абсолютная единица силы дѣйствуетъ въ теченіе единицы времени. *C. G. S.* единица импульса есть импульсъ дина, дѣйствующаго въ теченіе одной секунды.

Изъ (16) стр. 73 слѣдуетъ, что абсолютною единицею количества движенія обладаетъ единица массы, движущаяся съ абсолютною единицею скорости. *C. G. S.* единицею количества движенія обладаетъ масса граммъ, движущаяся со скоростью сантиметра въ секунду.

Подъ вліяніемъ *C. G. S.* единицы импульса силы получается въ самомъ общемъ случаѣ, см. (20) стр. 74, сумма геометрическихъ приращеній количества движенія, равная *C. G. S.* единицѣ. Когда сила имѣетъ направленіе движенія, см. (21) стр. 74, то *C. G. S.* единица импульса вызываетъ *C. G. S.* единицу количества движенія.

Абсолютная единица мгновенной силы вызываетъ абсолютную единицу геометрическаго приращенія количества движенія.

§ 11. Сложеніе и разложеніе силъ. Всякая сила имѣетъ опредѣленную величину и опредѣленное направленіе. Точка, на которую она непосредственно дѣйствуетъ, называется ея точкою приложенія. Сила есть векторъ и потому можетъ быть представлена стрѣлкою (см. стр. 41).

Если на физическое твердое тѣло дѣйствуютъ двѣ силы, равныя по величинѣ и противоположныя по направленію, совпадающему съ направленіемъ прямой, соединяющей ихъ точки приложенія A и B (напр. P и P или Q и Q на рис. 20), то онѣ вызываютъ нѣкоторое перемѣщеніе частицъ внутри тѣла: растяженіе (P,P) или сжатіе (Q,Q). Все нижеслѣдующее относится къ т. наз. неизмѣняемому твердому тѣлу, т.-е. къ такому, въ которомъ упомянутыя внутреннія перемѣщенія и вызванныя ими измѣ-

ненія разстоянія AB или вовсе не существуютъ (случай идеальный) или столь малы, что ими можно пренебречь. Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что данныя двѣ силы взаимно уничтожаются. Неизмѣняемое твердое тѣло обладаетъ слѣдующимъ основнымъ свойствомъ: точку приложенія силы, дѣйствующей на неизмѣняемое тѣло, можно перенести въ любую точку, лежащую по направленію самой силы и принадлежащую этому тѣлу, не мѣняя дѣйствія силы на тѣло.

Слѣдуетъ твердо помнить, что всѣ выводы, относящіеся до замѣны одной или нѣсколькихъ силъ одною или нѣсколькими другими силами, причемъ новыя точки приложенія не совпадаютъ со старыми, относятся исключительно только къ неизмѣняемому твердому тѣлу.

Если нѣсколько силъ могутъ быть замѣнены одною, то первыя называются слагаемыми, послѣдняя равнодѣйствующею.

Равнодѣйствующая произвольнаго числа силъ, имѣющихъ общую точку приложенія, равна геометрической суммѣ данныхъ силъ. Она изображается замыкающею многоугольника, стороны котораго построены, по правилу стр. 44, параллельно этимъ силамъ. Равнодѣйствующая двухъ силъ изображается діагональю параллелограмма, а трехъ силъ — діагональю параллелепипеда, построеннаго на данныхъ двухъ силахъ, какъ на сторонахъ или на данныхъ трехъ, какъ на ребрахъ.

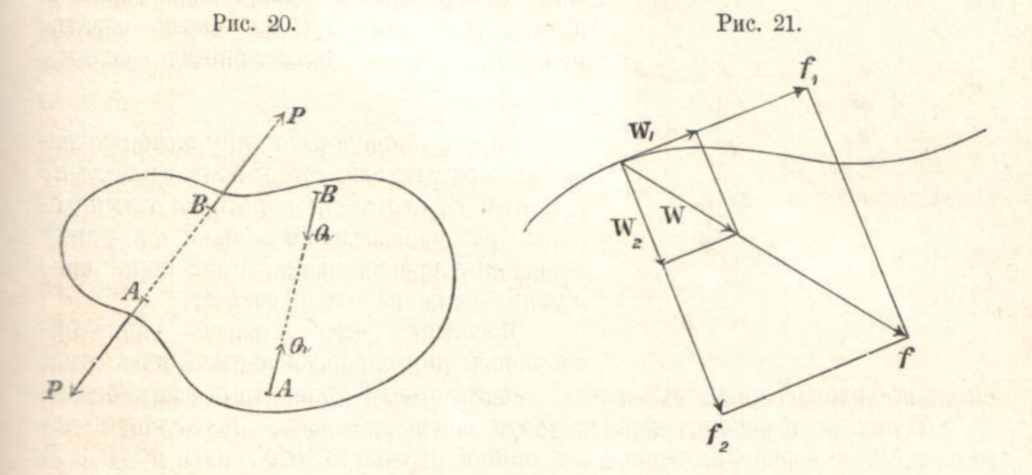


Рис. 20. Рис. 21.

Данную силу можно разложить на двѣ, на три или большее число слагаемыхъ, имѣющихъ точку приложенія, общую съ данною силою. Данную силу f можно, напр., замѣнить тремя силами f_x, f_y, f_z, параллельными координатнымъ осямъ въ пространствѣ.

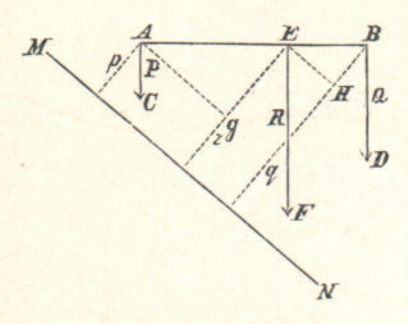
Мы видѣли, стр. 60, что, въ общемъ случаѣ движенія точки по кривой, ускореніе w можетъ быть разложено на тангенціальное w_1 и нормальное w_2, см. (31) стр. 60. Дѣйствующую силу f (рис. 21), которая равна mw и по направленію совпадаетъ съ w, можно разложить на тангенціальную слагаемую f_1 и нормальную слагаемую f_2. Изъ рис. 21 видно, что три силы f, f_1 и f_2 пропорціональны тремъ ускореніямъ w, w_1 и w_2. Отсюда слѣдуетъ,

что $f_1 = mw_1$ и $f_2 = mw_2$, т.-е. тангенціальную и нормальную слагаемыя силы можно соотвѣтственно разсматривать какъ причины тангенціальнаго и нормальнаго ускореній; первая изъ этихъ силъ вызываетъ измѣненіе скорости по величинѣ, вторая измѣненіе скорости по направленію. Импульсъ $f_1 \Delta t$ силы f_1 равенъ алгебраическому приращенію $m\Delta v$ количества движенія. Отсюда слѣдуетъ, что импульсъ тангенціальной слагаемой за произвольный промежутокъ времени равенъ алгебраическому приращенію количества движенія т. е.

$$L_1 = \text{пред.} \sum f_1 \Delta t = mv_2 - mv_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Изъ элементарной физики извѣстно, что равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ, въ одну сторону направленныхъ силъ $P = AC$ и $Q = BD$ (рис. 22) равна ихъ суммѣ ($R = EF = P + Q$) и имѣетъ одинаковое съ ними направленіе. Ея точка приложенія E дѣлитъ разстояніе AB на части, обратно пропорціональныя прилежащимъ силамъ, т.-е. $\frac{P}{Q} = \frac{EB}{EA}$.

Рис. 22.



Введемъ новую величину, которую назовемъ моментомъ силы относительно данной плоскости и которая измѣрялась бы произведеніемъ силы на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки приложенія силы на эту плоскость.

Докажемъ, что моментъ равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ относительно произвольной плоскости равенъ суммѣ моментовъ слагаемыхъ.

Пусть за плоскость чертежа 22-го взята плоскость, проходящая черезъ AEB и перпендикулярная къ данной плоскости MN; силы P, Q и R могутъ не лежать въ плоскости чертежа. Перпендикуляры, опущенные изъ A, B и E на плоскость MN, обозначимъ черезъ p, q и r. Требуется доказать, что $Pp + Qq = Rr$. Изъ чертежа видно, что

$$Pp + Qq = P(r - GE) + Q(r + HB) = (P + Q)r + Q \cdot HB - P \cdot GE.$$

Но $\frac{P}{Q} = \frac{EB}{AE} = \frac{HB}{GE}$; отсюда $Q.HB = P.GE$. Поэтому остается

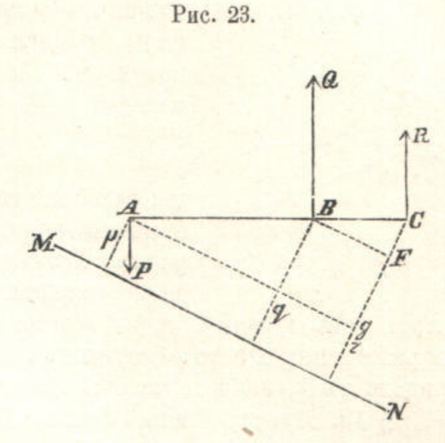
$$Pq + Qq = (P + Q)r = Rr.$$

Если мы имѣемъ систему параллельныхъ силъ P_i, ихъ равнодѣйствующую R и перпендикуляры, опущенные изъ точекъ приложенія силъ на произвольную плоскость, обозначимъ черезъ p_i и r, то

$$\left. \begin{array}{l} R = \sum R_i \\ Rr = \sum P_i p_i \end{array} \right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Изъ элементарной физики извѣстно, далѣе, что равнодѣйствующая R двухъ параллельныхъ силъ P и Q (рис. 23), направленныхъ въ противоположныя стороны, равна ихъ разности, $R = Q - P$, и направлена въ сторону большей силы. Ея точка приложенія C находится на продолженіи прямой AB со стороны большей силы, причемъ $\frac{P}{Q} = \frac{CB}{CA}$. Считая P и Q за силы, имѣющія противоположные знаки, мы докажемъ, что и въ этомъ случаѣ моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ (алгебраической) моментовъ слагаемыхъ, т.-е., что $Rr = Qq - Pp$, гдѣ p, q и r длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ A, B и C на плоскость MN. Изъ рисунка видно, что $Qq - Pp = Q(r - CF) - P(r - CG) = (Q - P)r + P.CG - Q.CF$. Но $\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC} = \frac{CF}{CG}$, откуда $P.CG = Q.CF$. Такимъ образомъ остается $Qq - Pp = (Q - P)r = Rr$. Отсюда слѣдуетъ, что формулы (27) остаются справедливыми и для случая произвольной системы параллельныхъ силъ, изъ которыхъ однѣ имѣютъ одно, другія прямо противоположное направленіе.

Рис. 23.



Точка приложенія равнодѣйствующей системы параллельныхъ силъ называется центромъ системы параллельныхъ силъ. Положимъ, что дана система параллельныхъ силъ P_i; пусть точка приложенія силы P_i имѣетъ координаты x_i, y_i, z_i и пусть равнодѣйствующая $R = \sum P_i$ имѣетъ точку приложенія, координаты которой X, Y, Z. Взявъ координатную плоскость $y\,z$ за плоскость моментовъ, имѣемъ, вмѣсто (27):

$$RX = \sum P_i x_i.$$

Подобныя двѣ формулы получимъ, взявъ моменты относительно координатныхъ плоскостей xz и yz. Замѣняя R величиною $\sum P_i$, получаемъ

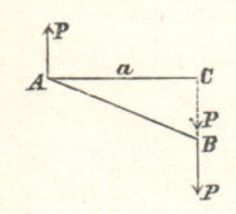
$$X = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}; \quad Y = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}; \quad Z = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Мы видимъ, что координаты центра зависятъ только отъ величины силъ P_i и отъ положенія ихъ точекъ приложенія; но положеніе центра параллельныхъ силъ не зависитъ отъ направленія самихъ силъ и оно остается безъ измѣненія, если всѣ силы P_i увеличить или уменьшить въ одинаковое число разъ.

§ 12. Пара силъ. Парою силъ называется совокупность двухъ силъ $P = AP$ и $P = BP$ (рис. 24) равныхъ и параллельныхъ, но направленныхъ

въ противоположныя стороны. Двѣ силы, изъ которыхъ состоитъ пара, всегда можно расположить такъ, что онѣ окажутся перпендикулярными къ прямой, соединяющей ихъ точки приложенія. Для этого стоитъ только провести $AC \perp AP$ и перенести точку приложенія силы BP изъ B въ C. Прямая $AC = a$ называется плечомъ пары. Введемъ новую физическую величину, которую назовемъ моментомъ пары, пропорціональную силамъ P пары и пропорціональную ея плечу a. Принимая за единицу момента пары моментъ какой-либо пары, мы для численнаго значенія M момента пары получаемъ $M = CPa$. Принимая здѣсь $C = 1$, т.-е. полагая

Рис. 24.

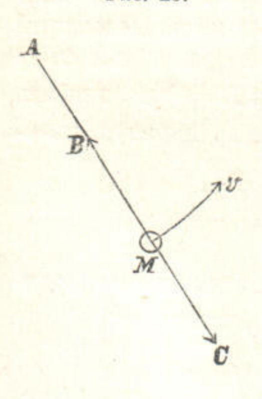


$$M = Pa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

мы за абсолютную единицу момента пары силъ должны принять моментъ пары, каждая изъ силъ которой равна абсолютной единицѣ силы и плечо которой равно линейной единицѣ. *C. G. S.* единица момента пары есть моментъ пары, состоящей изъ двухъ диновъ, находящихся на разстояніи одного сантиметра другъ отъ друга. Пара силъ стремится придать тѣлу, на которое она дѣйствуетъ, вращательное движеніе.

§ 13. Центробѣжная сила. Центробѣжною силою называется сила, исходящая отъ тѣла, которое движется по кривой линіи и направленная на то тѣло, которое заставляетъ первое уклоняться отъ прямолинейнаго пути. Положимъ, что тѣло M (рис. 25), привязанное къ снурку AM, закрѣпленному въ точкѣ A, движется равномѣрно по окружности. Чтобы тѣло M двигалось не по прямой, необходима сила, направленная по радіусу къ центру A окружности. Это есть сила MB натянутаго и потому растянутаго снурка, стремящагося вновь укоротиться. Противодѣйствіе тѣла M на снурокъ AM, которое по величинѣ равно дѣйствію снурка на тѣло M, но имѣетъ направленіе противоположное (третій законъ движенія), и есть центробѣжная сила MC, которая, слѣдовательно, приложена къ снурку, а не къ тѣлу M, какъ иногда невѣрно опредѣляютъ. Подъ вліяніемъ этой силы снурокъ можетъ разорваться и тогда тѣло M, отлетая отъ точки A, двинется по касательной къ кругу, а не по направленію радіуса.

Рис. 25.

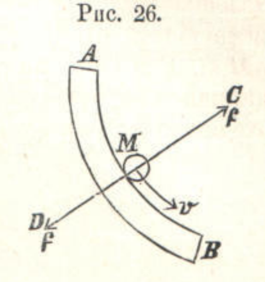


Положимъ, что тѣло M (рис. 26) безъ тренія движется равномѣрно вдоль кривой стѣны AB. Такое движеніе возможно только при наличности силы $f = MC$, направленной нормально къ стѣнѣ и происходящей отъ давленія стѣны на тѣло M. Равное ему давленіе MD тѣла на стѣну и есть, въ данномъ случаѣ, центробѣжная сила.

Разобранные два примѣра относятся, строго говоря, къ матеріальнымъ точкамъ, а не къ конечнымъ тѣламъ M. При вращеніи физическаго тѣла

около оси, центробѣжная сила дѣйствуетъ на всѣ частицы, кромѣ слоя частицъ поверхностныхъ. Положимъ что тѣло B (рис. 27) вращается около оси, проходящей черезъ M. Произвольная частица b движется по окружности подъ вліяніемъ силы, какъ бы исходящей отъ сосѣдней частицы a и не дающей ей удалиться отъ a; эта сила направлена отъ b къ M. Обратно частица b дѣйствуетъ на a съ силою, которая направлена отъ a къ b и которая и есть не что иное, какъ центробѣжная сила. Прилагая сказанное ко всѣмъ частицамъ, мы видимъ, что всѣ онѣ подвержены центробѣжной силѣ, исключая частицъ, расположенныхъ по поверхности B. Легко сообразить, что степень растяженія тѣла B будетъ тѣмъ больше, чѣмъ ближе разсмотрѣнное мѣсто будетъ къ M.

Рис. 26.



§ 14. Динамическое поле. Мы называемъ динамическимъ полемъ среду (стр. 7), обладающую тѣмъ свойствомъ, что на тѣло, помѣщенное въ какое-либо мѣсто среды, дѣйствуетъ сила, пропорціональная массѣ этого тѣла. Пространство, окружающее земной шаръ, есть очевидно динамическое поле. Введемъ новую особую физическую величину (sui generis), которую назовемъ напряженіемъ динамическаго поля въ данной точкѣ и которую примемъ пропорціональною той силѣ, которая дѣйствовала бы на единицу массы, помѣщенную (мысленно) въ этой точкѣ. Если на массу m дѣйствуетъ въ данномъ мѣстѣ поля сила f, и если за единицу напряженія поля принять напряженіе въ какомъ либо мѣстѣ произвольнаго поля, то численное значеніе ψ напряженія поля выразится формулою $\psi = C\frac{f}{m}$. Принимая $C = 1$, т.-е. полагая

Рис. 27.

$$\psi = \frac{f}{m}. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (30)$$

мы за абсолютную единицу напряженія поля должны принять напряженіе въ такой точкѣ, въ которой на единицу массы дѣйствуетъ абсолютная единица силы.

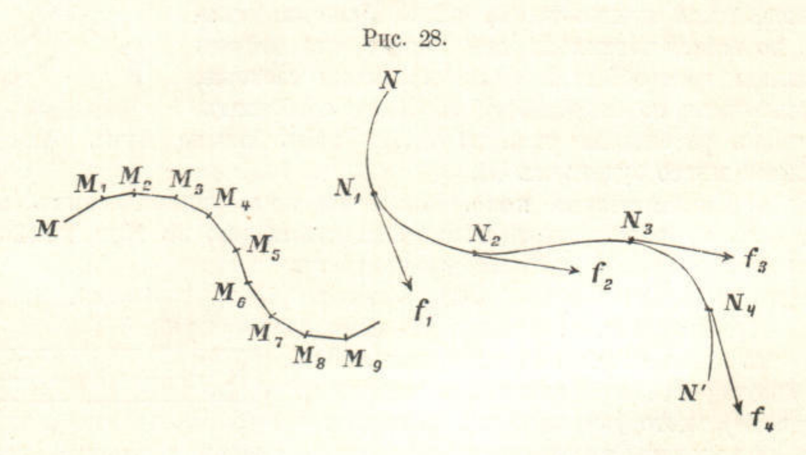
C. G. S. единица напряженія поля есть напряженіе въ такой точкѣ, въ которой на массу граммъ дѣйствуетъ сила динъ. Напряженіе поля, вызванное силою тяжести, въ мѣстахъ, близкихъ къ поверхности земли, равно 981 *C. G. S.* единицѣ напряженія. Напряженіе ψ есть векторъ, имѣющій направленіе силы f, дѣйствующей въ данной точкѣ поля на массу m.

Поле называется равномѣрнымъ, когда во всѣхъ его точкахъ напряженіе имѣетъ одинаковое направленіе и величину. Небольшая часть пространства, окружающаго земной шаръ, можетъ быть принята за равномѣрное поле.

Вообразимъ какое-либо, вообще неравномѣрное, динамическое поле.

Изъ какой-либо точки M (рис. 28) поля проведемъ весьма короткую прямую линію MM_1 по направленію силы, дѣйствующей въ M, когда въ M находится матеріальная точка; изъ M_1 проведемъ линію M_1M_2 по направленію силы, дѣйствующей въ M_1, затѣмъ M_2M_3 по направленію силы, дѣйствующей въ M_2 и т. д. Получаемъ ломанную линію $M\,M_1M_2M_3$...... ......M_9.... Если укорачивать безпредѣльно отрѣзки MM_1, M_1M_2 и т. д., то ломанная безпредѣльно будетъ приближаться къ нѣкоторой кривой линіи, проходящей черезъ точку M. Направленіе кривой, т.-е. направленіе каса-

Рис. 28.



тельной къ кривой, въ каждой ея точкѣ совпадаетъ съ направленіемъ силы, дѣйствующей въ этой же точкѣ. Такая кривая называется линіей силъ. Касательныя къ линіи силъ NN' (въ N_1, N_2, N_3, N_4....) указываютъ направленія дѣйствующихъ силъ. Въ равномѣрномъ полѣ линіи силъ суть параллельныя между собою прямыя линіи.

§ 15. Центръ инерціи. Центромъ инерціи физическаго тѣла называется точка приложенія равнодѣйствующей всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на это тѣло, когда оно помѣщено въ равномѣрномъ динамическомъ полѣ ψ. Раздѣляя объемъ, занятый тѣломъ, на весьма малыя части Δv и обозначая массу, заполняющую одну изъ частей Δv черезъ Δm, мы можемъ сказать, что на нее дѣйствуетъ сила $f=\psi.\Delta m$. Всѣ силы f между собою параллельны и множитель ψ для всѣхъ одинъ и тотъ же. Изъ опредѣленія явствуетъ, что центръ инерціи есть не что иное, какъ центръ системы параллельныхъ силъ f (см. стр. 81), дѣйствующихъ на точки тѣла, помѣщеннаго въ равномѣрномъ полѣ. Свойства центра параллельныхъ силъ, см. въ концѣ § 11 (стр. 81), показываютъ, что положеніе центра инерціи тѣла не зависитъ ни отъ напряженія ψ поля, ни отъ самаго положенія тѣла въ этомъ полѣ, ибо всякое измѣненіе положенія тѣла можно мысленно замѣнить измѣненіемъ направленія силъ, дѣйствующихъ на тѣло. Центръ инерціи зависитъ только отъ распредѣленія массъ, входящихъ въ составъ разсматриваемаго тѣла.

На основаніи формулъ (28) стр. 81 мы найдемъ координаты X, Y, Z центра инерціи. Раздѣлимъ объемъ v тѣла на весьма большое число частей

Δv_i, содержащихъ массы Δm_i. Такъ какъ P_i въ (28) равно $\psi \Delta m_i$, то можемъ сократить дроби на ψ; обозначая всю массу тѣла черезъ $m = \sum \Delta m_i$, получаемъ

$$X = \frac{\text{пред.} \sum x_i \Delta m_i}{m}; \quad Y = \frac{\text{пред.} \sum y_i \Delta m_i}{m}; \quad Z = \frac{\text{пред.} \sum z_i \Delta m_i}{m} \quad . \quad (31)$$

Для однороднаго тѣла, плотность котораго k, имѣемъ $\Delta m_i = k \Delta v_i$ и $m = kv$; подставляя и сокращая на k, получаемъ

$$X = \frac{\text{пред.} \sum x_i \Delta v_i}{v}; \quad Y = \frac{\text{пред.} \sum y_i \Delta v_i}{v}; \quad Z = \frac{\text{пред.} \sum z_i \Delta v_i}{v} \quad . \quad (32)$$

Положеніе центра инерціи однороднаго тѣла не зависитъ отъ его плотности.

Центръ инерціи тѣла можетъ быть найденъ, если извѣстны положенія центровъ инерціи двухъ, трехъ или бо̀льшаго числа частей, на которыя можно мысленно разбить данное тѣло. Для этого слѣдуетъ приложить къ центрамъ инерціи частей тѣла силы, паралелльныя и пропорціональныя массамъ этихъ частей и найти точку приложенія равнодѣйствующей полученныхъ силъ.

§ 16. Моментъ инерціи. Моментомъ инерціи матеріальной частицы относительно данной оси называется величина особаго рода, которая принимается пропорціональною массѣ Δm этой частицы и квадрату разстоянія r частицы отъ оси. Полагая коеффиціентъ пропорціональности равнымъ единицѣ, получаемъ для численнаго значенія K момента инерціи выраженіе $K = r^2 \Delta m$. Моментъ инерціи системы точекъ принимается равнымъ суммѣ моментовъ инерціи этихъ точекъ, т.-е. $K = \sum r^2 \Delta m$. Моментъ инерціи физическаго тѣла получается слѣдующимъ образомъ: раздѣлимъ тѣло на весьма большое число малыхъ частей; пусть Δm масса, r разстояніе какой-либо геометрической точки одной изъ этихъ малыхъ частей отъ оси. Составимъ сумму величинъ $r^2 \Delta m$. Предѣлъ, къ которому стремится эта сумма при безконечномъ возрастаніи числа частей, на которыя мы раздѣлили тѣло, и называется моментомъ инерціи K физическаго тѣла. Итакъ

$$K = \text{пред.} \sum r^2 \Delta m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Абсолютную единицу момента инерціи неудобно опредѣлять, какъ моментъ инерціи единицы массы, находящейся на единицѣ разстоянія отъ оси, ибо единицу массы нельзя себѣ представить сосредоточенною около одной геометрической точки. Мы скажемъ, что абсолютною единицею момента инерціи обладаетъ тѣло, для котораго формула (33) дастъ $K = 1$, причемъ Δm и r должны быть выражены въ единицахъ массы и длины. Приблизительно единица момента инерціи есть моментъ инерціи единицы массы, распредѣленной тонкимъ слоемъ по поверхности круговаго цилиндра, радіусъ основанія котораго единица длины, относительно оси цилиндра. *C. G. S.* единицей момента инерціи обладаетъ масса граммъ, распредѣ-

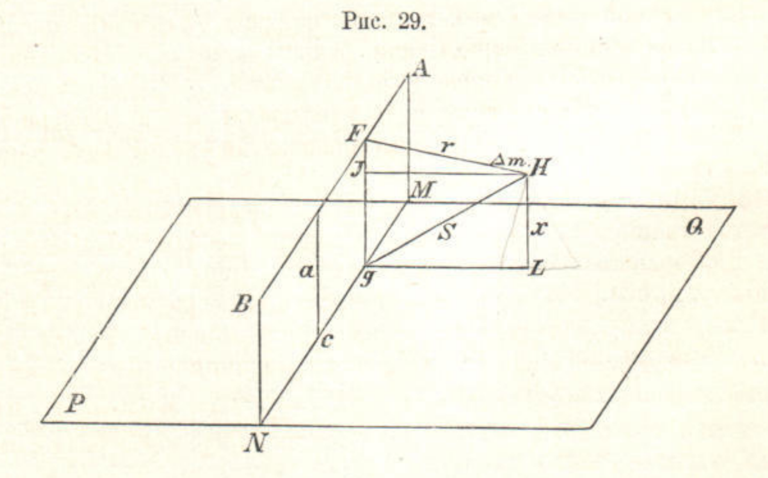
ленная по поверхности цилиндра, на разстояніи одного сантиметра вокругъ его оси. Докажемъ слѣдующую теорему:

Моментъ инерціи K тѣла, масса котораго m, относительно оси, находящейся на разстояніи a отъ центра инерціи тѣла, равенъ моменту инерціи K_0 относительно оси, проходящей черезъ центръ инерціи и параллельной первой, сложенному съ величиною ma^2, т.-е. съ моментомъ инерціи относительно первой оси, который получился бы, еслибъ вся масса m тѣла была сосредоточена въ центрѣ инерціи. Итакъ

$$K = K_0 + ma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Доказательство: пусть AB (рис. 29) та ось, относительно которой мы ищемъ моментъ инерціи K; C центръ инерціи; ось $MN \parallel AB$; разстояніе

Рис. 29.



осей $NB = a$. Проводимъ плоскость PQ черезъ MN, перпендикулярно къ NB и примемъ ее за координатную плоскость yz. Частица Δm находится на разстояніяхъ $HF = r$, $HG = \rho$ и $HL = x$ отъ осей AB, MN и плоскости PQ. Имѣемъ $K =$ пред. $\sum r^2 \Delta m$ и $K_0 =$ пред. $\sum \rho^2 \Delta m$. Изъ рисунка видно, что $r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\,ax$, ибо $JG = HL$, если $HJ \perp FG$. Помножая на Δm и взявъ предѣлъ суммы, получаемъ

$$\text{пред.} \sum r^2 \Delta m = \text{пред.} \sum \rho^2 \Delta m + \text{пред.} \sum a^2 \Delta m - \text{пред.} \sum 2ax \Delta m.$$

Первая сумма есть K, вторая K_0; въ третьей можно a^2 взять за знакъ суммы и положить пред. $\sum \Delta m = m$; въ четвертой возьмемъ $2a$ за знакъ суммы. Получается

$$K = K_0 + ma^2 - 2a\,\text{пред.} \sum x \Delta m.$$

Формула (31) стр 85 показываетъ, что пред. $\sum x \Delta m = mX$, гдѣ X значеніе

координаты x центра инерціи. Но центръ инерціи C лежитъ въ координатной плоскости yz, слѣд. $X=0$, а потому получается формула (34), которую слѣдовало доказать. Эта формула даетъ возможность опредѣлить моментъ инерціи тѣла относительно любой оси, если извѣстенъ моментъ инерціи относительно оси, ей параллельной и проходящей черезъ центръ инерціи. Изъ формулы (34) слѣдуетъ далѣе, что моментъ инерціи тѣла относительно всѣхъ образующихъ цилиндра, ось котораго проходитъ черезъ центръ инерціи, имѣетъ одно и тоже значеніе. Для вычисленія момента инерціи тѣла помощью формулы (33) приходится пользоваться пріемами интегральнаго исчисленія, а потому читателямъ, еще не знакомымъ съ этимъ отдѣломъ математики, придется пока принять на вѣру окончательные результаты нижеслѣдующихъ вычисленій.

Моментъ инерціи выражается тройнымъ интеграломъ, распространеннымъ по всему объему тѣла. Обозначая дифференціалъ объема черезъ dv, дифференціалъ массы черезъ dm и плотность черезъ k, имѣемъ вообще $dm=kdv$ и потому для момента инерціи K получается

$$K=\int\int\int r^2 k dv \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

I. Моментъ инерціи полаго однороднаго кругового цилиндра относительно его геометрической оси. Пусть l длина цилиндра, R_1 внутренній, R_2 внѣшній радіусъ; плотность k величина постоянная. Введемъ цилиндрическія координаты: x разстояніе точки отъ плоскости одного изъ основаній цилиндра; r разстояніе точки отъ его оси и φ уголъ между r и нѣкоторымъ начальнымъ радіусомъ r_0. Элементъ объема $dv=$ $=rdxdrd\varphi$ и потому

$$K=k\int_{x=0}^{l}\int_{r=R_1}^{R_2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 dx\,dr\,d\varphi = 2\pi kl\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

или

$$K=\frac{1}{2}\pi kl(R_2{}^4-R_1{}^4).$$

Масса m полаго цилиндра равна $\pi kl\ (R_2{}^2-R_1{}^2)$; слѣд.

$$K=m\frac{R_2{}^2+R_1{}^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Для сплошного цилиндра, радіусъ основанія котораго R, имѣемъ изъ (36), полагая $R_2=R$ и $R_1=O$,

$$K=\frac{1}{2}mR^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Когда l малая величина то полый цилиндръ превращается въ кольцо съ прямоугольнымъ поперечнымъ сѣченіемъ, а сплошной въ круглую пластинку. Формулы (36) и (37) относятся и къ нимъ. Формула

(37) показываетъ, что $C. G. S.$ единица момента инерціи есть напр. моментъ инерціи цилиндра, масса котораго равна двумъ граммамъ, а радіусъ основанія равенъ одному сантиметру, относительно его оси.

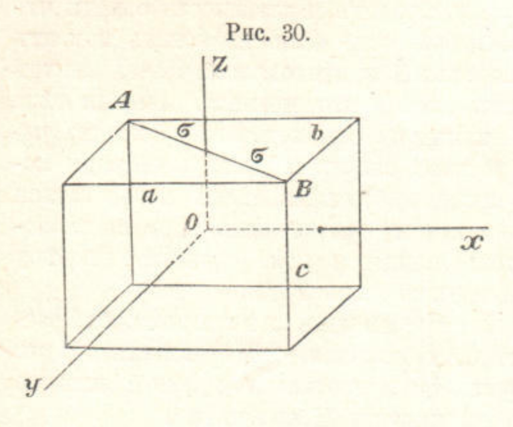


Рис. 30.

II. Моментъ инерціи однороднаго прямоугольнаго параллелепипеда относительно оси, проходящей черезъ его геометрическій центръ и параллельной одному изъ реберъ (c). Пусть a, b и c ребра параллелепипеда (рис. 30); проведемъ координатныя оси съ началомъ въ его центрѣ O и параллельныя ребрамъ. Найдемъ величину K относительно оси Oz. Элементъ объема $dv = dx dy dz$ имѣетъ координаты x, y, z и находится отъ оси Oz на разстояніи $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Слѣдовательно

$$K = k \int_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Интегрируя по z, находимъ

$$K = kc \left\{ \int_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy + \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \right\} = \frac{kabc}{12} (a^2 + b^2).$$

Но масса m нашего тѣла равна $kabc$, слѣд.

$$K = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) = \frac{1}{3} m\sigma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

гдѣ σ, см. рис. 30, половина діагонали AB, т.-е. разстояніе отъ оси до наиболѣе отъ нея удаленной точки тѣла.

III. Моментъ инерціи однороднаго шара относительно оси, проходящей черезъ его центръ. Пусть радіусъ шара R. Возьмемъ координатныя оси съ началомъ въ центрѣ шара и обозначимъ черезъ K_x, K_y и K_z моменты инерціи шара относительно координатныхъ осей. Въ виду симметріи шара ясно, что вообще $K = K_x = K_y = K_z$. Очевидно

$$K_x = \text{пред.} \sum \Delta m (y^2 + z^2); \quad K_y = \text{пред.} \sum \Delta m (x^2 + z^2); \quad K_z = \text{пред.} \sum \Delta m (x^2 + y^2).$$

Складывая эти три величины и принимая во вниманіе предыдущія равенства, имѣемъ

$$3K = 2 \, \text{пред.} \sum \Delta m (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \, \text{пред.} \sum \varsigma^2 \Delta m,$$

гдѣ ς разстояніе точки отъ центра шара. Раздѣляя шаръ на безконечно тонкіе слои съ радіусомъ ς и толщиною $d\varsigma$, получаемъ, положивъ $dm = 4\pi\varsigma^2\, k d\varsigma$,

$$K = \frac{8\pi}{3} k \int_0^R \varsigma^4 d\varsigma = \frac{8\pi k R^5}{15}.$$

Масса m всего шара равна $\frac{4}{3}\pi k R^3$; слѣд.

$$K = \frac{2}{5} mR^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Работа и Энергія.

§ 1. Живая сила. Введемъ новую физическую величину особаго рода. Положимъ, что тѣло, масса котораго m, движется со скоростью v. Мы назовемъ живою силою этого движенія величину, пропорціональную массѣ и пропорціональную квадрату скорости. Принимая живую силу движенія какого-либо движущагося тѣла за единицу, мы для численнаго значенія J живой силы имѣемъ общую формулу $J = Cmv^2$. По причинамъ, которыя выяснятся ниже, мы положимъ $C = \frac{1}{2}$, т.-е. полагаемъ

$$J = \frac{1}{2} mv^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Абсолютная единица живой силы есть живая сила тѣла, масса котораго $m = 2$ и которое движется съ единицею скорости. $C.\ G.\ S.$ единица живой силы есть живая сила массы два грамма, движущейся со скоростью, равной $C.\ G.\ S.$ единицѣ скорости (сантиметръ въ секунду).

Когда частицы, изъ которыхъ состоитъ физическое тѣло обладаютъ различными скоростями, то его живая сила выразится понятною формулою

$$J = \text{пред.} \sum \frac{1}{2} \Delta m \,.\, v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ v скорость частицы, обладающей массой Δm.

Живая сила вращающагося тѣла получается изъ общей формулы (2) подстановкою, вмѣсто v, его выраженія $v = r\theta$, см. (42) стр. 62, гдѣ θ угловая скорость въ данный моментъ и r разстояніе частицы отъ оси вращенія. Получается $J = \text{пред.} \sum \frac{1}{2} \Delta m \,.\, r^2\theta^2$. Множитель $\frac{1}{2}\theta^2$, какъ величину общую для всѣхъ частицъ, возьмемъ за знакъ суммы: $J = \frac{1}{2}\theta^2$ пред. $\sum r^2 . \Delta m$. Пре-

дѣлъ этой суммы не что иное, какъ моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія, см. (33) стр. 85, такъ что

$$J = \frac{1}{2} K\omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Живая сила вращающагося тѣла численно равна полупроизведенію квадрата его угловой скорости на его моментъ инерціи относительно оси вращенія. Подставляя въ (3) вмѣсто K одно изъ выраженій (36), (37), (38) и (39), получаемъ живую силу однородныхъ полаго цилиндра или кольца съ прямоугольнымъ сѣченіемъ, сплошного цилиндра или круглой пластинки, параллелепипеда и шара, вращающихся около осей, для которыхъ выраженія момента инерціи были выведены. Формула (34) даетъ намъ возможность опредѣлить живую силу этихъ же тѣлъ при ихъ вращеніи около осей, параллельныхъ вышеуказаннымъ.

§ 2. Работа. Когда движеніе тѣла происходитъ по направленію, противоположному направленію одной изъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, такъ что эта сила препятствуетъ его движенію, то мы говоримъ, что «производится работа»; препятствующую силу мы будемъ называть сопротивленіемъ. Движеніе на встрѣчу сопротивленію можно назвать его «преодолѣваніемъ». Итакъ, работа производится, когда преодолѣвается сопротивленіе. Важно замѣтить, что во многихъ случаяхъ движенія тѣла сопротивленіе развивается только во время самаго движенія.

Допустимъ, что на тѣло дѣйствуетъ сила по направленію движенія; мы назовемъ ее движущей силой.

Будемъ отличать два случая дѣйствія движущей силы на тѣло.

I. Первый случай тотъ, когда существуетъ сопротивленіе т.-е. сила, препятствующая движенію и исходящая отъ какихъ либо другихъ тѣлъ; источникъ этого сопротивленія находится во внѣшнемъ для даннаго тѣла мірѣ. Допустимъ кромѣ того, что въ каждый данный моментъ движущая сила по величинѣ равна сопротивленію и что тѣло вслѣдствіе первоначальнаго толчка или по иной причинѣ уже пріобрѣло нѣкоторую скорость v. Такъ какъ движущая сила и сопротивленіе предполагаются равными, а направленія ихъ противоположными, то силы, дѣйствующія на наше тѣло, взаимно уничтожаются и тѣло по инерціи движется равномѣрно, т.-е. безъ измѣненія скорости v или безъ ускоренія. Работа движущей силы въ этомъ случаѣ заключается только въ преодолѣваніи уравновѣшеннаго ею сопротивленія. Обозначимъ ту и другую силу черезъ f. Работа пропорціональна сопротивленію f или, что въ разбираемомъ случаѣ то-же самое, движущей силѣ f и пропорціональна тому пути s, который былъ пройденъ тѣломъ по направленію движущей силы или вдоль котораго движущая сила f преодолѣвала сопротивленіе f. Выбирая произвольно единицу работы, мы для ея численнаго значенія R получаемъ общее выраженіе $R = Cfs$. Полагая $C = 1$, имѣемъ

$$R = fs \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Абсолютная единица работы есть работа единицы силы «на протяженіи единицы длины», т.-е. когда точка приложенія силы перемѣщается по направленію силы на единицу длины. *C. G. S.* единица работы есть работа силы динъ на протяженіи одного сантиметра. Эта единица работы получила названіе эргъ. Милліонъ эрговъ называютъ «мегаэргъ». Десять мегаэрговъ или 10^7 эрговъ получили названіе джуль.

Разсмотрѣнный здѣсь случай работы мы имѣемъ при подъемѣ на поверхности земли тѣла, вѣсъ котораго p, на высоту h, при существенномъ условіи, чтобы тѣло не пріобрѣтало ускоренія. Работа выражается формулою

$$R = ph \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4, a)$$

Если вѣсъ (сопротивленіе, равное поднимающей силѣ) выраженъ въ килограммахъ, высота подъема въ метрахъ, то за единицу работы въ $(4, a)$ принимается работа подъема килограмма на высоту метра безъ измѣненія его начальной скорости; эта единица работы называется килограммъ-метромъ.

Подобнымъ-же образомъ получаются понятныя по ихъ названіямъ единицы работы пудо-футъ, фунто-футъ, граммъ-сантиметръ и т.-д. Аналогично эргъ есть динъ-сантиметръ. Мы видѣли на стр. 78, что динъ = 1,02 миллигр. Отсюда слѣдуетъ, что мегаэргъ = 10^6 эргамъ = 10^6. 1,02 миллигр.-сант. = 1,02 килогр.-сантим. = 0,0102 килогр.-метр. Итакъ мы имѣемъ

$$\left.\begin{array}{r}\text{Джуль} = 10 \text{ мегаэргамъ} = 10^7 \text{эргамъ} = 0{,}102 \text{ килогр.-метра} \\ \text{Мегаэргъ} = 10^6 \text{ эргамъ} = 0{,}0102 \text{ килогр.-метра.}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

II. Второй случай работы мы имѣемъ, когда сила f дѣйствуетъ на тѣло, не подверженное вліянію сопротивленія, исходящаго отъ внѣшняго міра. Полагая, что и здѣсь сила f имѣетъ направленіе движенія, мы должны сказать, что результатомъ дѣйствія силы является алгебраическое увеличеніе скорости, т.-е. ускореніе. Инерція тѣла, т.-е. его пассивное сохраненіе скорости, играетъ здѣсь роль того сопротивленія, которое преодолѣвается активною движущей силой; это сопротивленіе дѣйствующей силѣ f исходитъ, однако, не отъ внѣшняго міра, но отъ самого движущагося тѣла. Подъ работой силы f мы и здѣсь будемъ понимать величину, численное значеніе которой выражается формулою (4), т.-е. произведеніемъ силы f на путь s, пройденный тѣломъ по направленію силы.

Итакъ, слѣдуетъ отличать два случая производства работы: въ первомъ сущность работы заключается въ преодолѣваніи внѣшняго сопротивленія движенію, которое совершается безъ увеличенія скорости тѣла; во второмъ работа обнаруживается увеличеніемъ скорости движенія, къ которому внѣшній міръ относится индифферентно.

На дѣлѣ мы имѣемъ весьма часто соединеніе обоихъ случаевъ: сила f преодолѣваетъ какія-либо сопротивленія и въ то же время мѣняетъ скорость движенія тѣла. Работа въ этомъ случаѣ распадается на двѣ части. Одна часть, какъ говорятъ, «тратится» на преодолѣваніе сопротивленій, вторая—на измѣненіе скорости движенія тѣла.

Второй изъ разсмотрѣнныхъ выше случаевъ есть случай, неосуществимый на земной поверхности, ибо при всякомъ движеніи тѣла у поверхности земли появляется, исходящее отъ сосѣднихъ тѣлъ, сопротивленіе этому движенію: сопротивленіе воздуха, треніе на поверхности осей колесъ и т. под. Отсюда слѣдуетъ, что на земной поверхности при всякомъ дѣйствіи силы на тѣло, часть работы тратится (или, какъ говорятъ, теряется или пропадаетъ) на преодолѣваніе внѣшнихъ сопротивленій. Происхожденіе терминовъ «работа тратится, теряется, пропадаетъ и т. д.» выяснится впослѣдствіе.

Неизбѣжныя сопротивленія называются вредными, для отличія отъ тѣхъ сопротивленій, для преодолѣванія которыхъ мы иногда пользуемся имѣющейся въ нашемъ распоряженіи силою, заставляя ее, напр., приводить въ равномѣрное движеніе пилу или станки, служащіе для обработки дерева, металловъ и т. под.

Въ обоихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ производства работы мы предполагали, что сила дѣйствуетъ по направленію перемѣщенія s. Разсмотримъ общій случай, когда сила f и перемѣщеніе s составляютъ нѣкоторый уголъ $(f, s) = \alpha$. Когда $\alpha = 90^\circ$, то работа силы f равна нулю, ибо эта сила не можетъ ни вызвать измѣненія скорости по величинѣ, ни преодолѣвать сопротивленія, имѣющія направленіе, противоположное направленію движенія тѣла. При произвольномъ углѣ α, принимается за численное значеніе R работы величина

$$R = fs\cos\alpha = fs\cos(f, s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

которое при $\alpha = 0$ даетъ (4), а при $\alpha = 90^\circ$ даетъ $R = 0$. Обозначая черезъ f_1 тангеціальную слагаемую силы f, имѣемъ $f_1 = f\cos\alpha$; полагаемъ съ другой стороны $s_1 = s\cos\alpha$. Сила f_1 есть проекція дѣйствующей силы f на направленіе перемѣщенія s; s_1 есть, наоборотъ, проекція перемѣщенія s на направленіе силы f. Мы имѣемъ

$$R = fs\cos\alpha = f_1 s = fs_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6,a)$$

Въ общемъ случаѣ, величины силы f и угла α непрерывно мѣняются. Раздѣлимъ путь s на весьма малые отрѣзки Δs; тогда работа, соотвѣтствующая малому перемѣщенію Δs или т. наз. «элементарная работа»

$$\Delta R = f\Delta s\cos(f, \Delta s).$$

Вся работа, произведенная перемѣнною силою f при криволинейномъ движеніи тѣла, выразится формулою

$$R = \text{пред.} \sum f\Delta s\cos(f, \Delta s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

или

$$R = \text{пред.} \sum f_1 \Delta s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,a)$$

гдѣ f_1 тангенціальная слагаемая дѣйствующей силы.

Докажемъ весьма важную теорему: если нѣсколько силъ имѣютъ общую точку приложенія, которая перемѣщается, то работа равнодѣйствующей силы равна алгебраической суммѣ работъ слагаемыхъ силъ. Докажемъ эту теорему для случая двухъ дѣйствующихъ силъ $P_1 = OA$ и $P_2 = OB$ (рис. 31), равнодѣйствующая которыхъ $P = OC$. Пусть точка O перемѣстилась на весьма малый путь Δs по направленію OM. Опустивъ изъ точекъ A, B и C перпендикуляры на OM, имѣемъ $OF = OE + EF$; но $EF = OD$, слѣд. $OF = OD + OE$ или $P\cos(P, \Delta s) = P_1 \cos(P_1, \Delta s) + P_2 \cos(P_2, \Delta s)$. Помножая это уравненіе на Δs, получаемъ

$$P\Delta s \cos(P, \Delta s) = P_1 \Delta s \cos(P_1, \Delta s) + P_2 \Delta s \cos(P_2, \Delta s)$$

Рис. 31.

каковое равенство и выражаетъ нашу теорему для случая двухъ силъ. Отъ двухъ силъ уже легко перейти къ тремъ и большему числу и доказать теорему для самаго общаго случая.

Формула (6) даетъ для работы R положительное численное значеніе, если уголъ α острый. Если уголъ α тупой (рис. 32), то работа R отрицательная, причемъ опять возможны два случая:

1. Существуетъ другая сила f', составляющая съ Δs острый уголъ, причемъ проекціи обѣихъ силъ на направленіе движенія равны; тѣло, пріобрѣвшее отъ посторонней причины нѣкоторую скорость, движется равномѣрно. Тогда наша сила играетъ роль сопротивленія, работа котораго отрицательна и численно равна работѣ другой, движущей силы.

Рис. 32.

2. Сила f (рис. 32) дѣйствуетъ на движущееся тѣло, не подвергнутое постороннимъ вліяніямъ. Въ этомъ случаѣ результатомъ отрицательной работы этой силы является замедленіе движенія тѣла, т.-е. уменьшеніе его скорости. Въ общемъ случаѣ, когда проекція силы f на направленіе движенія больше проекціи силы f', то избытокъ работы силы f надъ работою силы f' вызоветъ замедленіе движенія тѣла.

Опредѣлимъ величину работы для нѣсколькихъ частныхъ случаевъ.

I. Работа пары силъ. Положимъ, что на тѣло дѣйствуетъ пара силъ $PABP$ (рис. 33), моментъ которой $M = Pa$, гдѣ $a = AB$, см. (29) стр. 82 и положимъ, что тѣло повернулось на уголъ φ около точки O. Такъ какъ обѣ силы P при этомъ вращеніи постоянно будутъ имѣть направленіе движенія точекъ A и B, то ясно, что искомая работа $R = P \times AC + P \times BD = 2P \times AC$. Но $\cup AC = \frac{a}{2}\varphi$; слѣд. $R = Pa\varphi$ или

$$R = M\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

т.-е. работа пары равна произведенію момента пары на уголъ поворота.

II. Работа при перемѣщенiи тѣла въ равномѣрномъ полѣ. Пусть AB (рис. 34) направленiе линiй силъ въ разсматриваемомъ равномѣрномъ полѣ и пусть нѣкоторое тѣло перемѣщается по произвольной траекторiи отъ точки S до точки T. Проведемъ черезъ S и T двѣ плоскости

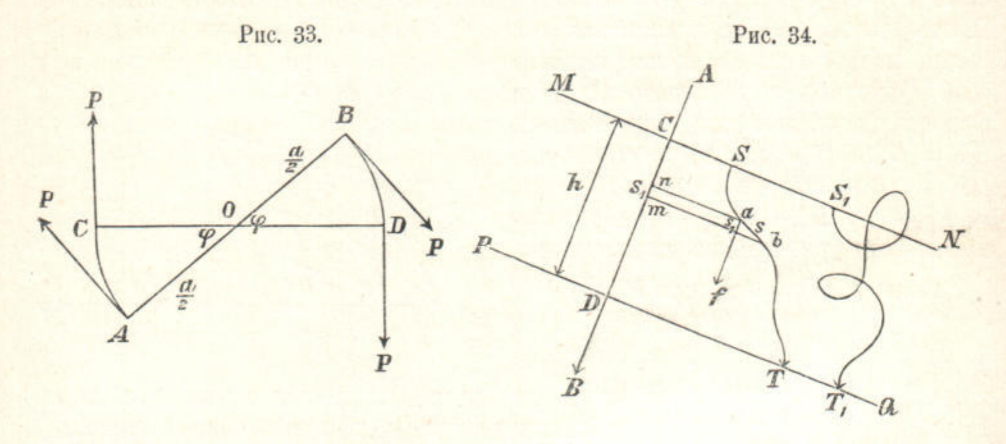


Рис. 33. Рис. 34.

MN и PQ, перпендикулярно къ направленiю силъ. Эти плоскости пересѣкутъ прямую AB въ точкахъ C и D; пусть $CD = h$ и пусть f сила, дѣйствующая на тѣло въ разсматриваемомъ равномѣрномъ полѣ. Разобьемъ путь ST на малые отрѣзки; одинъ изъ нихъ, ab, обозначимъ черезъ s, проекцiю его на направленiе силы черезъ $s_1 = mn$, гдѣ an и bm перпендикулярны къ AB. Искомая работа $R =$ пред. $\sum fs\cos(f,s) =$ $=$ пред. $\sum fs_1$. Въ равномѣрномъ полѣ сила f постоянная, а потому множитель f можно взять за знакъ суммы. Получаемъ $R = f$ пред. $\sum s_1$; но послѣдняя сумма очевидно равна $CD = h$, слѣд.

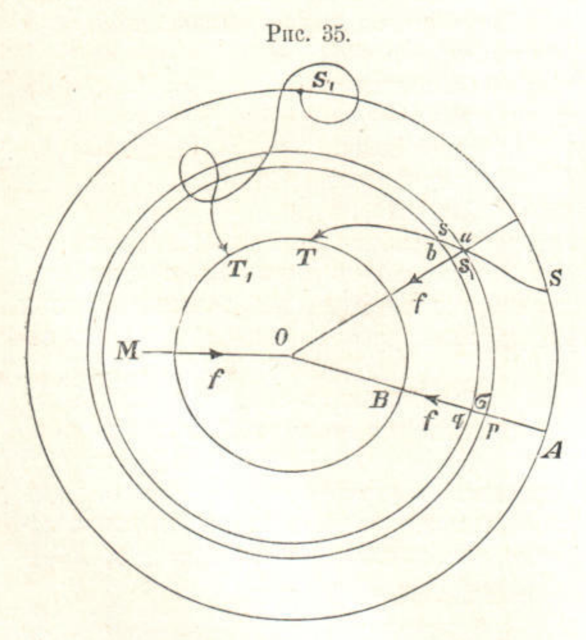


Рис. 35.

$$R = fh.$$

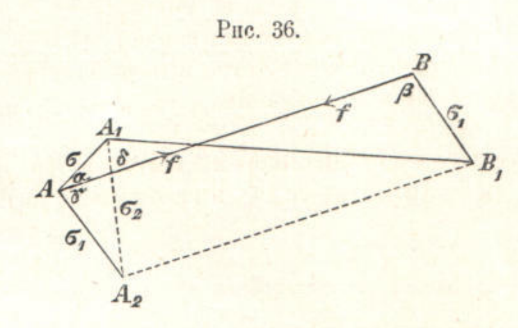
Эта формула показываетъ, что работа, произведенная при перемѣщенiи даннаго тѣла въ равномѣрномъ полѣ дѣйствующими въ этомъ полѣ силами, не зависитъ, ни отъ формы пути, ни отъ положенiй начальной и конечной точекъ пути на плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ направленiю линiй

силъ, но зависитъ только отъ разстоянія этихъ плоскостей другъ отъ друга. Легко сообразить, что работа получилась бы та же самая, еслибъ наше тѣло перешло бы отъ MN къ PQ по кривой S_1T_1.

Если начальная и конечная точки пути лежатъ на одной и той же плоскости, перпендикулярной къ направленію линій силъ, то работа равна нулю.

III. Работа центральныхъ силъ. Центральными называются силы, направленныя во всякой точкѣ M пространства къ опредѣленной точкѣ O (рис. 35) и зависящія только отъ разстоянія точки M отъ точки O. Положимъ сперва, что тѣло движется по прямой линіи, проходящей черезъ O отъ A до B. Раздѣливъ весь путь на элементы $\sigma = pq$, получаемъ искомую работу

Рис. 36.



$$R = \text{пред.} \sum_A^B f\sigma,$$

ибо сила f въ каждой точкѣ p имѣетъ направленіе перемѣщенія σ. Буквы A и B обозначаютъ символически предѣлы, между которыми находятся малые пути σ.

Проведемъ черезъ A и B шаровыя поверхности съ центромъ въ O и положимъ, что тѣло по произвольной кривой переходитъ отъ S къ T, причемъ S и T лежатъ на только что упомянутыхъ шаровыхъ поверхностяхъ. Проведемъ черезъ концы p и q элемента σ шаровыя поверхности съ центромъ въ O; они вырѣжутъ изъ пути ST малый отрѣзокъ $ab = s$. Замѣтимъ, что сила f по условію имѣетъ въ a и въ p одинаковую величину. Работа $R_1 = \text{пред.} \sum f s \cos(f, s)$; но при весьма маломъ s можно принять, что $s \cos(f, s) = s_1 = \sigma$, слѣд.

$$R_1 = \text{пред.} \sum_A^B f\sigma = R.$$

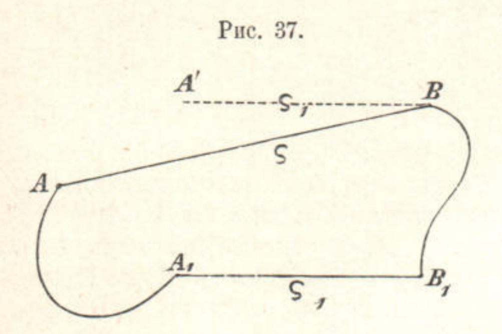
При дѣйствіи центральныхъ силъ, работа зависитъ только отъ тѣхъ двухъ концентрическихъ шаровыхъ поверхностей, съ центромъ въ центрѣ силъ, на которыхъ лежатъ начальная и конечная точки пути, но не зависитъ, ни отъ спеціальнаго положенія этихъ точекъ на шаровыхъ поверхностяхъ, ни отъ вида траекторіи. Та-же работа получилась бы и при движеніи по кривой S_1T_1.

IV. Работа внутреннихъ силъ. Силы, съ которыми дѣйствуютъ другъ на друга матеріальныя точки, составляющія систему точекъ, называются внутренними силами. Допустимъ, что это силы центральныя. Докажемъ, что работа внутреннихъ силъ равна нулю, когда не мѣняется взаимное расположеніе точекъ, т.-е. когда система движется, какъ цѣлое. Разсмотримъ двѣ точки A и B (рис. 36), перешедшія, безъ измѣненія разстоянія, въ A_1 и B_1. Ихъ взаимодѣйствіе выражается двумя силами f и f_1, которыя по третьему закону движенія равны

между собою (стр. 71): $f = f_1$. Пусть перемѣщенія $AA_1 = \sigma$ и $BB_1 = \sigma_1$ безконечно малы. Работа $R = f\sigma \cos\alpha + f_1\sigma_1 \cos\beta$. Проведемъ $AA_2 \parallel BB_1$ и $B_1A_2 \parallel BA$ и соединимъ A_2 съ A_1. Тогда $AA_2 = BB_1 = \sigma_1$; положимъ $A_1A_2 = \sigma_2$. Очевидно $\sigma \cos\alpha = \sigma_1 \cos\gamma + \sigma_2 \cos\delta$; слѣд. имѣемъ, положивъ еще $f = f_1$, что $R = f\left\{\sigma_1 \cos\gamma + \sigma_2 \cos\delta + \sigma_1 \cos\beta\right\}$. Но $\cos\beta = -\cos\gamma$; далѣе $\angle\delta = \angle A_1A_2B_1$ въ предѣлѣ приближается къ прямому ибо $A_1B_1 = A_2B_1$; для безконечно малыхъ перемѣщеній слѣдуетъ положить $\cos\delta = 0$, такъ что остается $R = 0$. Относя этотъ выводъ ко всѣмъ парамъ точекъ, мы видимъ, что работа всѣхъ внутреннихъ силъ равна нулю, когда система движется какъ цѣлое.

Докажемъ вторую теорему: Работа, произведенная внутренними силами при переходѣ изъ одного расположенія въ другое, не зависитъ отъ того, какимъ образомъ совершился этотъ переходъ, т.-е. по какимъ путямъ каждая изъ точекъ перешла отъ начальнаго положенія въ окончательное. Разсмотримъ двѣ точки A и B (рис. 37), перешедшія въ A_1 и B_1; пусть $AB = \rho$, $A_1B_1 = \rho_1$. Придадимъ совокупности обѣихъ точекъ движеніе, которое въ каждый данный моментъ равнялось бы движенію точки B, но имѣло бы обратное ему направленіе. При этомъ, мысленно добавленномъ движеніи работа внутреннихъ силъ будетъ равняться нулю на основаніи только что доказанной теоремы. Точка B при этомъ останется неподвижною, а точка A перейдетъ въ A' гдѣ $BA' \parallel$ и $= B_1A_1$. Работа силы, дѣйствующей на A, не зависитъ отъ того пути, по которому точка отъ A перешла въ A', ибо дѣйствующая на нее сила, непрерывно направленная къ неподвижной точкѣ B, будетъ сила центральная. Сказанное относится ко всѣмъ парамъ точекъ системы, слѣд. наша теорема доказана. Изъ нея слѣдуетъ, что если система точекъ, исходя изъ какого-либо расположенія, возвращается черезъ нѣкоторое время къ тому же взаимному расположенію, то вся работа внутреннихъ силъ, произведенная за это время, равна нулю.

Рис. 37.

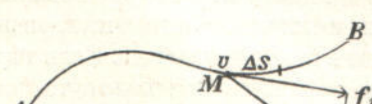


§ 3. Работа и живая сила. Положимъ, что нѣкоторое тѣло, пробѣгая путь AB (рис. 38), находится подъ вліяніемъ системы силъ, имѣющихъ равнодѣйствующую f; полагая, что источники этихъ силъ находятся во внѣшнемъ для тѣла пространствѣ, мы и самыя силы будемъ называть внѣшними. На основаніи теоремы, доказанной на стр. 93, мы найдемъ работу R системы силъ, произведенную при движеніи тѣла, если опредѣлимъ работу равнодѣйствующей f. Эта работа равна, см. (7, a) стр. 92,

$$R = \text{пред.} \sum f_1 \Delta s,$$

гдѣ Δs одинъ изъ элементовъ, на которые мы разбиваемъ путь и $f_1 = f \cos(f, \Delta s)$ тангенціальная слагаемая равнодѣйствующей f, т.-е. слагаемая по направленію движенія. Мы видѣли, что тангенціальная слагаемая есть причина тангенціальнаго ускоренія w_1 и что $f_1 = mw_1$, такъ что

Рис. 38.



$$R = \text{пред.} \sum mw_1 . \Delta s.$$

Допустимъ, что наше тѣло въ начальной точкѣ A пути обладало скоростью v_1, а въ конечной точкѣ B скоростью v_2; соотвѣтствующія значенія живой силы, (1) стр. 89, суть $J_1 = \frac{1}{2} mv_1^2$ и $J_2 = \frac{1}{2} mv_2^2$. Скорость въ промежуточной точкѣ M обозначимъ черезъ v, живую силу черезъ $J = \frac{1}{2} m v^2$. Пробѣжавъ элементъ пути Δs, тѣло будетъ обладать новою скоростью $v + \Delta v$ и новою живою силою, равною $\frac{1}{2} m(v + \Delta v)^2$. Измѣненіе живой силы обозначимъ черезъ ΔJ; оно очевидно равно $\Delta J = \frac{1}{2} m \left\{(v + \Delta v)^2 - v^2\right\} = \frac{1}{2} m \left\{2v\, \Delta v + (\Delta v)^2\right\}$. Полагая, что Δs, а слѣд. и Δv величины безконечно малыя, мы можемъ пренебречь вторымъ членомъ въ скобкахъ и написать $\Delta J = mv\, \Delta v$. Полное измѣненіе живой силы за время пробѣга всего пути AB, т.-е. $J_2 - J_1 = \text{пред.} \sum \Delta J = \text{пред.} \sum mv\, \Delta v$. Но $\Delta v = w_1\, \Delta t$, гдѣ Δt время пробѣга пути Δs; слѣд. $J_2 - J_1 = \text{пред.} \sum mw_1 v \Delta t$; произведеніе $v\, \Delta t = \Delta s$, а потому

$$J_2 - J_1 = \text{пред.} \sum mw_1\, \Delta s.$$

Сравнивая эту формулу съ послѣднимъ выраженіемъ для R, мы видимъ, что

$$R = \text{пред.} \sum f \Delta s \cos(f, \Delta s) = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad . \quad . \quad (9)$$

Эта формула, одна изъ важнѣйшихъ формулъ физики, показываетъ, что **если тѣло движется подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ, то работа этихъ силъ численно равняется пріобрѣтенной тѣломъ живой силѣ.**

Для случая движенія системы матеріальныхъ точекъ или физическаго тѣла, мы можемъ для всякой точки написать равенство (9); взявъ сумму этихъ равенствъ и обозначивъ черезъ R сумму работъ всѣхъ силъ, дѣйствовавшихъ при перемѣщеніи системы на всѣ ея точки, мы получаемъ

$$R = J_2 - J_1 = \text{пред.} \sum \frac{1}{2} mv_2^2 - \text{пред.} \sum \frac{1}{2} mv_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (9,a)$$

Для случая вращенія тѣла около оси формула (3) стр. 90 даетъ

$$R = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} K\theta_2^2 - \frac{1}{2} K\theta_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9,b)$$

гдѣ K моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія; θ_1 и θ_2 угловыя скорости въ началѣ и въ концѣ того промежутка времени, въ теченіе котораго внѣшнія силы произвели работу R.

Положимъ, что на вращающееся тѣло дѣйствуетъ пара силъ, расположенныхъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія и пусть M моментъ этой пары силъ. Если тѣло, въ теченіе малаго промежутка времени dt повернется на уголъ $d\varphi$, то малая работа dR, произведенная парою силъ, равна $dR = Md\varphi$, см. (8) стр. 93. Эта работа должна равняться приращенію живой силы $J = \frac{1}{2} K\theta^2$, см. (9). Итакъ

$$Md\varphi = d \cdot \frac{1}{2} K\theta^2 = K\theta d\theta.$$

Раздѣляемъ обѣ стороны на dt

$$M \frac{d\varphi}{dt} = K\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

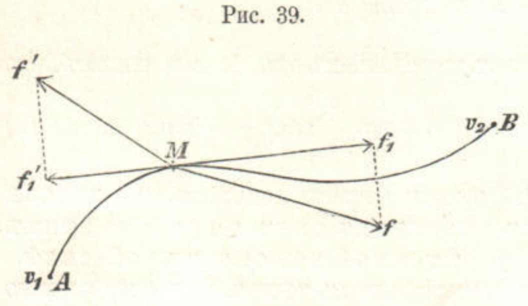
Но $\theta = \frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt} = \vartheta$, угловому ускоренію (стр. 63). Остается

$$M = K\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Моментъ пары силъ, расположенной въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія тѣла, равенъ произведенію момента инерціи тѣла относительно этой оси на его угловое ускореніе.

Если точки, изъ которыхъ состоитъ система, дѣйствуютъ другъ на друга съ какими-либо силами, то такія силы для данной системы называются, какъ мы видѣли, внутренними; но для каждой отдѣльной точки, силы, съ которыми дѣйствуютъ на нее остальныя точки системы, суть силы внѣшнія; при измѣненіи взаимнаго расположенія точекъ системы можно, поэтому, для каждой изъ нихъ написать равенство (9); остается вѣрнымъ и (9, b). Это показываетъ, что если система точекъ, не подверженная внѣшнимъ силамъ, переходитъ изъ одного расположенія въ другое, то работа внутреннихъ силъ равна увеличенію живой силы системы.

Рис. 39.



Мы доказали, стр. 96, что эта работа не зависитъ отъ того, по какимъ путямъ точки системы перешли изъ начальнаго расположенія въ новое; отсюда слѣдуетъ такая теорема: если система точекъ не подвержена внѣшнимъ силамъ, то измѣненіе ея живой силы при переходѣ изъ одного расположенія въ другое не зависитъ отъ того, по какимъ путямъ точки перешли изъ начальнаго расположенія

въ окончательное. Если система возвращается къ прежнему расположенію, то и живая сила принимаетъ прежнее значеніе.

Намъ остается разсмотрѣть общій случай движенія точки подъ вліяніемъ произвольной движущей силы f (рис. 39) и въ присутствіи произвольнаго сопротивленія f'. Обозначимъ черезъ f_1 и f_1' тангенціальныя слагаемыя силъ f и f' и пусть v_1 и v_2 скорости точки въ положеніяхъ A и B. Тангенціальная слагаемая равнодѣйствующей всѣхъ силъ, вліяющихъ на нашу точку, равна f_1-f_1', а потому (9) стр. (97) даетъ

$$\text{пред.} \sum (f_1 - f_1')\Delta s = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2.$$

И въ этомъ случаѣ мы условимся $f_1\Delta s$ называть элементарною, а пред.$\sum f_1\Delta s$ всею работою движущей силы. Предыдущая формула даетъ

$$\text{пред.} \sum f_1\Delta s = \text{пред.} \sum f_1'\Delta s + \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Мы видимъ, что, въ самомъ общемъ случаѣ, работа движущей силы состоитъ изъ двухъ частей: одна «тратится» на преодолѣваніе сопротивленія, другая на измѣненіе живой силы точки. Если $f_1 > f_1'$, то $v_2 > v_1$ и точка движется ускоренно; она пріобрѣтаетъ живую силу. Если $f_1 < f_1'$, то $v_2 < v_1$ и движеніе точки замедленное—она теряетъ живую силу. Если, наконецъ, $f_1 = 0$, т. е. движущая сила нуль или нормальна къ траекторіи точки, то имѣемъ

$$\text{пред.} \sum f_1'\Delta s = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11,a)$$

Правая сторона уравненія представляетъ потерянную живую силу.

Въ частномъ случаѣ, когда f и f' направлены въ противоположныя стороны и остаются за все время движенія точки неизмѣнными по величинѣ и по направленію, (11) даетъ

$$fh = f'h + \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ, см. формулу $R = fh$ и черт. 34 на стр. (94), h есть проекція пройденнаго пути на направленіе силъ f и f'. Въ случаѣ $f = 0$ имѣемъ

$$f'h = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12.a)$$

Приложимъ выведенныя нами формулы къ случаю движенія тѣла надъ поверхностью земли, пренебрегая при этомъ измѣненіемъ силы тяжести съ высотою и сопротивленіемъ воздуха.

1. При свободномъ паденіи, тѣло находится подъ вліяніемъ силы тяжести, т.-е. своего вѣса p, который играетъ роль движущей силы. Въ этомъ случаѣ $f' = 0$ и (12) даетъ

$$ph = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12,b)$$

Провѣримъ эту формулу для случая паденія тѣла по направленію силы тяжести (по вертикальной линіи). Постоянная сила вызываетъ и постоянное ускореніе, которое мы обозначили черезъ g, см. (12) стр. 70; мы имѣли $p = mg$. Для случая прямолинейнаго движенія мы вывели формулу, см. (22) стр. 56, $v_2^2 - v_1^2 = 2ws$, которая въ нашемъ случаѣ принимаетъ видъ $v_2^2 - v_1^2 = 2gh$. Помножая обѣ стороны этого равенства на $\frac{1}{2}m$ и принимая во вниманіе, что $p = mg$, получаемъ (12,*b*).

2. Положимъ, что тѣло начинаетъ двигаться вверхъ, обладая начальною скоростью v_1. Въ этомъ случаѣ вѣсъ p играетъ роль сопротивленія f' въ (12), между тѣмъ какъ $f = 0$; (12,*a*) даетъ

$$ph = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12,c)$$

И эту формулу легко провѣрить. Тѣло движется подъ вліяніемъ постоянной силы p, имѣющей направленіе, обратное направленію скорости: слѣд. движеніе происходитъ съ ускореніемъ, равнымъ $-g$. На стр. 57 мы имѣли формулу (24): $v_1^2 - v_2^2 = 2gs$. Помножая на $\frac{1}{2}m$ и имѣя въ виду, что $p = mg$, получаемъ (12,*c*).

3. Тѣло движется вертикально вверхъ подъ вліяніемъ приложенной къ нему движущей силы f, имѣющей направленіе этого движенія; вѣсъ тѣла p. Общая формула (11) даетъ для работы R движущей силы выраженіе

$$R = \text{пред.} \sum f\Delta h = ph + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12,d)$$

гдѣ h вся высота подъема, Δh элементъ пути.

Работа, произведенная при поднятіи тѣла, состоитъ изъ двухъ частей; первая есть собственно «работа поднятія», вторая измѣряется живою силою, пріобрѣтенною приподнимаемымъ тѣломъ. Только въ случаѣ $v_2 = v_1$ имѣемъ $R = ph$, т.-е. работа, произведенная при поднятіи тѣла, тогда только равна «работѣ поднятія», когда поднимаемое тѣло въ началѣ и въ концѣ движенія обладаетъ одинаковою скоростью, напр., скоростью нуль. Сила f въ нѣкоторыхъ частяхъ пути h можетъ быть при этомъ и больше p, но зато въ другихъ она должна быть меньше p или даже равняться нулю или отрицательной величинѣ.

При поднятіи килограмма на высоту одного метра тогда только совершается работа въ одинъ килограммъ-метръ, когда поднимаемая масса въ началѣ и въ концѣ поднятія обладаетъ одинаковою скоростью или находится въ покоѣ.

§ 4. Работа и время. Мощность. Существуютъ приборы, снаряды или машины, которыя, при опредѣленныхъ условіяхъ, способны производить опредѣленную работу R въ теченіе опредѣленнаго времени t и, въ теченіе, вообще говоря, неопредѣленно долгаго времени повторять это производство работы R въ каждый изъ послѣдовательныхъ промежутковъ вревремени t, пока необходимыя для этого условія остаются выполненными.

Такъ, напр., паровая машина, при условіи разведенія паровъ и постоянно поддерживаемой топки, или водяной двигатель, при условіи непрерывнаго притеканія къ нему достаточнаго количества воды, могутъ, неопредѣленно долго, производить въ теченіе каждой минуты опредѣленную работу. Побочныя обстоятельства, въ родѣ необходимости исправленія или чистки частей машины, могутъ ограничить срокъ такого ея дѣйствія. Человѣкъ и животныя, при условіи достаточнаго питанія, обладаютъ подобною же способностью, но съ бо̀льшимъ ограниченіемъ срока дѣйствія вслѣдствіе безусловно необходимаго отдыха. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ мы говоримъ, что машина или животное обладаютъ мощностью (англ. power). Эта величина измѣряется тою работою, которую животное или машина, при соблюденіи опредѣленныхъ условій, способны производить въ каждую изъ большого ряда послѣдовательныхъ единицъ времени. Отсюда слѣдуетъ, что абсолютная единица мощности есть мощность машины, способной произвести по одной единицѣ работы въ каждую единицу времени. Такъ, напр., килограммъ-метръ въ секунду представляетъ единицу мощности.

Въ техникѣ общепринята другая единица мощности, названная лошадиною силою: это мощность машины, способной произвести работу въ 75 килогр.-метр. въ сек. Общепринято приписывать машинѣ обладаніе опредѣленною мощностью и въ томъ случаѣ, когда условія, при которыхъ совершеніе ею работы возможно, не соблюдены. Такъ говорятъ о «пяти-сильномъ» двигателѣ; это такой двигатель, который при опредѣленныхъ условіяхъ можетъ произвести 75×5 килогр.-метровъ работы въ 1 сек.

C. G. S. единица мощности есть мощность машины, способной произвести одинъ эргъ въ одну секунду. Въ настоящее время пріобрѣла весьма большое значеніе, въ особенности въ электротехникѣ, единица мощности, получившая названіе ваттъ. Это мощность, развивающая одинъ джуль въ 1 сек.; на стр. 91 мы видѣли, см. (5), какой работѣ равенъ джуль; выражая его въ килогр.-метрахъ и принимая во вниманіе данное нами опредѣленіе лошадиной силы, мы видимъ, что

$$\left.\begin{array}{r} \text{ваттъ} = \text{джуль въ сек.} = 10 \text{ мегаэрг. въ сек.} = \\ = 10^7 \text{ эрг. въ сек.} = 0{,}102 \text{ килогр. м. въ сек.} \\ \text{ваттъ} = \frac{1}{736} \text{ лошад. силы.} \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \quad (13)$$

§ 5. Энергія. Принципъ I. Ученіе объ энергіи должно признать за одинъ изъ важнѣйшихъ, если не за важнѣйшій отдѣлъ современной физики, за незыблемый на вѣки фундаментъ, на который мы должны упираться, стараясь выяснить связь между явленіями окружающей насъ природы.

Если тѣло или группа тѣлъ способны совершать работу, то мы говоримъ, что они обладаютъ энергіею. Чѣмъ больше та работа, которую тѣло или система могутъ совершить, тѣмъ больше, говоримъ мы, ихъ «запасъ» энергіи. Какъ на примѣръ энергіи, укажемъ на энергію движущихся тѣла или системы, которыя, какъ извѣстно изъ еже-

дневнаго опыта, могутъ преодолѣвать разнаго рода сопротивленія, въ томъ числѣ и «сопротивленіе инерціи» (стр. 91) другихъ тѣлъ. Назовемъ эту энергію энергіей движенія. Очевидно, что она вообще тѣмъ больше, чѣмъ больше скорость движенія данныхъ тѣла или системы. Энергію мы условимся измѣрять тою работою, которую тѣло или система могутъ совершить. Обозначая энергію черезъ J, работу черезъ R и принимая коеффиціентъ пропорціональности равнымъ единицѣ, мы имѣемъ

$$J = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Эта формула даетъ $J=1$ при $R=1$, т.-е. абсолютная единица энергіи есть энергія тѣла, способнаго произвести единицу работы. Этой единицѣ энергіи обыкновенно даютъ то-же названіе, какъ и соотвѣтствующей единицѣ работы. Такимъ образомъ килограммъ-метръ, эргъ, мегаэргъ и джуль суть не только единицы работы, но и единицы энергіи. Эргъ есть слѣд. и *C. G. S.* единица энергіи.

Энергіей можетъ обладать не только матерія, но и эфиръ.

Относительно энергіи существуютъ три принципа, изъ которыхъ мы пока изучимъ подробно только два.

Принципъ I. Энергія тѣла или системы тѣлъ есть конечная, однозначная и непрерывная функція состоянія, т.-е. энергія вполнѣ опредѣляется состояніемъ тѣла или системы тѣлъ и безконечно малому измѣненію состоянія соотвѣтствуетъ безконечно малое-же измѣненіе энергіи. Здѣсь «состояніе» слѣдуетъ понимать въ томъ самомъ общемъ смыслѣ, который былъ приданъ этому термину на стр. 26, такъ что состояніе системы тѣлъ опредѣляется совокупностью ея физическихъ свойствъ, взаимнымъ расположеніемъ и скоростями всѣхъ ея частей.

Изъ принципа I вытекаютъ важнѣйшія слѣдствія.

Слѣдствіе 1. Когда тѣло или система, совершая положительную работу, переходитъ изъ какого-либо состоянія A въ другое состояніе B, то вся произведенная ею при этомъ работа не зависитъ отъ способа или пути этого перехода. Мы видѣли, стр. 35, что переходъ изъ одного состоянія въ другое можетъ произойти на безконечное множество манеровъ. Пусть J_1 энергія въ состояніи A; J_2 энергія въ состояніи B. Это значитъ, что, находясь въ состояніи A, система (въ частномъ случаѣ одно тѣло) обладала способностью произвести работу $R_1 = J_1$; перейдя въ состояніе B, она обладаетъ уже способностью произвести лишь меньшую работу $R_2 = J_2$. Еслибы существовалъ такой путь перехода отъ A къ B, при которомъ произведенная работа R была бы больше или меньше разности $R_1 - R_2 = J_1 - J_2$ на какую либо величину ρ, т.-е. $R = R_1 - R_2 \pm \rho$, то переходя по этому пути отъ A къ B и принимая во вниманіе, что въ состояніи B система можетъ совершить работу R_2, мы получили бы, что система въ состояніи A обладаетъ способностью произвести работу $R_2 + R = R_2 + (R_1 - R_2 \pm \rho) = R_1 \pm \rho$, а слѣд. и энергіею $J = R_1 \pm \rho$. Но это противорѣчило-бы принципу I, по которому система въ состояніи A можетъ обладать только однимъ опредѣленнымъ запасомъ $J_1 = R_1$ энергіи.

Слѣдствіе 2. Perpetuum mobile невозможно. Perpetuum mobile есть такая система тѣлъ (напр. машина), которая, будучи приведена въ какое-либо движеніе, продолжала бы двигаться неопредѣленно долго, непрерывно совершая при этомъ работу. Изъ самаго опредѣленія энергіи и изъ принципа I слѣдуетъ, что когда система совершаетъ работу, то ея способность къ дальнѣйшей работѣ должна уменьшиться. Непрерывное производство работы должно сопровождаться непрерывною убылью запаса энергіи движенія (уменьшеніемъ скоростей), который, какъ величина конечная, должна со временемъ истощиться.

Мы не знаемъ достовѣрно, встрѣчаютъ ли небесныя свѣтила при своихъ движеніяхъ сопротивленіе со стороны окружающей ихъ среды. Если такого сопротивленія не существуетъ, то возможность «вѣчнаго движенія» свѣтилъ не противорѣчила бы невозможности perpetuum mobile, ибо при движеніи свѣтилъ не тратилась бы энергія. Но на земной поверхности вѣчное движеніе системы неосуществимо, ибо, какъ мы видѣли (стр. 92), нѣтъ возможности избѣжать вредныхъ сопротивленій, на преодолѣваніе которыхъ непрерывно должна тратиться энергія движенія.

§ 6. Формы или виды энергіи. Изученіе физическихъ явленій показало, что существуетъ цѣлый рядъ различныхъ формъ или видовъ энергіи. Всѣ они раздѣляются на два разряда: энергія бываетъ кинетическая и потенціальная. Кинетическая энергія еще называется явною или энергіей движенія, а потенціальная — скрытою или энергіей положенія.

А. Энергія кинетическая, явная или энергія движенія. Во всѣхъ формахъ кинетической энергіи мы имѣемъ дѣло съ движеніемъ какого-либо вещества, т. е. матеріи или эфира. Найдемъ общее выраженіе для энергіи движенія. Пусть m есть движущаяся масса и v ея скорость въ данный моментъ. Для опредѣленія ея энергіи J, мы должны вычислить ту работу R, которая можетъ быть совершена при переходѣ массы изъ даннаго состоянія (скорость v) въ такое, при которомъ запасъ ея энергіи движенія истощенъ, т.-е. ея скорость нуль. Слѣдствіе 1 (стр. 102) показываетъ, что работа R не зависитъ отъ того, какимъ образомъ былъ совершенъ переходъ отъ движенія къ покою. Предположимъ, поэтому, что на тѣло стала дѣйствовать нѣкоторая постоянная сила f', имѣющая направленіе прямо противоположное направленію начальной скорости v. Подъ вліяніемъ силы f' тѣло начнетъ двигаться съ отрицательнымъ постояннымъ ускореніемъ $-w = -(f' : m)$, т.-е. скорость уменьшится въ единицу времени на w и, наконецъ, дойдетъ до нуля, пройдя нѣкоторый путь, который мы обозначимъ черезъ h. Изъ опредѣленія термина «работа» слѣдуетъ, что когда сопротивленіе f' преодолѣвается на протяженіи пути h, то производится работа R, равная $f'h$. Формула (12,а) стр. 99, въ которой, въ данномъ случаѣ, слѣдуетъ положить начальную скорость $v_1 = v$ и окончательную $v_2 = 0$, даетъ $R = f'h = \frac{1}{2}mv^2$, слѣд. искомая энергія

$$J = R = \frac{1}{2}\,mv^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Энергія движенія тѣла опредѣляется его живою силою. Отсюда слѣдуетъ, что работа, произведенная въ теченіе даннаго времени движущимся тѣломъ, измѣряется потерянною имъ живою силою. Если за это время скорость уменьшилась отъ v_1 до v_2, то произведенная работа R равна

$$R = J_1 - J_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Сравненіе этой формулы съ (9) стр. 97 показываетъ, что если работа совершается внѣшними для тѣла силами, то она измѣряется приращеніемъ живой силы тѣла; если же работа совершается тѣломъ, т.-е. на счетъ его запаса энергіи движенія, то эта работа измѣряется убылью его живой силы. Энергія движенія системы точекъ измѣряется ея живою силою, т.-е. величиною

$$J = \sum \frac{1}{2}mv^2.$$

Переходимъ къ обзору различныхъ видовъ явной энергіи.

I. Энергія движенія тѣла, какъ цѣлаго. Сюда относятся всѣ случаи, при которыхъ сосѣднія частицы матеріи, входящей въ составъ тѣла, обладаютъ одинаковыми или весьма мало другъ отъ друга отличающимися скоростями. Живая сила движенія тѣла служитъ мѣрою той работы, которую тѣло можетъ произвести. Сюда относятся энергія поступательнаго движенія ядра, энергія вращающагося тѣла, энергія вѣтра, текущей воды; далѣе, энергія колебательныхъ движеній тѣлъ или ихъ частей и энергія звуковая также должны быть отнесены сюда, по крайней мѣрѣ въ опредѣленныхъ стадіяхъ этихъ движеній.

II. Энергія тепловая. Теплота есть форма энергіи; на счетъ ея запаса можетъ быть произведена работа. Тепловая энергія измѣряется живою силою безпорядочныхъ движеній частицъ, изъ которыхъ состоитъ тѣло; при этомъ сосѣднія частицы могутъ имѣть скорости, различныя по величинѣ и по направленію. Когда на счетъ тепловой энергіи тѣла совершается работа, то часть этой энергія исчезаетъ, скорость движенія частицъ уменьшается и само тѣло охлаждается. Нѣтъ сомнѣнія, что и тепловая энергія есть величина конечная, хотя до сихъ поръ не удалось исчерпать этого запаса энергіи, т.-е. отнять отъ какого-либо тѣла всю его тепловую энергію.

Абсолютная единица количества теплоты есть такое его количество, которое должно затратить для полученія абсолютной единицы работы.

C. G. S. единица тепла есть эргъ. Для измѣренія тепловой энергіи или, проще, количества теплоты употребляютъ и другія единицы, напр. большую или малую калорію: это тѣ количества тепла, которыя потребны, чтобы нагрѣть одинъ килограммъ или одинъ граммъ воды на 1° Ц. Обозначимъ черезъ Q численное значеніе нѣкотораго количества тепла и черезъ R ту работу, которая получится при его затратѣ. Говорятъ, что тепло Q и работа R другъ другу эквивалентны. Въ какихъ бы еди-

ницахъ мы ни измѣряли Q и R, эти два числа другъ другу пропорціональны, такъ что можно положить

$$R = EQ, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

гдѣ E множитель пропорціональности. Полагая

$$A = \frac{1}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

получаемъ

$$Q = AR \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Коеффиціентъ E называется механическимъ эквивалентомъ тепла; это то число единицъ работы, которыя эквивалентны одной единицѣ тепла, ибо (17) даетъ $R = E$ при $Q = 1$. Обратный коеффиціентъ A называется термическимъ коеффиціентомъ работы; это то число единицъ тепла, которыя эквивалентны одной единицѣ работы, ибо (19) даетъ $Q = A$ при $R = 1$.

Опыты, которые мы подробно разсмотримъ въ отдѣлѣ о теплотѣ, показали, что если за единицу теплоты принять большую калорію и за единицу работы килограммъ-метръ, то $E = 426$; это означаетъ, что

Большая калорія эквивалентна 426 килогр.-метрамъ. . (20)

Принимая во вниманіе соотношенія (5) стр. 91, мы легко находимъ связь между абсолютными единицами тепла и калоріей. Изъ этихъ соотношеній слѣдуетъ, что килогр.-метръ равенъ 98,1 мегаэрга = 9,81 джуля; съ другой стороны малая калорія, равная 0,001 большой калоріи, эквивалентна 0,426 килогр.-метра. Отсюда легко получается:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Малая калорія} = 41{,}6 \text{ мегаэрга} = 4{,}16 \text{ джуля.}\\ \text{Джуль} = 0{,}24 \text{ мал. калоріи.}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

Въ ученіи о теплотѣ мы подробнѣе разберемъ этотъ вопросъ и дадимъ болѣе строгое опредѣленіе калоріи.

III. Лучистая энергія эфира. Мы видѣли на стр. 8, что въ эфирѣ могутъ происходить пертурбаціи, распространяющіяся отъ одного мѣста къ другому. Часть эфира, въ которой совершается пертурбація, обладаетъ запасомъ энергіи, который измѣряется живою силою движенія частицъ эфира. Распространеніе пертурбаціи есть не что иное, какъ передача энергіи отъ однѣхъ частей эфира къ другимъ. Скорость v этой передачи въ свободномъ эфирѣ (пустота въ обыденномъ смыслѣ слова) не зависитъ отъ характера пертурбаціи, т.-е. отъ вида передаваемаго движенія и равна

$$v = 300{,}000 \text{ килом. въ сек.} = 3 \,.\, 10^{10} \text{ сантим. въ сек.} \quad \ldots \quad (22)$$

Примѣрами лучистой энергіи эфира могутъ служить видимый свѣтъ, невидимые лучи (т. наз. ультракрасные, которые прежде назывались тепло-

выми и лучи ультрафіолетовые) и электрическіе лучи Герца, которые мы разсмотримъ впослѣдствіи (Часть II, Гл. первая).

IV. Кинетическая энергія эфира, называемая электрическимъ токомъ (электрическая энергія тока). Электрическій токъ представляетъ собою явленіе, условія возникновенія котораго весьма хорошо извѣстны, равно какъ и законы, которымъ оно подчиняется. О внутренней сущности этого явленія мы, однако, не имѣемъ яснаго, установившагося въ наукѣ представленія. Съ достовѣрностью мы можемъ только сказать, что электрическій токъ представляетъ особый случай энергіи движенія эфира, которымъ можно воспользоваться для производства работы (электрическіе двигатели). Но о характерѣ движенія и даже о томъ мѣстѣ, гдѣ оно происходитъ, намъ ничего достовѣрнаго неизвѣстно. Прежде полагали, что электрическая энергія тока всецѣло содержится въ тѣхъ проводникахъ (напр. проволокахъ), черезъ которые, какъ принято говорить, «токъ течетъ». Но есть поводъ полагать, что эта энергія большею частью, или вся содержится въ эфирѣ пространства, окружающаго упомянутые проводники.

B. Энергія потенціальная, скрытая или энергія положенія. Мы встрѣчаемъ въ природѣ разнообразные случаи энергіи, т.-е. способности производить работу, зависящей отъ взаимнаго расположенія двухъ или многихъ тѣлъ. Теоретически говоря, отдѣльная матеріальная точка можетъ обладать только кинетическою энергіею (движенія); потенціальною же энергіей можетъ обладать только совокупность по крайней мѣрѣ двухъ матеріальныхъ точекъ. Для этого необходимо, чтобъ между этими двумя матеріальными точками существовало стремленіе сблизиться другъ съ другомъ или стремленіе удалиться другъ отъ друга или, вообще, чтобы присутствіе одного тѣла вызывало силу, дѣйствующую на другое тѣло. Вопросъ о причинахъ возникновенія такой силы мы оставимъ въ сторонѣ.

a) Если два тѣла стремятся сблизиться или, какъ принято говорить, взаимно «притягиваются», то это стремленіе можетъ явиться источникомъ работы, выражающейся либо въ преодолѣваніи внѣшнихъ сопротивленій, противодѣйствующихъ сближенію тѣлъ, либо въ преодолѣваніи инерціи самихъ тѣлъ, пріобрѣтающихъ ускоренное движеніе. Запасъ энергіи, очевидно, тѣмъ больше, чѣмъ дальше тѣла находятся другъ отъ друга и уменьшается, когда, производя работу, тѣла сближаются. Итакъ, мы видимъ, что запасъ энергіи въ этомъ случаѣ зависитъ отъ взаимнаго расположенія тѣлъ.

b) Если два тѣла стремятся удалиться другъ отъ друга или, какъ принято говорить, взаимно «отталкиваются», то и это стремленіе можетъ явиться источникомъ работы. Запасъ энергіи тѣмъ больше, чѣмъ ближе тѣла находятся другъ къ другу; онъ уменьшается по мѣрѣ удаленія ихъ другъ отъ друга. Ясно, что и въ этомъ случаѣ запасъ энергіи зависитъ отъ взаимнаго расположенія тѣлъ.

Понятно, почему въ этихъ двухъ случаяхъ энергія называется энергіей скрытой или энергіей положенія.

Вопроса о причинахъ стремленія тѣлъ сблизиться или удалиться

другъ отъ друга мы здѣсь касаться не будемъ. Разсмотримъ различные виды потенціальной энергіи.

I. Энергія массъ, притягивающихся по закону всемірнаго тяготѣнія. Совокупность всякихъ двухъ несоприкасающихся массъ обладаетъ, вслѣдствіе существующаго между ними тяготѣнія, энергіей положенія. Солнце и любая планета, взятыя вмѣстѣ, или напр. земля и луна взятыя вмѣстѣ, обладаютъ весьма большимъ запасомъ потенціальной энергіи.

Принято говорить объ энергіи приподнятаго тѣла, ибо всякое тѣло, поднятое до нѣкотораго горизонта надъ поверхностью земли, способно, опускаясь, производить работу. Но, строго говоря, въ данномъ случаѣ энергіей обладаетъ не приподнятое тѣло, но совокупность двухъ притягивающихся тѣлъ: земли и приподнятаго тѣла.

Потенціальная энергія притяженія системы тѣлъ или матеріальныхъ точекъ зависитъ (принципъ I, стр. 102) только отъ ихъ взаимнаго расположенія. При всякомъ сгущеніи системы производится работа, величина которой зависитъ только отъ первоначальнаго и окончательнаго расположенія частицъ. При переходѣ матеріи, составляющей свѣтило, изъ первоначальнаго разрозненнаго состоянія (тумана) въ болѣе сгущенное, происходитъ огромная потеря потенціальной энергіи, на счетъ которой производится эквивалентная работа. Потенціальная энергія приподнятыхъ гирь стѣнныхъ часовъ служитъ источникомъ совершающейся въ часахъ работы. Потенціальная энергія облаковъ служитъ источникомъ работы водяныхъ мельницъ и т. д.

II. Энергія положенія однородныхъ частицъ. Между частицами однородныхъ тѣлъ дѣйствуютъ особаго рода силы, характеръ которыхъ еще мало извѣстенъ. Смотря по условіямъ, частицы обнаруживаютъ стремленіе сблизиться или удалиться другъ отъ друга и въ этомъ заключается источникъ запаса потенціальной энергіи положенія частицъ.

Сюда относится энергія упруго-измѣненнаго тѣла. Пружина, смотря по ея виду, согнутая, сдавленная, растянутая или скрученная, обладаетъ способностью произвести работу, при совершеніи которой она разгибается, удлиняется, укорачивается или раскручивается, теряя при этомъ часть запаса разсматриваемой энергіи, т.-е. способности къ дальнѣйшей работѣ. Измѣненіе во взаимномъ расположеніи частицъ, сопровождающее деформацію упругаго тѣла и является здѣсь причиною возникновенія потенціальной энергіи положенія.

Сюда же относится та энергія положенія частицъ, которая особенно рѣзко мѣняется при переходѣ тѣлъ изъ твердаго состоянія въ жидкое и изъ жидкаго въ газообразное и обратно и менѣе рѣзко при всякомъ измѣненіи объема тѣла или его температуры. Мы увидимъ далѣе, что величина, извѣстная изъ элементарнаго курса физики подъ названіемъ «скрытой теплоты», находится въ тѣсной связи съ разсматриваемымъ видомъ энергіи положенія.

III. Энергія химическая. Совокупность двухъ тѣлъ, способныхъ соединиться химически, обладаетъ способностью произвести работу. Уголь и кислородъ, водородъ и хлоръ, сѣрная кислота и вода обладаютъ, попарно,

запасомъ химической энергіи, которой можно воспользоваться для производства работы (горѣніе угля, какъ источникъ работы въ паровыхъ двигателяхъ). Когда изъ атомовъ образуется молекула, то послѣдняя уже не обладаетъ тѣмъ запасомъ химической энергіи, которая въ моментъ образованія молекулы была потрачена на производство работы. Необходимо замѣтить, что два атома одной и той же матеріи также обладаютъ потенціальной энергіей, если молекула этой матеріи содержитъ два или большее число атомовъ. Такъ, напр., два атома водорода H, до соединенія ихъ въ молекулу H_2, обладаютъ особою потенціальною энергіей; то-же самое относится и къ двумъ атомамъ іода J, до соединенія ихъ въ молекулу J_2. Оказывается, что потенціальная энергія, которая тратится при образованіи одной молекулы H_2 и одной молекулы J_2, даже больше той, которая тратится при образованіи двухъ молекулъ соединенія HJ (іодистый водородъ). Къ разсматриваемому виду потенціальной энергіи относится и энергія взрывчатыхъ смѣсей, какъ напр. пороха.

IV. Энергія электростатическая. Мы видѣли, стр. 8, что въ эфирѣ могутъ происходить деформаціи, подобно тому, какъ въ матеріи. Деформированный эфиръ содержитъ запасъ потенціальной энергіи, аналогичной энергіи упруго-измѣненнаго тѣла. Пространство, занимаемое деформированнымъ эфиромъ, представляя особый случай динамическаго поля, называется электрическимъ полемъ. Матерія, помѣщенная въ такое поле, обнаруживаетъ разнаго рода явленія. Если она принадлежитъ къ т. наз. проводникамъ (напр. къ металламъ), то деформаціи (натяженія) упираются на ея поверхность, вслѣдствіе чего она подвергается особаго рода давленіямъ, могущимъ заставить ее перемѣститься въ томъ или другомъ направленіи. Такой проводникъ называется «наэлектризованнымъ» и принято ему приписывать ту энергію, которая, въ дѣйствительности, содержится въ окружающемъ эфирѣ. Если въ электрическомъ полѣ находятся нѣсколько проводниковъ, то, смотря по расположенію деформацій, эти тѣла будутъ стремиться либо сблизиться, либо удалиться другъ отъ друга, т.-е. какъ бы притягиваться или отталкиваться. Внутри проводниковъ устойчивая деформація эфира невозможна; внутри же непроводниковъ, т. наз. діэлектриковъ, эфиръ можетъ подвергаться деформаціямъ и въ этомъ случаѣ говорятъ, что діэлектрикъ поляризованъ; и въ немъ замѣчается стремленіе перемѣщаться въ электрическомъ полѣ въ томъ или другомъ направленіи. Электрическая энергія деформаціи эфира можетъ тратиться на работу перемѣщенія проводниковъ и непроводниковъ или на работу вызыванія пертурбаціи въ самомъ эфирѣ.

«Заряженная» лейденская банка есть тѣло, заключающее въ себѣ запасъ электрической энергіи, состоящей почти только изъ потенціальной энергіи деформированнаго эфира, находящагося въ стеклѣ банки. При «разрядѣ» банки можетъ быть произведена работа (напр. пробиваніе стеклянной пластинки) на счетъ запаса электрической энергіи.

V. Энергія магнитная. Скажемъ и объ этой формѣ нѣсколько словъ, хотя она вѣроятно тожественна съ разсмотрѣнной выше электрической энергіей тока. Полюсы естественныхъ и искусственныхъ магнитовъ

стремятся или сблизиться (неодноименные полюсы) или удалиться другъ отъ друга (одноименные полюсы). Отсюда слѣдуетъ, что совокупность двухъ магнитовъ обладаетъ особою формою энергіи положенія, которую назовемъ энергіей магнитной. И она, несомнѣнно, по существу есть энергія, принадлежащая эфиру того пространства, которое окружаетъ магниты. Это пространство, также представляя частный случай динамическаго поля, называется магнитнымъ полемъ. Но мы увидимъ впослѣдствіи, что пространство, окружающее электрическіе токи, по своимъ свойствамъ абсолютно ничѣмъ не отличается отъ пространства, окружающаго магниты; слѣд. первое есть также магнитное поле. Отсюда можно заключить о внутренней тожественности электрической энергіи тока и т. наз. магнитной энергіи.

Покончивъ съ обзоромъ видовъ энергіи, мы замѣтимъ слѣдующее: весьма вѣроятно, что потенціальной энергіи въ мірѣ вовсе не существуетъ, что энергія только и можетъ быть энергіей движенія и что во всѣхъ случаяхъ, когда намъ кажется, что наличность энергіи зависитъ только отъ наличности опредѣленнаго расположенія тѣлъ, въ дѣйствительности мы имѣемъ дѣло съ какою-либо особою формою движенія, причемъ намъ пока только неизвѣстно, что̀ движется и каковъ характеръ движенія. Нѣкоторыя формы энергіи, которыя прежде причислялись къ потенціальнымъ, нынѣ причисляются къ формамъ кинетическимъ. Такъ, напр., энергія сжатаго газа, очевидно способнаго произвести работу, прежде считалась за энергію потенціальную. На стр. 34 было указано, какимъ образомъ нынѣ объясняется давленіе газовъ и ихъ стремленіе расшириться. Изъ этого объясненія явствуетъ, что энергія сжатаго газа есть энергія движенія его частицъ, тожественная съ энергіей тепловой и слѣд. есть форма энергіи кинетической.

§ 7. Принципъ II. Сохраненіе энергіи. Въ предыдущихъ параграфахъ мы познакомились съ энергіей, какъ со способностью производить работу; работа же выражается или преодолѣваніемъ силы, сопротивляющейся движенію тѣла, или преодолѣваніемъ инерціи тѣла, т.-е. увеличеніемъ его скорости. Далѣе мы разсмотрѣли различные виды энергіи кинетической и потенціальной.

Эквивалентными количествами энергіи различнаго вида называются количества, численно равныя, т.-е. соотвѣтствующія способности произвести одинаковую работу. Мы теперь можемъ формулировать:

Принципъ II. Энергія не исчезаетъ и не образуется вновь; но энергія одного вида можетъ перейти въ эквивалентное количество энергіи другого вида. Это принципъ сохраненія энергіи. Тщательное изученіе окружающихъ насъ явленій привело къ открытію этой великой истины, составляющей одинъ изъ главныхъ фундаментовъ современной физики и играющей въ ней одинаковую роль съ принципомъ сохраненія вещества, лежащимъ въ основаніи химіи.

Изъ принципа II вытекаетъ рядъ слѣдствій.

Слѣдствіе 1. Результатомъ всякой произведенной работы *R* должно явиться эквивалентное этой работѣ количество

энергіи какой-либо формы. Дѣйствительно: работа R могла быть произведена только на счетъ запаса какой-либо энергіи, который при этомъ уменьшается на нѣкоторую величину J, численно равную R. Но второй принципъ говоритъ, что энергія не можетъ исчезнуть, но можетъ лишь перейти въ другой видъ, а потому уменьшеніе даннаго запаса энергіи на величину J должно сопровождаться одновременнымъ появленіемъ такого же количества J энергіи той-же или иной формы, которое и можно разсматривать, какъ результатъ или слѣдствіе произведенной работы R.

Всѣ явленія окружающей насъ природы, если въ нихъ заключается признакъ чего либо измѣняющагося, существенно заключаются въ превращеніяхъ одного вида энергіи въ другой. Работа является лишь промежуточнымъ, связующимъ звеномъ: она производится на счетъ той энергіи, запасъ которой уменьшается, а ея результатомъ является эквивалентное увеличеніе запаса другой энергіи. Система (или отдѣльное тѣло), обладавшая первымъ запасомъ, отдаетъ энергію и «производитъ работу». Система, въ которой накопляется новая энергія, является объектомъ, надъ которымъ остальной міръ совершаетъ работу, преодолѣвая исходящія отъ нея сопротивленія; въ этомъ случаѣ условились говорить, что эта система совершаетъ отрицательную работу.

Слѣдствіе 1 показываетъ, что всякое преодолѣваніе сопротивленія сопряжено съ появленіемъ какой-либо формы энергіи.

Для случая энергіи движенія, т.-е. живой силы, всѣ упомянутыя здѣсь соотношенія уже доказаны нами вполнѣ строго: мы видѣли (стр. 104), что работа, совершенная на счетъ запаса живой силы системы, измѣряется уменьшеніемъ этого запаса и что, наоборотъ, система, подверженная дѣйствію внѣшнихъ силъ, т. е. система, надъ которой внѣшній міръ совершаетъ работу или которая совершаетъ отрицательную работу, пріобрѣтаетъ живую силу, которая измѣряется этою работою, заключающеюся въ преодолѣваніи инерціи системы. Понятно, что мы при этомъ предполагаемъ, что вся работа идетъ только на увеличеніе скорости частей системы.

То, что строго доказано для живой силы, распространяется вторымъ принципомъ на всѣ формы энергіи: преодолѣваніе сопротивленія всегда сопровождается появленіемъ эквивалентнаго количества какой-либо формы энергіи.

Слѣдствіе 2. Если система (или одно тѣло) возвращается къ первоначальному состоянію, то вся работа, произведенная исходящими отъ нея силами, равна нулю. Принципъ I показываетъ, что запасъ энергіи системы принимаетъ первоначальное значеніе, а потому произведенная ею работа должна равняться той работѣ, которая совершена надъ нею внѣшнимъ міромъ и которую мы условились считать за отрицательную работу самой системы. Сумма работъ системы равна слѣд. нулю.

Принципъ сохраненія энергіи въ его самомъ общемъ видѣ не можетъ быть доказанъ, т.-е. выведенъ изъ началъ механики. Еслибы можно было доказать, что всѣ силы, дѣйствующія въ природѣ, суть силы центральныя (см. стр. 95), то и принципъ сохраненія энергіи могъ бы быть выведенъ

съ полною строгостью. Но пока мы этого сдѣлать не можемъ и должны смотрѣть на этотъ принципъ, какъ на истину, добытую путемъ индукціи и подтверждаемую всѣми явленіями окружающей природы.

Слѣдствіе 3. Энергія системы, между которой и остальнымъ міромъ нѣтъ механическихъ соотношеній, есть величина постоянная. Весь запасъ энергіи, содержащійся въ системѣ и могущій состоять изъ разнородныхъ частей, можетъ подвергаться всевозможнымъ преобразованіямъ; полное количество энергіи остается постояннымъ.

Не слѣдуетъ распространять этой истины на весь міръ и говорить «энергія міра постоянна», ибо о мірѣ, какъ цѣломъ, мы ничего не знаемъ и потому не имѣемъ права распространять на него того, что эмпирически найдено для доступной нашему наблюденію его части.

Мы упомянули, что въ явленіяхъ окружающей природы мы имѣемъ дѣло съ непрерывными превращеніями энергіи изъ одного вида въ другой. Считаемъ излишнимъ разъяснять это большимъ числомъ примѣровъ; ограничиваемся немногими. Тѣло падаетъ: переходъ потенціальной энергіи поднятаго тѣла въ кинетическую энергію движенія и затѣмъ, при ударѣ объ землю, въ теплоту, которая переходитъ въ энергію лучистую. Колебанія упругой пластинки: непрерывные переходы энергіи упруго-измѣненнаго тѣла въ энергію движенія и обратно. Паровой двигатель: химическая энергія топлива въ тепловую энергію пара и затѣмъ въ энергію движенія частей машины. Сгущеніе системы, напр. тумана при образованіи свѣтила: потенціальная энергія притягивающихся массъ въ энергію поступательнаго движенія, а затѣмъ, когда происходитъ соудареніе частицъ, въ энергію тепловую. Въ растеніяхъ лучистая энергія солнечныхъ лучей переходитъ въ химическую энергію образующихся органическихъ соединеній, которая при питаніи человѣка и животныхъ, сосредоточиваясь въ мышцахъ, составляетъ запасъ энергіи, которымъ, въ опредѣленной мѣрѣ, располагаетъ воля; при совершеніи человѣкомъ или животнымъ работы, этотъ запасъ уменьшается. Въ дальнѣйшемъ мы встрѣтимся со многими примѣрами перехода одного вида энергіи въ другой и примѣненіями принципа сохраненія энергіи.

§ 8. Принципъ III. Переходы энергіи изъ одного вида въ другой подчиняются еще одному принципу, который мы впослѣдствіи разберемъ подробно, но на который мы, ради полноты, считаемъ необходимымъ указать уже здѣсь.

Принципъ III. Въ превращеніяхъ энергіи существуетъ особаго рода сторонность. Одни превращенія могутъ происходить сполна и сами собою, другія-же лишь при особыхъ условіяхъ и притомъ только часть даннаго запаса энергіи можетъ подвергнуться разсматриваемому превращенію. Напр., превращеніе «работы въ теплоту», или, точнѣе, запаса любой формы энергіи, потраченной на производство этой работы—въ теплоту, можетъ происходить само собою и притомъ вся работа можетъ дать эквивалентное количество теплоты. При паденіи приподнятаго камня вся его энергія движенія превращается въ теплоту; тоже самое происходитъ при всякомъ треніи, замедляющемъ движеніе. Вся энергія электрическаго тока можетъ сама собою превратиться

въ теплоту. Наоборотъ, невозможно затратить данный запасъ тепловой энергіи на производство работы безъ того, чтобы эта затрата не сопровождалась нѣкоторыми посторонними явленіями, причемъ оказывается, что лишь часть запаса тепловой энергіи полезно затрачивается на производство работы, другая же часть окончательно теряетъ способность при данныхъ условіяхъ произвести работу.

Другимъ примѣромъ превращенія энергіи можетъ служить уменьшеніе кинетической энергіи быстро движущихся частицъ и одновременное эквивалентное увеличеніе энергіи другихъ, болѣе медленно движущихся частицъ, иначе выражаясь — переходъ тепла отъ болѣе нагрѣтаго къ болѣе холодному тѣлу. И это превращеніе постоянно происходитъ само собою. Обратное же превращеніе возможно только при особыхъ условіяхъ, которыя разсмотримъ впослѣдствіи. Пока ограничиваемся этимъ краткимъ указаніемъ на существованіе сторонности въ превращеніяхъ одного вида энергіи въ другой.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Гармоническое колебательное движеніе.

§ 1. Геометрическое происхожденіе гармоническаго колебательнаго движенія. Между различными движеніями, съ которыми приходится имѣть дѣло, изучая физическія явленія, играютъ особенно важную роль т. наз. періодическія движенія, т.-е. такія, при которыхъ данная точка неопредѣленное число разъ повторяетъ одно и то же движеніе, употребляя на это каждый разъ одинаковое время T. Въ какой бы мы моментъ времени ни опредѣлили положеніе точки и величину и направленіе ея движенія, спустя время T точка будетъ находиться на томъ же мѣстѣ и обладать такою же, по величинѣ и по направленію, скоростью. Періодическія движенія могутъ быть безконечно разнообразны, какъ по виду траекторіи, по которой движется точка, такъ и по характеру самого движенія; простѣйшее по характеру періодическое движеніе есть равномѣрное движеніе по окружности.

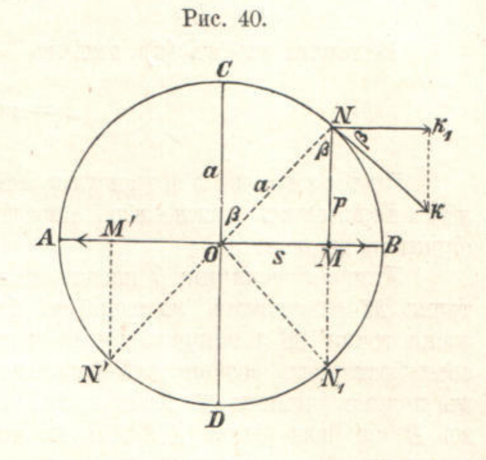
Изъ всѣхъ періодическихъ движеній слѣдуетъ, однако, наиболѣе важнымъ признать т. наз. гармоническое колебательное движеніе, ибо всякое періодическое движеніе можетъ быть получено какъ результатъ сложенія бóльшаго или меньшаго числа (иногда безконечно многихъ) гармоническихъ колебательныхъ движеній. Какъ показываетъ само названіе, эти послѣднія движенія имѣютъ характеръ «колебаній», т.-е. точка движется взадъ и впередъ по отрѣзку кривой между двумя опредѣленными крайними его точками. Намъ вообще придется разсматривать только движенія по отрѣзку прямой и по дугѣ круга, а пока ограничимся изслѣдованіемъ перваго случая, т.-е. прямолинейнаго гармоническаго колебательнаго движенія; для краткости, мы въ дальнѣйшемъ будемъ отбрасывать слово «прямолинейное».

Оставляя пока въ сторонѣ вопросъ о механическихъ условіямъ, при

которыхъ точка совершаетъ гармоническое колебательное движеніе, укажемъ прежде всего на геометрическія условія его происхожденія.

Вообразимъ окружность $ACBDA$ (рис. 40) и пусть ея радіусъ $OA = a$; по этой окружности, черезъ центръ O которой проводимъ діаметръ AOB, движется точка N съ постоянною скоростью k. Движеніе, которое въ этомъ случаѣ совершаетъ проекція M точки N на діаметръ AB ($NM \perp AB$) будемъ называть **гармоническимъ колебательнымъ движеніемъ**. Общій характеръ его опредѣляется изъ слѣдующаго: когда N находится въ C, точка M совпадаетъ съ O; пока N проходитъ первую четверть CB окружности, точка M перемѣщается отъ O къ B, въ каковой точкѣ M и N совпадаютъ; когда затѣмъ N движется по второй четверти BD окружности, M идетъ обратно отъ B къ O; далѣе N проходитъ третью четверть DA въ то время, какъ M движется отъ O къ A; наконецъ движенію точки N по четвертой четверти AC соотвѣтствуетъ возвращеніе M отъ A къ O. Далѣе это же движеніе повторяется неопредѣленное число разъ, совершаясь между крайними точками A и B. Крайнее разстояніе $OA = OB = a$, на которое точка M удаляется отъ своего средняго положенія O, называется **амплитудою** (полуразмахомъ) колебательнаго движенія. Время, потребное для совершенія одного полнаго колебанія, обозначимъ черезъ T; оно называется также **періодомъ** колебанія. Въ началѣ и въ концѣ времени T точка M находится въ одномъ и томъ же мѣстѣ и обладаетъ одинаковою по величинѣ и **по направленію** скоростью. Такъ, напр. за время T точка можетъ пройти путь $OBOAO$ или $MBMOAOM$; въ это же время N описываетъ полную окружность (соотвѣтственно $CBDAC$ или NBN_1DACN).

Рис. 40.



Между амплитудой a, скоростью k точки N и временемъ T существуетъ простая зависимость, которую мы получимъ, написавъ, что точка N, двигаясь равномѣрно со скоростью k, проходитъ во время T путь $2\pi a$. Это даетъ намъ равенство

$$2\pi a = kT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

§ 2. Пройденный путь и фаза при гармоническомъ колебательномъ движеніи. Обозначимъ перемѣнное разстояніе OM точки M отъ ея средняго положенія O черезъ s и выразимъ s, какъ функцію времени t, считаемаго отъ момента, когда точка M, находясь въ O, движется по направленію OB, въ которомъ мы величины s будемъ считать положительными. Обозначимъ $\angle CON = \angle ONM$ черезъ β. Изъ рис. 40 видно, что

$$s = a \sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Въ теченіе времени t точка N перешла отъ C къ N; такъ какъ она движется равномѣрно, то дуга CN должна относиться къ полной окружности, какъ t къ T. Дуги относятся, какъ центральные углы, слѣд.

$$\frac{\beta}{2\pi}=\frac{t}{T},$$

откуда

$$\beta=2\pi\frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Вставляя это въ (2), имѣемъ

$$s=a\sin 2\pi\frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

Это основная формула въ ученіи о гармоническомъ колебательномъ движеніи, опредѣляющая перемѣнное разстояніе s, какъ функцію времени t.

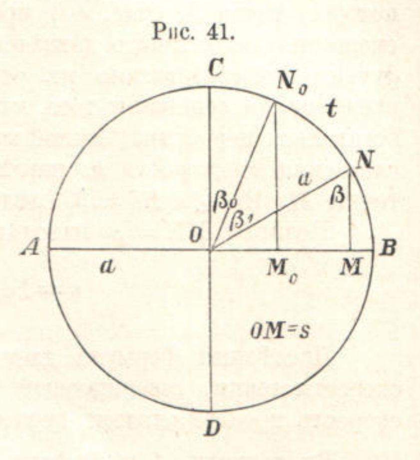
Угловая величина β называется фазою, и мы будемъ говорить, что точка M «находится въ такой-то фазѣ». Фаза опредѣляетъ собою положеніе точки M и направленіе ея движенія. Одному и тому же положенію соотвѣтствуютъ вообще двѣ фазы въ каждомъ отдѣльномъ колебаніи, т.-е. въ теченіе времени T. Такъ, напр., когда точка находится въ M, двигаясь къ B, ея фаза равна $\angle CON$; но когда она, дойдя до B, затѣмъ возвратится въ M, двигаясь далѣе къ O, то ея фаза уже будетъ равна $\angle CON_1$. Измѣненіе фазы на уголъ $\pm 2n\pi$, гдѣ n цѣлое число, не мѣняетъ ни положенія точки M, ни направленія ея движенія. Поэтому фазы, отличающіяся на $\pm 2n\pi$ (цѣлое число окружностей), часто считаются за фазы одинаковыя. Формулы (3) и (4) даютъ такія соотношенія между t, β и s:

$$\left.\begin{array}{lcccc} t=0 & \frac{T}{4} & \frac{T}{2} & \frac{3T}{4} & T \\ \beta=0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi(0) \\ s=0 & a & 0 & -a & 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

Фазы, отличающіяся на π или, что то же самое, на $\pm(2n+1)\pi$, называются фазами противоположными. Продолжая прямую NO до N' и проводя $N'M' \perp AB$, находимъ точку M', которая, двигаясь налѣво, находится съ точкою M, движущейся направо, въ противоположныхъ фазахъ. Два положенія A и B или два положенія O (при различно направленныхъ скоростяхъ) соотвѣтствуютъ противоположнымъ фазамъ. Ясно, что какова бы ни была фаза въ данный моментъ, черезъ время $\frac{T}{2}$ фаза будетъ противоположная. Такъ какъ $s=a\sin(\beta\pm\pi)=-a\sin\beta$, то ясно, что противоположнымъ фазамъ соотвѣтствуютъ два разстоянія s, одинаковыя по величинѣ, но различныя по знаку и въ то же время двѣ противоположно направленныя скорости.

Обобщимъ формулу (4), полагая, что время считается съ произвольнаго момента и пусть при $t=0$ наша точка находится въ M_0 (рис. 41); проводя $M_0N_0 \perp AB$ и соединяя N_0 съ O, находимъ т. наз. начальную фазу $\beta_0 = \angle CON_0$. Положимъ, что въ теченіе времени t точка перешла отъ M_0 въ M; въ это же время точка, равномѣрно движущаяся по окружности, прошла дугу N_0N, гдѣ $NM \perp AB$. Пусть $\angle N_0ON = \beta_1$. Фазу точки M обозначимъ черезъ β; мы имѣемъ $\beta = \angle CON = \angle ONM$ и по прежнему $s = OM = a \sin \beta$. Но $\beta = \angle CON = \angle CON_0 + \angle N_0ON = \beta_0 + \beta_1$. Для β_1 имѣемъ

Рис. 41.



$$\frac{\beta_1}{2\pi} = \frac{t}{T}; \text{ слѣд. } \beta = \beta_1 + \beta_0 = 2\pi \frac{t}{T} + \beta_0 .$$

Вставляя это въ $s = a \sin \beta$, получаемъ окончательно

$$s = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_0\right) . \quad . \quad . \quad (6)$$

Если время считать отъ момента, когда точка находится въ крайнемъ положеніи B, то $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$; тогда получается

$$s = a \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

что при $t=0$ даетъ $s=a$. Формула (6) показываетъ, что промежутокъ времени τ между моментомъ, когда точка, находясь въ O, движется въ положительную сторону (къ B) и моментомъ $t=0$, отъ котораго мы считаемъ время t, связанъ съ начальною фазою β_0 и съ видомъ функціи $s=f(t)$ слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{array}{llllll} \tau = & 0 & \frac{T}{4} & \frac{T}{2} & \frac{3T}{4} & T \\ \beta_0 = & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi\,(0) \\ s = & a\sin 2\pi\frac{t}{T} & a\cos 2\pi\frac{t}{T} & -a\sin 2\pi\frac{t}{T} & -a\cos 2\pi\frac{t}{T} & a\sin 2\pi\frac{t}{T} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

§ 3. Скорость, ускореніе, сила и энергія при гармоническомъ колебательномъ движеніи. Скорость v точки M, совершающей гармоническое колебательное движеніе, можетъ быть найдена различными способами. На основаніи общаго выраженія для скорости, (8) стр. 51, и пользуясь формулой (44) стр. 39, мы находимъ изъ выраженія (4)

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Обозначая фазу вообще черезъ β, получаемъ на основаніи (1) стр. 113

$$v = k\cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

При $\beta = 0$ имѣемъ скорость $v_0 = k$; это показываетъ, что скорость, съ которою точка M (рис. 40) проходитъ черезъ среднее положеніе O, равна скорости равномѣрнаго движенія точки N по окружности. Формула (10) получена непосредственно на основаніи (44) стр. 39; она же можетъ быть выведена на основаніи того, что прямая MN (рис. 40) постоянно должна оставаться перпендикулярной къ AB. Дѣйствительно, отсюда слѣдуетъ, что слагаемая k_1 скорости k, параллельная AB, должна равняться скорости v точки M. Но $\angle k_1 N k = \beta$, слѣд. $v = k_1 = k\cos\beta$.

Полагая $MN = p$, находимъ

$$v = k\cos\beta = \frac{2\pi}{T} a\cos\beta = \frac{2\pi}{T} p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Послѣдняя формула даетъ ясное представленіе о законѣ измѣненія скорости точки, совершающей гармоническое колебательное движеніе: эта скорость пропорціональна перпендикуляру p къ діаметру AB.

Въ точкахъ A и B фаза $\beta = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, и (10) даетъ $v = 0$.

Ускореніе w точки M получается на основаніи общаго выраженія (27) стр. 57 и формулы (45) стр. 39:

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

или

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Формула (4) даетъ

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Мы видимъ, что ускореніе пропорціонально разстоянію точки отъ ея средняго положенія O и постоянно направлено къ этой точкѣ O, ибо при $s > 0$, w отрицательно, т.-е. направлено отъ B къ O, а при $s < 0$, w положительно, т.-е. направлено отъ A къ O. Въ точкѣ O имѣемъ $w = 0$; въ точкахъ A и B ускореніе наибольшее и равно $\pm \frac{4\pi^2 a}{T^2}$. Полагая

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

имѣемъ

$$w = -cs \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Четыре величины a, T, $v_0 = k$ и c связаны двумя уравненіями (1) и (15). Изъ нихъ получается

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

и

$$v_0 = k = \frac{2\pi a}{T} = a\sqrt{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Формулы (11) и (15) даютъ

$$v = p\sqrt{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

или, такъ какъ (см. рис. 40) $p^2 = a^2 - s^2$,

$$v^2 = c(a^2 - s^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Этою формулою выражается связь между скоростью v и разстояніемъ s; (20) и (18) даютъ еще

$$v^2 + cs^2 = v_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Разсмотрѣвъ геометрическія условія возникновенія гармоническаго колебательнаго движенія и разобравъ нѣкоторыя его свойства, мы теперь уже легко можемъ опредѣлить и механическія условія, при которыхъ матеріальная точка, масса которой m, совершаетъ таковое движеніе, т.-е. тотъ законъ, по которому должна дѣйствовать на массу m внѣшняя сила f, чтобы эта масса подъ ея вліяніемъ совершала гармоническое колебательное движеніе. На основаніи общей формулы $f = mw$, см. (5) стр. 67, имѣемъ, см. (16),

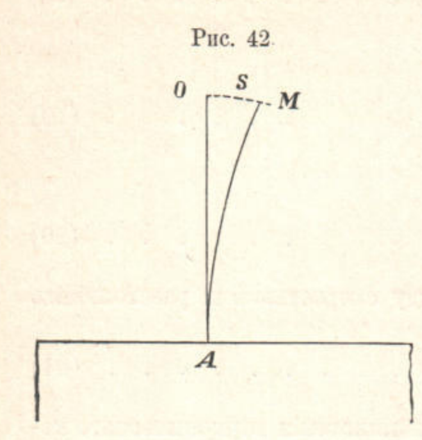
$$f = -cms \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Матеріальная точка M совершаетъ гармоническое колебательное движеніе около нѣкотораго средняго положенія O, если она находится подъ вліяніемъ силы, постоянно направленной къ точкѣ O и по величинѣ прямо пропорціональной разстоянію точки M отъ O. При этомъ точка M въ началѣ должна или находиться въ покоѣ на нѣкоторомъ разстояніи a отъ O, или, находясь въ O, обладать произвольною по величинѣ и по направленію скоростью v_0, или, наконецъ, находясь въ произвольной точкѣ, обладать скоростью, по направленію совпадающей съ прямой OM. Время T полнаго колебанія зависитъ только отъ коэффиціента c, встрѣчающагося въ выраженіи силы (22), между тѣмъ какъ амплитуда a, см. (18), зависитъ отъ c и отъ скорости v_0.

Можно указать на многіе примѣры силъ, дѣйствующихъ на точку и пропорціональныхъ удаленію этой точки отъ нѣкотораго ея средняго положенія. Существованіе такихъ силъ (хотя бы въ первомъ приближеніи) весьма часто можетъ быть допущено, когда матеріальная точка M находится въ нормальномъ состояніи покоя, совпадая съ нѣкоторою точкою O, и когда при удаленіи M изъ O внѣшнія силы, препятствующія этому удаленію, стремятся возвратить точку M въ O. Подобный случай мы имѣемъ при небольшихъ измѣненіяхъ формы твердаго тѣла, когда упругія силы стремятся возстановить измѣненную форму. Положимъ, напр., что упругій стер-

жень AO (рис. 42) неподвижно закрѣпленъ въ точкѣ A. Если конецъ O отвести въ сторону, такъ что стержень приметъ форму AM, то конецъ M будетъ такъ стремиться обратно къ O, какъ еслибы на него дѣйствовала нѣкоторая сила f, направленная отъ M къ O. При небольшихъ величинахъ дуги $OM = s$ можно силу f принять пропорціональною этому разстоянію s, а потому конецъ M стержня будетъ совершать гармоническое колебательное движеніе около точки O, если его отвести въ сторону и затѣмъ предоставить самому себѣ. Это движеніе происходитъ однако не по прямой, но по нѣкоторой дугѣ.

Рис. 42



Кинетическая энергія J_0 массы m въ моментъ, когда она проходитъ черезъ положеніе покоя O, равна $J_0 = \frac{1}{2} mv_0^2$, или, см. (18)

$$J_0 = \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{2\pi^2 a^2}{T^2} m = \frac{1}{2} ca^2 m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

На разстояніи s отъ O мы имѣемъ кинетическую энергію, см. (20),

$$J = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mc(a^2 - s^2) = J_0 - \frac{1}{2} mcs^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Послѣдняя формула показываетъ, что съ удаленіемъ точки отъ положенія равновѣсія возникаетъ потенціальная энергія J_p, равная

$$J_p = \frac{1}{2} mcs^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ибо на основаніи принципа сохраненія энергіи мы должны постоянно имѣть $J + J_p = J_0$.

Средняя кинетическая энергія J_c за все время T одного колебанія получается на основаніи правилъ интегральнаго исчисленія по формулѣ

$$J_c = \frac{1}{2} m \frac{\int_0^T v^2 dt}{T}.$$

Подставляя сюда вмѣсто v его значеніе (9), получаемъ

$$J_c = \frac{\pi^2 a^2}{T^2} m = \frac{1}{2} J_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

(23) и (26) показываютъ, что энергія гармоническаго колебатель-

наго движенія пропорціональна квадрату амплитуды. Такъ какъ сумма $J + J_p = J_0$ за все время движенія, то (26) еще показываетъ, что, какъ средняя кинетическая энергія, такъ и средняя потенціальная энергія равны $\frac{1}{2} J_0$.

Характеръ гармоническаго колебательнаго движенія, который аналитически опредѣляется формулою (4), можетъ быть представленъ и геометри-

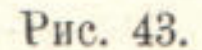
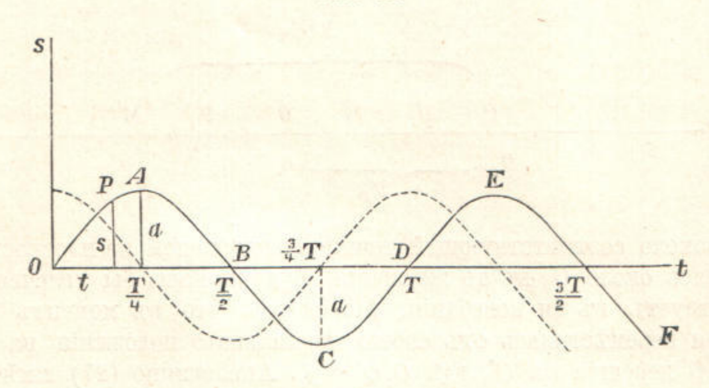


Рис. 43.



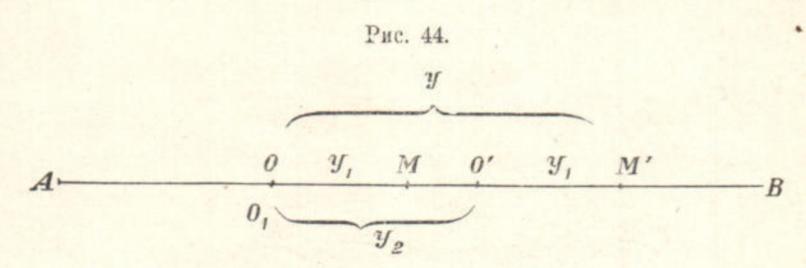
чески. Для этого возьмемъ координатныя оси (рис. 43) и станемъ на оси абсциссъ «откладывать время», а на перпендикулярахъ, параллельныхъ оси ординатъ—разстоянія s, вычисленныя по формулѣ (4). Геометрическое мѣсто точекъ P, координаты которыхъ равны t и s, дастъ намъ нѣкоторую кривую линію $OABCDEF$...., весьма наглядно выражающую законъ гармоническаго колебательнаго движенія. Наибольшія по абсолютному значенію ординаты, соотвѣтствующія моментамъ времени $\frac{1}{4} T$ и $\frac{3}{4} T$, равны амплитудѣ a. Кривая состоитъ изъ неопредѣленнаго числа одинаковыхъ частей. Если существуетъ начальная фаза, т.-е. если при $t = 0$ разстояніе s не равно нулю, то законъ движенія изобразится тою же кривою, болѣе или менѣе передвинутою влѣво. Пунктиромъ обозначена кривая, выражающая законъ колебанія въ случаѣ, когда начальная фаза $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ и мы слѣд. при $t = 0$ имѣемъ $s = a$.

§ 4. Сложеніе двухъ одинаково направленныхъ гармоническихъ колебательныхъ движеній одинаковаго періода *T*. Положимъ, что точка M (рис. 44) совершаетъ гармоническое колебательное движеніе вдоль прямой AB около точки O, принадлежащей этой прямой. Время колебанія обозначимъ черезъ T, амплитуду черезъ a. Разстояніе y_1 точки M отъ O въ моментъ времени t выразится формулою, см. (6) стр. 115

$$y_1 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right), \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

гдѣ β_1 начальная фаза. Допустимъ, далѣе, что въ то же время сама точка O совершаетъ гармоническое колебательное движеніе съ тѣмъ же періодомъ T, но съ другою амплитудою b, около точки O_1, неподвижной на плоскости, и пусть это движеніе по направленію совпадаетъ съ первымъ, т.-е. съ направленіемъ прямой AB. На рис. 44 точки O и O_1 совпадаютъ, т.-е. точка O еще не начала своего движенія. Можно себѣ представить, что сама прямая колеблется направо и на лѣво, причемъ каждая изъ ея точекъ совершаетъ

Рис. 44.



колебаніе около соотвѣтствующей точки, неподвижной на плоскости. Точка M, колеблясь около O, въ то же время, будучи какъ бы увлечена прямой AB, участвуетъ въ ея колебаніи. Положимъ, что въ моментъ времени t вся прямая перемѣстилась отъ своего нормальнаго положенія на величину y_2; точка O перешла въ O', гдѣ $O_1O' = y_2$. Аналогично (27), имѣемъ

$$y_2 = b\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_2\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

гдѣ β_2 начальная фаза второго колебанія.

Истинное положеніе M' колеблющейся точки мы найдемъ, отложивъ $O'M' = OM = y_1$. Обозначимъ черезъ y разстояніе этой точки отъ неподвижной на плоскости точки O_1, т.-е. положимъ $O_1M' = y$. Задача заключается въ опредѣленіи разстоянія y, какъ функціи времени t.

Считая y_1 и y_2 положительными въ одну и ту же сторону (направо), мы имѣемъ очевидно

$$y = y_1 + y_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Вставивъ (27) и (28), имѣемъ

$$y = a\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_1\right) + b\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta_2\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Зависимость величины y отъ времени t весьма сложная; посмотримъ, однако, не можетъ ли y быть приведено къ виду

$$y = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

т.-е. не будетъ ли истинное движеніе точки M, сложенное изъ двухъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, опять гармоническимъ колебательнымъ движеніемъ съ нѣкоторою амплитудою A и нѣкоторою начальною фазою β. Вопросъ въ томъ, существуютъ ли такія двѣ величины A и β, которыя

при всѣхъ значеніяхъ времени t сдѣлали бы выраженія (30) и (31) тожественно равными. Равенство

$$A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta\right)=a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta_1\right)+b\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta_2\right)$$

даетъ

$$A\cos\beta\sin 2\pi\frac{t}{T}+A\sin\beta\cos 2\pi\frac{t}{T}=(a\cos\beta_1+b\cos\beta_2)\sin 2\pi\frac{t}{T}+$$
$$+(a\sin\beta_1+b\sin\beta_2)\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

Это равенство превращается въ тожество при всѣхъ значеніяхъ t, когда коеффиціенты при $\sin 2\pi\frac{t}{T}$ и $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ въ отдѣльности равны, т.-е. при условіяхъ

$$\left.\begin{aligned}A\cos\beta&=a\cos\beta_1+b\cos\beta_2\\A\sin\beta&=a\sin\beta_1+b\sin\beta_2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(32)$$

Этимъ условіямъ для A и β можно удовлетворить, а слѣд. (30) можетъ быть приведено къ виду (31).

Уравненія (32) даютъ, при раздѣленіи второго на первое

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{a\sin\beta_1+b\sin\beta_2}{a\cos\beta_1+b\cos\beta_2}\quad\ldots\ldots\quad(33)$$

Сумма квадратовъ равенствъ (32) даетъ

$$A^2=a^2+b^2+2ab\cos(\beta_1-\beta_2)\quad\ldots\ldots\quad(34)$$

Это одна изъ важнѣйшихъ формулъ физики. Два гармоническихъ колебательныхъ движенія, одинаково направленныхъ, обладающихъ одинаковымъ періодомъ, но различными амплитудами a и b и различными начальными фазами β_1 и β_2, складываются въ одно гармоническое колебательное движеніе, амплитуда A котораго опредѣляется формулой (34), а начальная фаза β — формулою (33).

Обозначивъ энергіи составныхъ и сложнаго колебаній черезъ i_1, i_2 и J, получаемъ изъ (34) на основаніи сказаннаго послѣ формулы (26):

$$J=i_1+i_2+2\sqrt{i_1 i_2}\cos(\beta_1-\beta_2)\quad\ldots\ldots\quad(35)$$

Разсмотримъ рядъ частныхъ случаевъ, къ которымъ приводятъ послѣднія три формулы.

1. Амплитуды равны: $b=a$; полагаемъ $i_1=i_2=i$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\pm n\pi\\A&=2a\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\\J&=4i\cos^2\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(36)$$

2. Разность фазъ $\beta_1-\beta_2=0$ или вообще $2n\pi$, гдѣ n цѣлое число. Имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}A&=a+b\\ \beta&=\beta_1=\beta_2\\ J&=(\sqrt{i_1}+\sqrt{i_2})^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(37)$$

Если $\beta_1-\beta_2=0$ и $b=a$, то

$$\left.\begin{aligned}A&=2a\\ J&=4i\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(38)$$

Итакъ въ этомъ частномъ случаѣ энергія составного колебанія въ 4 раза больше энергіи каждаго изъ двухъ вполнѣ равныхъ слагаемыхъ колебаній.

3. Разность фазъ $\beta_1-\beta_2=\pi$ или вообще $(2n+1)\pi$; слагаемыя колебанія находятся въ противоположныхъ фазахъ. Имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}A&=a-b\\ J&=(\sqrt{i_1}-\sqrt{i_2})^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(39)$$

Если $\beta_1-\beta_2=(2n+1)\pi$ и $a=b$, то

$$\left.\begin{aligned}A&=0\\ J&=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(40)$$

Два колебанія съ одинаковыми амплитудами, но противоположными фазами даютъ въ результатѣ полный покой частицы.

4. Разность фазъ $\beta_1-\beta_2=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ или вообще $\left(n\pm\frac{1}{4}\right)2\pi$. Имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}A^2&=a^2+b^2\\ J&=J_1+J_2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(41)$$

Въ этомъ случаѣ энергія составного колебанія равна суммѣ энергій колебаній слагаемыхъ.

5. Разность фазъ $\beta_1-\beta_2=\frac{\pi}{2}$ и одна изъ фазъ нуль.

$$\text{a)}\quad \beta_2=0,\ \beta_1=\frac{\pi}{2}\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{a}{b}\quad\ldots\ldots\quad(42)$$

$$\text{b)}\quad \beta_1=0,\ \beta_2=\frac{\pi}{2}\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}\quad\ldots\ldots\quad(43)$$

Формулы (31), (33) и (34) даютъ полное аналитическое рѣшеніе вопроса о сложеніи двухъ «параллельныхъ» гармоническихъ колебательныхъ движеній. Мы можемъ рѣшить этотъ вопросъ и геометрически. Для этого

построимъ двѣ кривыя линіи, подобныя тѣмъ, которыя изображены на рис. 43 (стр. 119). Затѣмъ построимъ новую кривую, ординаты y точекъ которой равнялись бы суммѣ $y_1 + y_2$ ординатъ точекъ двухъ построенныхъ кривыхъ (всѣ три точки соотвѣтствуютъ одинаковымъ абсциссамъ). Новая кривая и выразитъ законъ искомаго составного движенія.

На рис. (45) изображены три случая такого геометрическаго сложенія двухъ колебательныхъ движеній. Верхній рисунокъ (I) соотвѣтствуетъ случаю $a = b$, а разность фазъ какая нибудь. Кривыя $abcdef$ и $pa'b'c'd'e'f'$ изображаютъ слагаемыя колебанія, а кривая $prst$ колебаніе составное. Рисунокъ средній (II) соотвѣтствуетъ случаю формулъ (38), т.-е. $a = b$ и $\beta_1 = \beta_2$; два слагаемыхъ движенія изображены совпадающими кривыми $abcdef$ и $ab'cd'ef'$, а составное кривой $aBDF$. Наконецъ нижній рисунокъ (III) соотвѣтствуетъ случаю $a = b$ и $\beta_1 - \beta_2 = \pi$. Слагаемыя кривыя $abcdef$ и $ab'cd'ef'$ даютъ прямую ace, показывающую, что точка, согласно (40), остается въ покоѣ.

Рис. 45.

§ 5. Сложеніе произвольнаго числа одинаково направленныхъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ общій періодъ T. Положимъ, что разстояніе y движущейся точки M отъ неподвижной точки O въ каждый моментъ времени равно суммѣ разстояній y_i, на которыхъ точка находилась бы, совершая различныя гармоническія колебательныя движенія. Полагая вообще

$$y_i = a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_i\right)$$

и

$$y = \sum y_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

имѣемъ

$$y = \sum a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_i\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

И эту сумму можно привести къ виду

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Приравнивая (45) и (46), мы получаемъ, какъ условіе тожественности при всѣхъ t

$$\left.\begin{aligned} A\cos\beta &= \sum a_i \cos\beta_i \\ A\sin\beta &= \sum a_i \sin\beta_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Sigma a_i \sin\beta_i}{\Sigma a_i \cos\beta_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

и

$$A^2 = (\sum a_i \sin\beta_i)^2 + \sum a_i \cos\beta_i)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

§ 6. Разложеніе гармоническаго колебательнаго движенія на два такихъ же движенія, имѣющія одинаковое съ нимъ направленіе. Какъ и многія другія задачи на разложеніе (числа́, силы, скорости), и эта задача имѣетъ безконечное число рѣшеній, которыя могутъ быть получены изъ общихъ формулъ (32). Величины A и β мы должны считать данными; для двухъ амплитудъ a и b и двухъ начальныхъ фазъ β_1 и β_2 мы имѣемъ всего два уравненія, а потому двѣ изъ этихъ четырехъ величинъ могутъ быть выбраны вполнѣ произвольно съ соблюденіемъ, однако, условія

$$a - b \leqslant A \leqslant a + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Наиболѣе важенъ случай, когда начальныя фазы β_1 и β_2 искомыхъ колебаній даны; тогда амплитуды опредѣлятся изъ (32) формулами

$$\left.\begin{aligned} a &= A\,\frac{\sin(\beta_2 - \beta)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \\ b &= A\,\frac{\sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Обозначая разность фазъ даннаго колебанія и двухъ искомыхъ черезъ φ_1 и φ_2, т.-е. полагая $\beta_1 - \beta = \varphi_1$ и $\beta_2 - \beta = \varphi_2$, имѣемъ

$$a = A\,\frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad b = A\,\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Особое значеніе имѣетъ случай, когда дано добавочное условіе, чтобы разность фазъ $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; полагая для простоты $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi - \frac{\pi}{2}$, имѣемъ $\sin\varphi_1 = \sin\varphi$, $\sin\varphi_2 = -\cos\varphi$ и вмѣсто (52):

$$\left.\begin{aligned} a &= A\cos\varphi \\ b &= A\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Этими важными, какъ мы увидимъ, формулами опредѣляются амплитуды a и b двухъ колебаній, на которыя разлагается данное колебаніе съ амплитудой A при условіи, чтобы одно изъ нихъ (амплитуда a) имѣло фазу на φ превышающую фазу колебанія разлагаемаго и чтобы разность фазъ слагаемыхъ колебаній равнялась $\frac{\pi}{2}$ (фаза колебанія съ амплитудою a больше фазы колебанія съ амплитудой b на $\frac{\pi}{2}$).

Самыя колебанія выразятся формулами

$$\left.\begin{aligned} y &= A\sin 2\pi\frac{t}{T} \\ y_1 &= A\cos\varphi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right) \\ y_2 &= A\sin\varphi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi-\frac{\pi}{2}\right) = -A\sin\varphi\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (54)$$

Условіе (29) $y = y_1 + y_2$ очевидно удовлетворено.

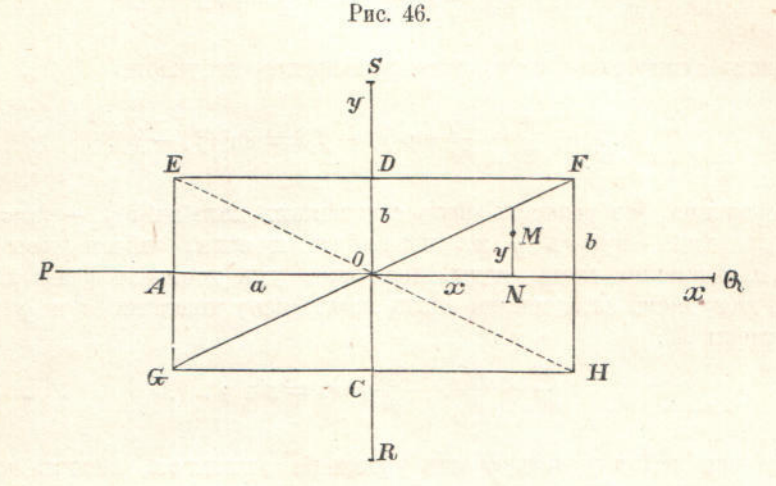
Въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.-е. когда

$$\varphi_1 = \beta_1 - \beta = \beta - \beta_2 = -\varphi_2 = \frac{\pi}{4} \text{ имѣемъ}$$

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

§ 7. Сложеніе двухъ взаимно перпендикулярныхъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ одинаковый періодъ T. Проведемъ

Рис. 46.



двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя QP и RS (рис. 46) и предположимъ, что точка M совершаетъ гармоническое колебательное движеніе вдоль PQ около точки O съ амплитудою $a = OA$ и съ періодомъ T. Разстояніе ея отъ O обозначимъ черезъ x. Положимъ, далѣе, что вся прямая PQ совершаетъ гармоническое колебательное движеніе по направленію, перпендикулярному къ ея длинѣ и пусть b и T амплитуда и періодъ этого второго колебанія. Перемѣнное разстояніе прямой отъ ея средняго положенія PQ обозначимъ черезъ y. Отложивъ $OC = OD = b$ и проведя черезъ C и D прямыя, параллельныя PQ, получаемъ крайнія положенія колеблющейся прямой. Точка M, колеблющаяся вдоль прямой PQ, уносится вмѣстѣ съ нею и принимаетъ участіе въ колебаніи, параллельномъ SR. Положеніе ея въ данный моментъ вре-

мени t опредѣлится, если извѣстно, на какую величину x она передвинулась въ сторону отъ O и на какую величину y вся прямая перемѣстилась въ сторону отъ ея средняго положенія. Ясно, что x и y представятъ перемѣнныя координаты точки M; требуется опредѣлить траекторію, которую она описываетъ на плоскости. Такъ какъ по абсолютной величинѣ $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$, то ясно, что точка M всегда остается внутри прямоугольника $EFHGE$. Полагая, что при $t=0$ начальныя фазы суть β_1 и β_2, имѣемъ

$$x = a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta_1\right),\quad y=b\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta_2\right)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

или

$$\frac{x}{a} = \sin 2\pi\frac{t}{T}\cos\beta_1 + \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin\beta_1$$
$$\frac{y}{b} = \sin 2\pi\frac{t}{T}\cos\beta_2 + \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin\beta_2.$$

Отсюда

$$\frac{x}{a}\cos\beta_2 - \frac{y}{b}\cos\beta_1 = \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin(\beta_1-\beta_2)$$
$$\frac{x}{a}\sin\beta_2 - \frac{y}{b}\sin\beta_1 = \sin 2\pi\frac{t}{T}\sin(\beta_2-\beta_1).$$

Взявъ сумму квадратовъ этихъ равенствъ, получаемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\beta_1-\beta_2)=\sin^2(\beta_1-\beta_2).$$

Положимъ, что разность фазъ слагаемыхъ колебаній $\beta_1-\beta_2=\varphi$, т.-е. что колебаніе вдоль y начинается позже, чѣмъ колебаніе вдоль x, а именно тогда, когда послѣднее уже достигло фазы φ. Вводя фазу φ, получаемъ слѣдующую связь между координатами x и y движущейся точки M:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\varphi=\sin^2\varphi\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Это при всѣхъ углахъ φ есть уравненіе эллипса, центръ котораго находится въ началѣ координатъ. Итакъ, два взаимно перпендикулярныхъ колебанія вообще складываются въ одно движеніе по эллипсу, расположенному внутри прямоугольника $EFHG$, стороны котораго суть его касательныя. На рис. 47 показано это движеніе точки по эллипсу. Сперва началось движеніе отъ O до b; къ дальнѣйшему движенію направо присоединилось движеніе вверхъ, вслѣдствіе чего и получилось движеніе $bb'b''b'''$ и т. д. по эллипсу. Разберемъ частные случаи.

1) Разность фазъ $\varphi=0$; движенія отъ O къ Q и отъ O къ D (рис. 46) начинаются одновременно. Ур. (57) даетъ $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0$ т.-е. $y=\frac{b}{a}x$, что и непосредственно вытекаетъ изъ (56) при $\beta_1=\beta_2$. Получилось уравненіе прямой, діагонали GF (рис. 46). Движеніе точки по этой прямой будетъ

гармоническое колебательное, ибо ея разстояніе отъ средней точки O равно $s=\sqrt{x^2+y^2}$. Подставляя (56), имѣемъ, полагая $\beta_1=\beta_2=\beta$

$$s=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta\right).$$

2) Разность фазъ $\varphi=\pi$; движенія отъ O къ D и отъ O къ A начинаются одновременно. Ур. (57) даетъ $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0$, т.-е. $y=-\frac{b}{a}x$; это уравненіе прямой, діагонали EH; движеніе такое же, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

3) Разность фазъ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$; (57) даетъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Это уравненіе эллипса, отнесеннаго къ осямъ.

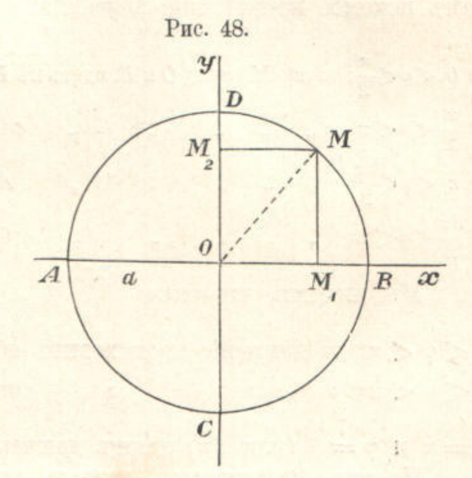
4) Весьма важный случай $\varphi=\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ и $a=b$. Ур. (57) даетъ $x^2+y^2=a^2$.

Это уравненіе окружности.

Два взаимно перпендикулярныхъ гарм. колебательныхъ движенія съ одинаковыми амплитудами a и періодами T и съ

Рис. 47.

Рис. 48.

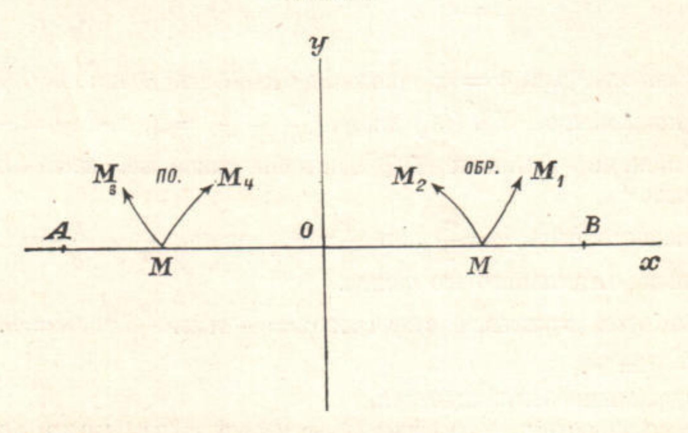


разностью фазъ $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ складываются въ движеніе круговое и притомъ въ движеніе равномѣрное, ибо проекціи M_1 и M_2 (рис. 48) точки M на діаметры AB и CD совершаютъ гармоническія колебательныя движенія (см. § 1 и рис. 40, стр. 113). Скорость k движенія точки выражается формулою $k=\frac{2\pi a}{T}$, см. (1) стр. 113.

5) Переходя къ общему случаю произвольнаго φ, покажемъ, какъ опредѣлить направленіе движенія точки по эллипсу, т.-е. будетъ ли оно происходить по или обратно часовой стрѣлкѣ (какъ для краткости выражаются). Для этого опредѣлимъ, гдѣ находится точка M (рис. 49), когда

начинается второе движенiе (въ сторону положительныхъ y) и куда, приблизительно, будетъ направлено ея дальнѣйшее движенiе. Условiе, что

Рис. 49.



центръ эллипса совпадаетъ съ началомъ координатъ, даетъ намъ искомое направленiе движенiя.

a) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; точка M между O и B, идетъ къ B; получ. движ. MM_1 т.-е. обратно час. стрѣл.

b) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ „ „ „ „ „ O; „ „ MM_2 „ „ „ „

c) $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$; „ „ „ „ „ A; „ „ MM_3 „ по „ „

d) $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$; „ „ „ „ „ O; „ „ MM_4 „ „ „ „

Мы видимъ, что если

$0 < \varphi < \pi$, то движенiе происходитъ обратно часовой стрѣлкѣ,
$\pi < \varphi < 2\pi$, » » » по часовой стрѣлкѣ. . . . (58)

$\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$ (или 2π) даютъ движенiя по прямымъ.

На рис. 50 показаны разные случаи движенiя при $a = b$ и при φ возрастающемъ отъ 0 до 2π, черезъ каждыя $\frac{\pi}{6}$.

6) При $a = b$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ получаются движенiя по кругу; они отличаются направленiемъ:

$a = b$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . . . . кругъ, обратно час. стрѣлкѣ,
$a = b$ и $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ . . . . кругъ, по час. отрѣлкѣ. . . . (59)
Фаза движенiя вдоль оси x идетъ впереди.

Полагая въ (56) $a = b$ и сперва $\beta_2 = \beta_1 - \frac{\pi}{2}$, а затѣмъ $\beta_2 = \beta_1 - \frac{3\pi}{2}$ и написавъ β вмѣсто β_1, имѣемъ:

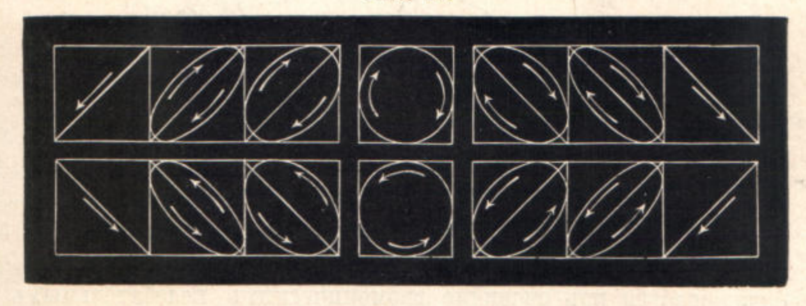
Кругъ обратно час. стрѣлкѣ. $\begin{cases} x = a\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) \\ y = -a\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) \end{cases}$ . . . . (60)

Кругъ по час. стрѣлкѣ. . . $\begin{cases} x = a\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) \\ y = a\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right) \end{cases}$ . . . . (61)

Въ обоихъ случаяхъ очевидно $x^2 + y^2 = a^2$ (уравненіе окружности).

Формулы (60) и (61) показываютъ непосредственно, какимъ образомъ равномѣрное движеніе по кругу, радіусъ котораго a, совершающееся со

Рис. 50.



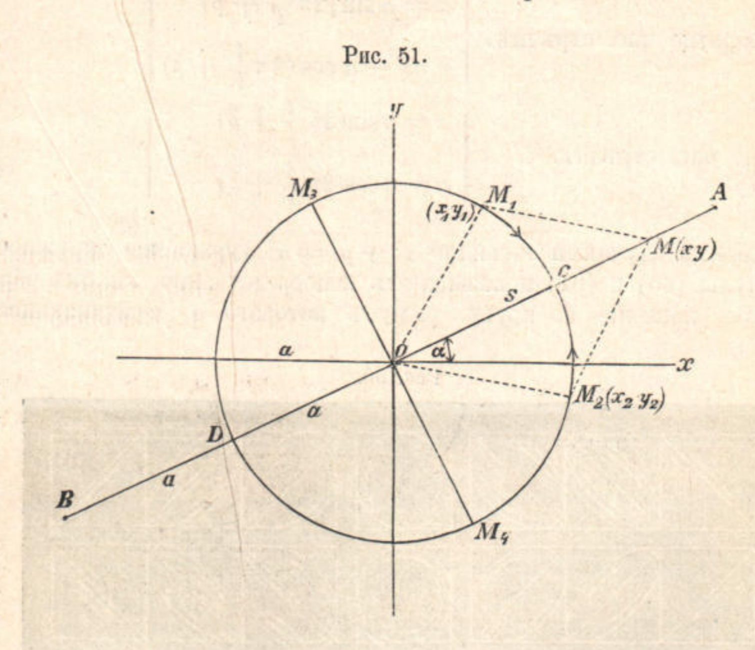
скоростью k обратно или по часовой стрѣлкѣ, можетъ быть разложено на два гармоническихъ колебательныхъ движенія по произвольнымъ, взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ x и y. Періодъ T опредѣлится изъ равенства (1) стр. 113, а именно $kT = 2\pi a$. Фаза β можетъ быть выбрана вполнѣ произвольно.

§ 8. Сложеніе двухъ равномѣрныхъ, одинаково быстрыхъ движеній по одной окружности, совершающихся по противоположнымъ направленіямъ. Положимъ, что точка M_1 (рис. 51) движется равномѣрно по окружности, радіусъ которой a, по направленію часовой стрѣлки, обходя всю окружность во время T; другая точка M_2 движется съ такою же скоростью по направленію обратному. Задача о сложеніи двухъ круговыхъ движеній заключается въ опредѣленіи движенія такой точки M, координаты x и y которой равнялись бы суммѣ соотвѣтствующихъ координатъ x_1, y_1 и x_2, y_2 точекъ M_1 и M_2. Понятно, что точка M постоянно должна находиться на концѣ діагонали параллелограмма, построеннаго на прямыхъ OM_1 и OM_2.

Легко видѣть, что движеніе точки M будетъ прямолинейное. Точки M_1 и M_2 встрѣчаются въ двухъ точкахъ C и D; въ соотвѣтствующіе моменты времени точка M расположена въ A и B, гдѣ $OA = OB = 2a$. Такъ какъ точки M_1 и M_2 всегда будутъ находиться на равныхъ разстоя-

ніяхъ отъ C и D, то ясно, что діагональ, на концѣ которой должна помѣщаться точка M, всегда будетъ совпадать съ OA или съ OB. Когда M_1 и M_2 совпадаютъ съ M_3 и M_4 ($M_3M_4 \perp AB$), то M находится въ O. Легко сообразить, что движеніе точки M должно быть гармоническое колебательное,

Рис. 51.



ибо оно складывается изъ очевидно гармоническихъ колебательныхъ движеній $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$.

Разберемъ вопросъ аналитически; обозначимъ черезъ β_1 и β_2 начальныя фазы тѣхъ колебательныхъ движеній x_1 и x_2 вдоль оси Ox, которыя вмѣстѣ съ колебаніями y_1 и y_2 $\left(\text{отстающими отъ нихъ на } \frac{3\pi}{2} \text{ и на } \frac{\pi}{2}\right)$ даютъ круговыя движенія по (M_1) и обратно (M_2) часовой стрѣлкѣ, см. (59). Формулы (60) и (61) даютъ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a\sin(2\pi\frac{t}{T} + \beta_1) \\ y_1 = a\cos(2\pi\frac{t}{T} + \beta_1) \end{array}\right\} \text{по;} \quad \left.\begin{array}{l} x_2 = a\sin(2\pi\frac{t}{T} + \beta_2) \\ y_2 = -a\cos(2\pi\frac{t}{T} + \beta_2) \end{array}\right\} \text{обратно} \ldots (61,a)$$

Полагаемъ для краткости $2\pi\frac{t}{T} + \beta_1 = \theta_1$ и $2\pi\frac{t}{T} + \beta_2 = \theta_2$.

Имѣемъ, такъ какъ $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 = 2a\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2} \\ y = a\cos\theta_1 - a\cos\theta_2 = 2a\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2} \end{array}\right\} \ldots \ldots (62)$$

Раздѣляя нижнее равенство на верхнее и принимая во вниманіе значенія угловъ θ_1 и θ_2, находимъ $y = x\,\mathrm{tg}\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$ или

$$y = x\,tg\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Это уравненіе прямой. Если перемѣнное разстояніе OM обозначимъ черезъ $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, то (62) дастъ $s = 2a\sin\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}$, т.-е.

$$s = 2a\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Отсюда видно, что движеніе точки M гармоническое колебательное. Обозначая уголъ между направленіемъ колебаній и осью x'овъ черезъ $\alpha = \angle AOx$, имѣемъ $y = x\mathrm{tg}\alpha$, а слѣд., см. (63),

$$\alpha = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Два противоположно направленныхъ круговыхъ движенія (радіусъ a и періодъ T), слагаемыя которыхъ вдоль оси x суть колебанія съ начальными фазами β_1 (по) и β_2 (обратно час. стрѣлкѣ), складываются въ одно гармоническое колебательное движеніе, амплитуда котораго $2a$, періодъ T, начальная фаза $\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)$; направленіе этого колебанія составляетъ съ осью x уголъ $\alpha = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$.

Рис. 52.

§ 9. Разложеніе прямолинейнаго гармоническаго колебательнаго движенія на два круговыхъ движенія. Положимъ, что точка M совершаетъ гармоническое колебательное движеніе между точками A и B (рис. 52) съ амплитудою a и періодомъ T; разстояніе $s = OM$ равно

$$s = a\sin(2\pi\frac{t}{T} + \beta) = a\sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

гдѣ θ введено для краткости. Изъ предыдущаго ясно, что два искомыхъ движенія должны происходить по кругу, радіусъ r котораго равенъ $r = \frac{a}{2}$. Каждое изъ этихъ круговыхъ движеній можетъ быть разложено на два колебанія по взаимно перпендикулярнымъ осямъ, изъ которыхъ ось x можетъ составлять вполнѣ произвольный уголъ $\angle BOx = \alpha$ съ направленіемъ даннаго колебанія. Для четырехъ колебаній x_1, y_1, x_2 и y_2 имѣемъ готовыя выраженія (61,a), въ которыя однако слѣдуетъ вставить $\frac{a}{2}$ вмѣсто a.

Условія $\alpha = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ и $\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)$ даютъ

$$\beta_1 = \beta - \alpha; \ \beta_2 = \beta + \alpha.$$

Вставляя эти выраженія въ (61.a), получаемъ окончательно такой результатъ:

Гармоническое колебательное движеніе $s = a\sin\theta$ можетъ быть разложено на два круговыхъ колебанія

$$\text{По час. стрѣлкѣ.} \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}\sin(\theta - \alpha) \\ y_1 = \frac{a}{2}\cos(\theta - \alpha) \end{cases} \qquad \text{Обратно ч. стрѣлкѣ.} \begin{cases} x_2 = \frac{a}{2}\sin(\theta + \alpha) \\ y_2 = -\frac{a}{2}\cos(\theta + \alpha) \end{cases} . \quad (67)$$

Здѣсь α уголъ между направленіемъ колебанія s и осью

Рис. 53.

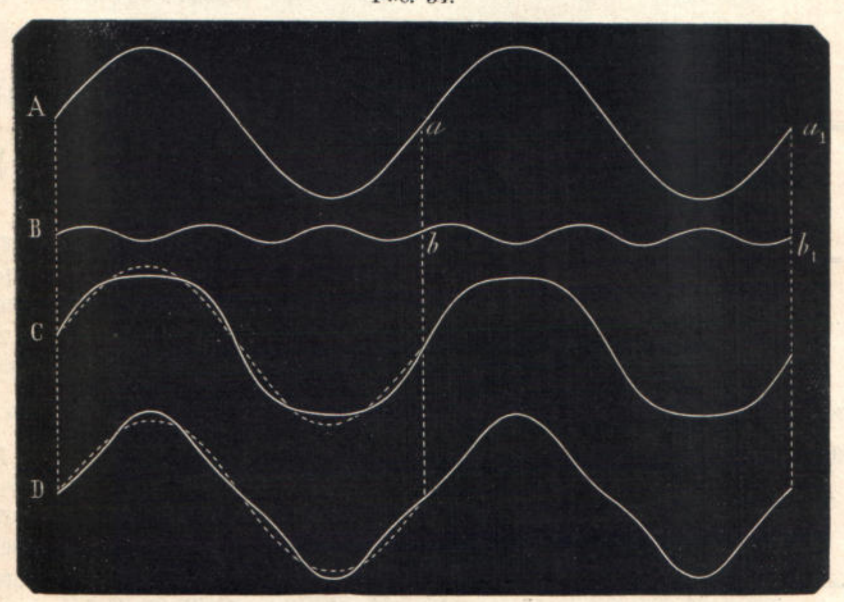
x, который можно выбрать вполнѣ произвольно. Можно, напр., принять $\alpha = 0$ или $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

§ 10. Сложеніе гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ различные періоды T и $T_1 = kT$, гдѣ k численный коеффиціентъ.

А. Колебанія одного направленія. Результатъ сложенія двухъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, имѣющихъ различныя амплитуды a и b и различные періоды T и kT, получается удобнѣе всего геомет-

рическимъ способомъ, изложеннымъ въ § 4 на стр. 123. Начертимъ двѣ кривыя, изображающія законы пройденныхъ пространствъ для данныхъ двухъ колебаній и построимъ третью кривую такъ, чтобы ея ординаты равнялись суммѣ ординатъ двухъ первыхъ кривыхъ при одинаковыхъ абсциссахъ (временахъ). На рис. 53 представленъ случай, когда b мало въ сравненіи съ a и $k = \frac{1}{2}$; A и B изображаютъ два слагаемыхъ движенія, C движеніе составное. Пунктиромъ повторена кривая A, чтобы показать происшедшее съ нею измѣненіе. Полученное колебаніе уже не будетъ гармоническое; неодинаковый наклонъ частей кривой показываетъ, что точка совершаетъ размахъ въ одну сторону быстрѣе, чѣмъ въ другую. Кривая D соотвѣтствуетъ случаю, когда кривая B передвинута направо на столько,

Рис. 54.



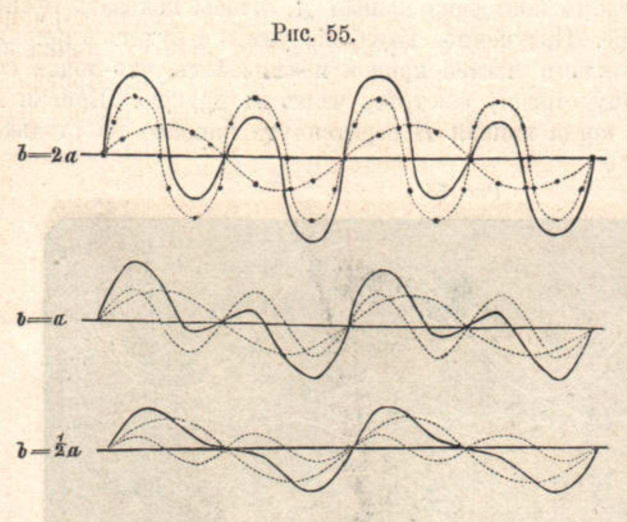
чтобы e приходилось подъ d_1, т.-е. случаю, когда фаза нуль колебанія A не совпадаетъ съ фазою нуль колебанія B.

На рис. 54 показанъ случай $k = \frac{1}{3}$ и b мало сравнительно съ a. Получается періодическое (но не гармоническое) колебаніе C. Колебаніе D имѣетъ мѣсто, когда фаза нуль колебанія A совпадаетъ съ фазою π колебанія B.

Гораздо болѣе сложныя колебанія получаются, когда b не мало сравнительно съ a. На рис. 55 изображены 3 случая сложенія колебаній, причемъ вездѣ принято $k = \frac{1}{2}$, т.-е. что одно колебаніе совершается вдвое быстрѣе другого. Слагаемыя колебанія изображены пунктиромъ. Здѣсь показано вліяніе отношенія b къ a. Первая кривая получается, когда $b = 2a$,

вторая, когда $b = a$ и третья, когда $b = \frac{1}{2}a$. Во всѣхъ трехъ случаяхъ фаза φ болѣе быстраго колебанія равна нулю, когда фаза болѣе медленнаго нуль. На рис. 56 кривыя показываютъ вліяніе фазы φ; въ обоихъ случаяхъ $b = \frac{1}{2}a$. Первая кривая получается, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, вторая, когда $\varphi = \pi$. Для случая первыхъ двухъ кривыхъ рис. 55 мы видимъ, что два малыхъ размаха въ одну и въ другую сторону чередуются съ двумя большими размахами.

Рис. 55.



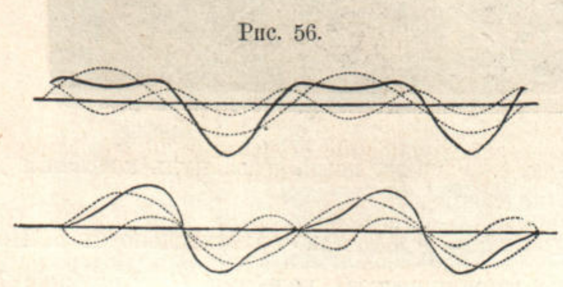
В. Колебанія взаимно перпендикулярныя. Уравненія двухъ колебаній суть

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta\right) \\ y &= b\sin\left(2\pi\frac{t}{T_1}+\beta_1\right) \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Исключая отсюда время t, получаемъ уравненіе траекторіи кривой, по которой движется точка.

Геометрически эта кривая можетъ быть построена слѣдующимъ образомъ. Пусть отношеніе $\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа. Проведемъ координатныя оси $A'OA$ и $B'OB$ (рис. 57) и опишемъ двѣ окружности радіусами $OA = a$ и $OB = b$. Раздѣлимъ ихъ, начиная отъ A и B на $4n$ (гдѣ n цѣлое число), напр. на 32 равныхъ частей. Точки дѣленія круга (OA) соединимъ хордами, перпендикулярными къ OA и точки дѣленія круга (OB) хордами, перпендикулярными къ OB. Части, на которыя раздѣлятся $A'A$ и $B'B$ соотвѣтствуютъ путямъ, которые были бы пройдены въ колебаніяхъ x и y въ равныя времена, еслибы мы имѣли $T_1 = T$. Но на дѣлѣ $\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q}$, слѣд. точка пройдетъ p отрѣзковъ по направленію $B'B$ въ то время, какъ она перемѣстится на q отрѣзковъ по направленію $A'A$, ибо чѣмъ меньше время колебанія, на тѣмъ большее число отрѣзковъ она должна перемѣститься въ данное время. Зная положеніе точки въ данный моментъ, мы легко построимъ ея послѣдовательныя положенія черезъ равные промежутки вре-

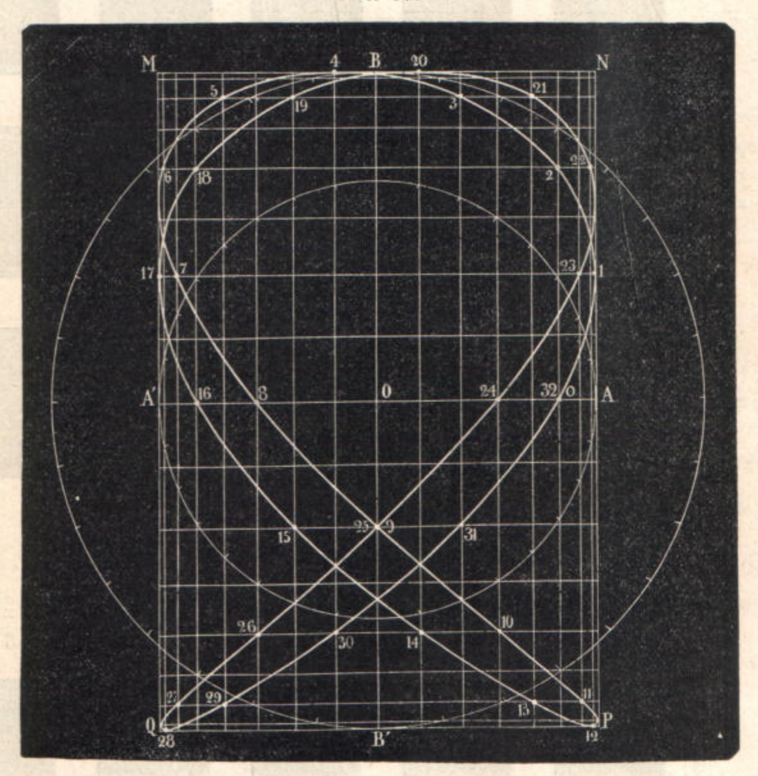
Рис. 56.



мени. На рис. 57 изображенъ случай $\frac{T}{T_1} = \frac{2}{3}$; начальное положеніе въ точкѣ 0; дальнѣйшія положенія 1, 2, 3, 4..., 30, 31 и 32 получаются, если переходить каждый разъ на 3 дѣленія параллельно $A'A$ и на 2 дѣленія параллельно $B'B$.

На рис. 58 показаны кривыя, которыя получаются для трехъ различныхъ значеній отношенія $\frac{T}{T_1}$ и притомъ при пяти различныхъ значеніяхъ фазы φ колебанія съ амплитудой a (горизонтальнаго), соотвѣтствующей мо-

Рис. 57.



менту, когда фаза колебанія съ амплитудой b (вертикальнаго) есть нуль. Легко доказать, что третья кривая второй строки есть дуга параболы, полагая въ (68): $\beta = 0$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ и $T_1 = 2T$.

На рис. 59 изображенъ случай $\frac{T}{T_1} = \frac{3}{4}$ для значеній $\varphi = 0$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{12}$ и $\frac{\pi}{3}$.

§ 11. Затухающія колебательныя движенія. Читатель, еще не освоившійся въ достаточной степени съ математикой, насколько она нужна для нижеслѣдующаго, можетъ пока и пропустить этотъ параграфъ.

Во многихъ отдѣлахъ физики играетъ большую роль весьма интересный случай неперіодическаго колебательнаго движенія, которое мы назовемъ затухающимъ. Представимъ себѣ на нѣкоторой прямой неподвижную

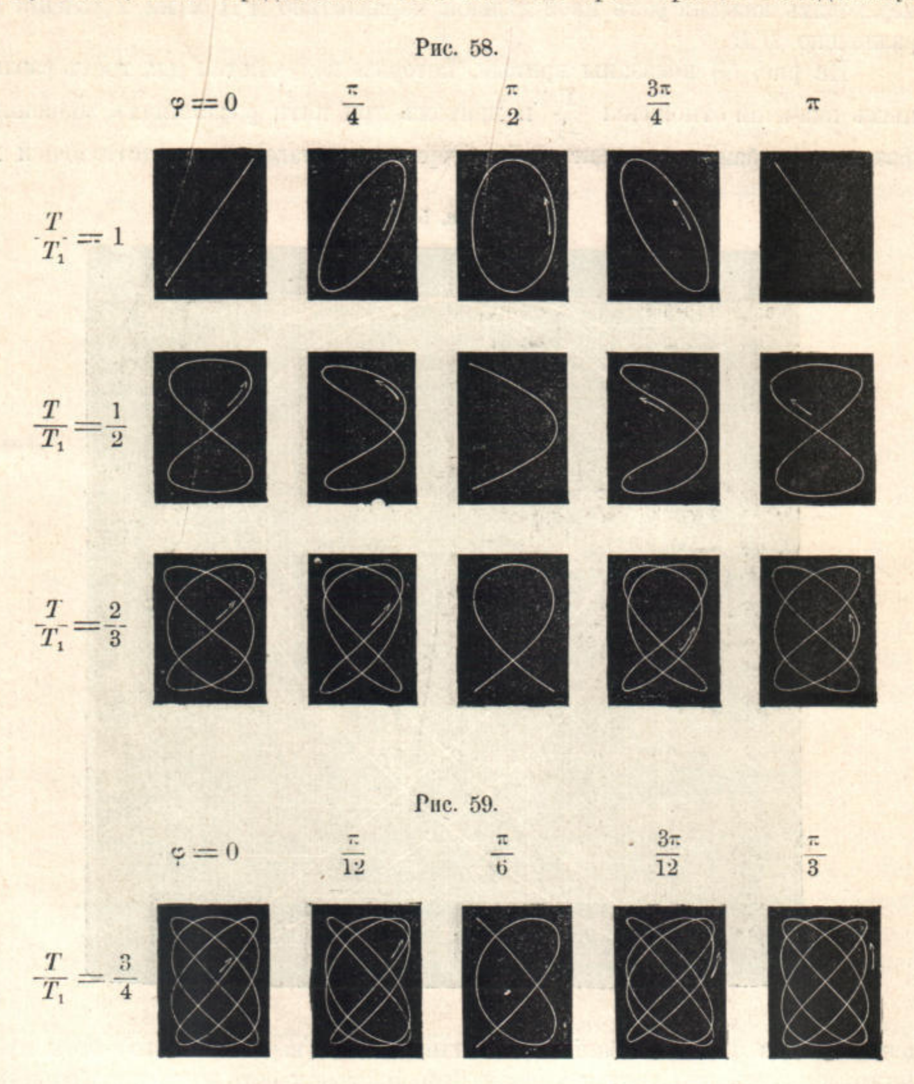


Рис. 58.

Рис. 59.

точку O и пусть разстояніе $s = OM$ точки O отъ движущейся точки M, какъ функція времени t, выражается формулою такого вида:

$$s = ae^{-pt}\sin qt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

гдѣ a линейная величина, $e = 2{,}718281......$ основаніе натуральныхъ логариѳмовъ, которые мы обозначимъ символомъ lg, p и q положительныя величины, численныя значенія которыхъ зависятъ отъ выбранной единицы вре-

мени (они обратно пропорціональны ей). Понятіе объ общемъ характерѣ потухающаго движенія можно получить, вникая въ форму выраженія (69). Такъ какъ $\sin qt$ при возростающемъ t непрерывно мѣняется отъ -1 до $+1$, то ясно, что s будетъ попеременно положительное и отрицательное, а слѣд. движеніе будетъ колебательное. Такъ какъ $p > 0$, то множитель e^{-pt} непрерывно уменьшается и потому (69) представляется колебательнымъ движеніемъ съ безконечно убывающей амплитудой, т.-е. такимъ, при которомъ послѣдовательные размахи направо и налѣво дѣлаются все меньше и меньше.

На основаніи (8) стр. 51 имѣемъ для скорости v:

$$v = ae^{-pt}(q\cos qt - p\sin qt) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

При $t = 0$ имѣемъ $s = 0$ и начальная скорость $v_0 = aq$.

Обозначимъ черезъ t_1, t_2, t_3, ..., t_i, ... времена прохожденія точки M черезъ O, когда $s = 0$. Имѣемъ $\sin qt_i = 0$, слѣд. $qt_1 = \pi$, $qt_2 = 2\pi$, $qt_3 = 3\pi$ и т. д. n-тое прохожденіе черезъ O имѣетъ мѣсто во время

$$t_n = n\frac{\pi}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Отсюда слѣдуетъ, что точка M проходитъ черезъ точку O черезъ равные промежутки времени τ

$$\tau = \frac{\pi}{q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Обозначимъ черезъ T_1, T_2, T_3, T_i,.... моменты остановокъ, когда скорость $v = 0$; (70) даетъ $q\cos qT_i - p\sin qT_i = 0$ или $\operatorname{tg} qT_i = \frac{q}{p}$. Полагая, что $\operatorname{arctg}\frac{q}{p}$ обозначаетъ наименьшую дугу, тангенсъ которой равенъ $\frac{q}{p}$, имѣемъ $qT_1 = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$; $qT_2 = \operatorname{arctg}\frac{q}{p} + \pi$; $qT_3 = \operatorname{arctg}\frac{q}{p} + 2\pi$ и вообще $qT_i = \operatorname{arctg}\frac{q}{p} + (i-1)\pi$. Моментъ T_n, когда точка M остановится въ n-тый разъ, опредѣляется формулою

$$T_n = \frac{1}{q}\operatorname{arctg}\frac{q}{p} + (n-1)\frac{\pi}{q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Отсюда слѣдуетъ, что точка M останавливается черезъ равные промежутки времени

$$\tau' = \frac{\pi}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Сравнивая это съ (72), видимъ, что время, протекающее отъ одного прохожденія черезъ O до слѣдующаго, равно времени, протекающему отъ одной остановки до слѣдующей. (71) и (73) показываютъ однако, что моменты остановокъ ($v = 0$) не приходятся ровно посреди между моментами прохожденія M черезъ O ($s = 0$).

Обозначимъ черезъ $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_i, \ldots\ldots$ послѣдовательные размахи или амплитуды, т. е. разстоянія OM въ моменты T остановокъ. (69) даетъ

$$s_i = ae^{-pT}\sin qT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Но мы имѣли $\operatorname{tg} qT_i = \frac{q}{p}$, слѣд. $\sin qT_i = \pm \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Принимая во вниманіе, что знаки здѣсь чередуются, когда qT увеличивается на π и пользуясь формулой (73), имѣемъ для $n^{\text{-того}}$ амплитуды сложное выраженіе

$$s_n = (-1)^{n-1}\frac{aq}{\sqrt{p^2+q^2}}\,e^{-\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{q}{p}-(n-1)\pi\frac{p}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Отбрасывая знакъ, т. е. разсматривая только абсолютныя значенія амплитудъ, мы видимъ, что

$$s_n = s_{n-1}e^{-\pi\frac{p}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Итакъ каждая амплитуда получается изъ предыдущей, чрезъ умноженіе на одинъ и тотъ же опредѣленный множитель. Отсюда ясно, что послѣдовательныя амплитуды составляютъ безконечно убывающую геометрическую прогрессію; теоретически говоря, потухающее колебаніе никогда не прекращается.

Натуральный логариѳмъ отношенія двухъ послѣдовательныхъ размаховъ называется логариѳмическимъ декрементомъ; обозначивъ его черезъ λ, имѣемъ изъ (77)

$$\lambda = \lg\frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{\pi p}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Легко убѣдиться, что скорости v_i прохожденія точки M черезъ O составляютъ совершенно такую же геометрическую прогрессію, какъ и размахи s_i, см. (70) и (72).

Общая формула (27) стр. 57 даетъ для ускоренія w точки M

$$w = ae^{-pt}[(p^2-q^2)\sin qt - 2pq\cos qt].$$

Это выраженіе можно преобразовать такимъ образомъ

$$w = -(p^2+q^2)ae^{-pt}\sin qt - 2pae^{-pt}(q\cos qt - p\sin qt).$$

Сравнивая это съ (69) и (70), видимъ, что

$$w = -(p^2+q^2)s - 2pv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Если m есть масса точки M, то сила f, подъ вліяніемъ которой эта точка находится, равна

$$f = -m(p^2+q^2)s - 2mpv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Эта формула показываетъ, что матеріальная точка M совершаетъ потухающее колебательное движеніе, когда она находится подъ вліяніемъ равнодѣйствующей двухъ силъ, изъ которыхъ одна направлена къ точкѣ O и пропорціональна разстоянію s точки M отъ O, а другая имѣетъ направленіе, противоположное скорости v точки M, т. е. направленію ея движенія и по величинѣ пропорціональна этой скорости. При отсутствіи второй силы ($p = 0$), непрерывно только сопротивляющейся движенію, мы получаемъ гармоническое колебательное движеніе. Появленіе второй силы, зависящей отъ самой скорости движенія, и вызываетъ постепенное потуханіе колебаній. Мы впослѣдствіи познакомимся съ нѣсколькими случаями возникновенія подобныхъ силъ, тормозящихъ движеніе (напр. сопротивленіе воздуха).

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Лучистое распространеніе колебаній.

§ 1. Возникновеніе лучей. На стр. 25 мы назвали изотропной средой вещество, заполняющее часть пространства и обладающее по всѣмъ направленіямъ одинаковыми свойствами. Представимъ себѣ это вещество (матерію или эфиръ, см. стр. 7) состоящимъ изъ весьма большого числа малыхъ частицъ, или, какъ мы условились выражаться (стр. 48), матеріальныхъ точекъ. Каждой такой частицѣ соотвѣтствуетъ опредѣленная точка въ пространствѣ, занимаемая ею, когда она находится въ покоѣ, т. е. когда всѣ силы, на нее дѣйствующія, уравновѣшиваются. Допустимъ далѣе, что частицы дѣйствуютъ другъ на друга такимъ образомъ, что вслѣдствіе удаленія одной частицы A изъ ея положенія равновѣсія, силы, дѣйствующія на сосѣднія частицы, перестаютъ уравновѣшиваться, вслѣдствіе чего и эти частицы приходятъ въ движеніе, перемѣщаясь въ ту же сторону, въ которую передвинулась частица первая. Какъ дальнѣйшее слѣдствіе, начнутъ перемѣщаться частицы, сосѣднія съ только-что разсмотрѣнными, затѣмъ частицы, еще дальше отстоящія отъ первой частицы и т. д. Состояніе движенія, какъ бы передаваясь отъ точки къ точкѣ, распространяется черезъ среду, вслѣдствіе чего частицы, все болѣе и болѣе отъ A удаленныя, будутъ приходить въ движеніе. Допустимъ далѣе, что характеръ движенія всѣхъ частицъ одинъ и тотъ же.

Предположимъ, что частица A начинаетъ совершать гармоническое колебательное движеніе съ амплитудою a и періодомъ T и что это же движеніе, постепенно передаваясь сосѣднимъ частицамъ, распространяется все далѣе и далѣе въ данной средѣ. Разсмотримъ частицы, лежащія вдоль нѣкоторой прямой и послѣдовательно начинающія совершать гармоническія колебательныя движенія. Движеніе, распространяющееся вдоль такого ряда частицъ, мы условно и временно назовемъ лучемъ.

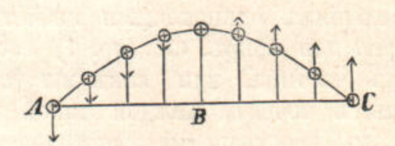
Для цѣлей графическихъ можно лучъ изобразить геометрически прямой линіей. Терминъ «лучъ» употребляется и въ томъ случаѣ, когда распространяющееся движеніе не есть гармоническое колебательное, но имѣетъ болѣе сложный характеръ, напр. затухающаго колебанія или иного неперіодическаго движенія. Лучистая передача движеній играетъ весьма важную роль въ самыхъ разнообразныхъ явленіяхъ: сюда относятся распространеніе волнъ на поверхности жидкостей, поперечныхъ сотрясеній въ нитяхъ и струнахъ, распространеніе звука въ твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ тѣлахъ, распространеніе свѣта и, наконецъ, распространеніе въ эфирной средѣ особаго рода движеній, по своему характеру и нѣкоторымъ внѣшнимъ признакамъ относимыхъ къ явленіямъ электрическимъ.

Ограничиваемся пока разсмотрѣніемъ случая распространенія гармоническихъ колебательныхъ движеній въ изотропной средѣ.

Разстояніе, на которое передается состояніе движенія въ единицу времени, называется скоростью распространенія колебаній или луча (скорость звука, скорость свѣта); мы изобразимъ ее буквою v. Эту фиктивную скорость, которая въ изотропной средѣ есть векторъ одинаковый во всѣхъ ея точкахъ и по всѣмъ направленіямъ, не слѣдуетъ смѣшивать со скоростью движенія самихъ частицъ въ ихъ колебаніяхъ, скоростью, съ

Рис. 60.

Рис. 61.



теченіемъ времени непрерывно мѣняющейся для всякой отдѣльно взятой частицы и во всякій данный моментъ, вообще, различной для различныхъ частицъ, расположенныхъ вдоль луча. Скорость v зависитъ отъ свойствъ самой среды; въ различныхъ средахъ она, вообще, различная. Слѣдуетъ отличать два случая лучистаго распространенія колебаній. Въ первомъ случаѣ направленіе колебаній перпендикулярно къ направленію ихъ распространенія, т. е. къ лучу; такія колебанія называются поперечными. Во второмъ случаѣ направленіе колебаній совпадаетъ съ направленіемъ луча; такія колебанія называются продольными.

§ 2. Образованіе лучей съ поперечными колебаніями. Положимъ, что AB (рис. 60) прямая, вдоль которой первоначально были расположены частицы и вдоль которой распространяется колебательное движеніе. Сперва начала двигаться частица A, нѣсколько позднѣе сосѣдняя направо частица и т. д. На рис. 60 изображено распредѣленіе частицъ во время $t=\frac{T}{4}$, причемъ время считается отъ начала колебанія первой частицы A. Во время $t=\frac{T}{4}$ частица A достигла крайняго положенія; слѣдующія частицы отстали

отъ A, такъ какъ онѣ позже ея начали свои движенія; стрѣлки показываютъ направленіе ихъ движеній. Всѣ частицы, лежащія направо отъ B, еще находятся въ покоѣ.

На рис. 61 показано распредѣленіе частицъ и направленія ихъ движеній во время $t = \frac{T}{2}$, когда A совершила половину, B одну четверть колебанія, а колебательное движеніе распространилось до C.

На рис. 62 видно распредѣленіе частицъ и направленія ихъ движеній во время $t = \frac{3}{4} T$, когда A достигла крайняго отрицательнаго удаленія, B совершила половину, C четверть колебанія, а D только приступаетъ къ началу движенія. Наконецъ, на черт. 63 изображено то же самое спустя время T послѣ начала движенія первой частицы A, когда эта частица, совершивъ одно полное колебаніе, приступаетъ ко второму, C кончила половину колебанія и самое движеніе распространилось до частицы E, только что приступающей къ первому колебанію. Мы видимъ, что точки A и E одновременно выходятъ изъ своихъ положеній равновѣсія, обладая одинаково направленными скоростями. Очевидно, что ихъ движенія и далѣе останутся вполнѣ тожественными, что онѣ постоянно будутъ находиться въ одинаковыхъ фазахъ. Разстояніе AE называется **длиною волны**; общепринято обозначать ее буквою λ.

Рис. 62.

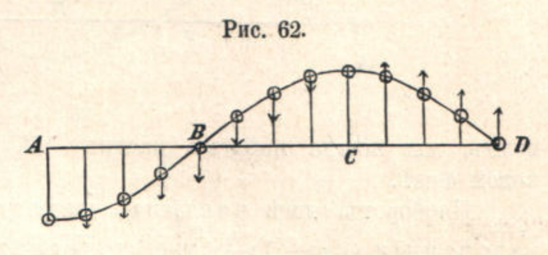
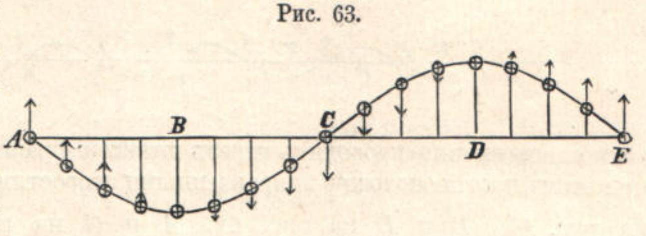


Рис. 63.



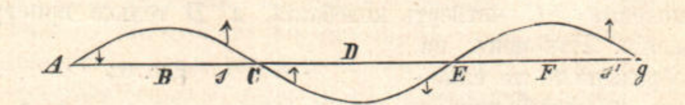
Длиною волны λ **называется разстояніе двухъ ближайшихъ точекъ луча, находящихся при одинаковыхъ фазахъ; одна изъ нихъ начала колебаться, когда другая кончила одно полное колебаніе.** За время T колебаніе распространилось отъ A до E; отсюда получается еще такое опредѣленіе:

Длина волны λ **есть то разстояніе, на которое колебательное движеніе распространяется во время** T **одного періода, т. е. пока одна частица совершаетъ одно полное колебаніе.**

Легко понять, какъ далѣе происходитъ распространеніе колебаній и движеніе отдѣльныхъ частицъ для $t > T$. Такъ, на рис. 64 волнообразная линія показываетъ распредѣленіе частицъ во время $t = \frac{3}{2} T$, а на рис. (65) изображена часть луча въ моментъ, когда частица A совершила $\left(n + \frac{1}{2}\right)$

колебанія, гдѣ n цѣлое число. Полагая $AE = EJ = JL = LN = NP = \lambda$, мы видимъ, что каждыя двѣ частицы, находящіяся другъ отъ друга на разстояніи цѣлаго числа волнъ или четнаго числа полуволнъ, $2n\frac{\lambda}{2}$, находятся въ одинаковыхъ фазахъ, напр. E и L, J и P. Отъ какой бы произвольной частицы X на лучѣ мы бы ни передвинулись въ ту или другую сторону на четное число полу-

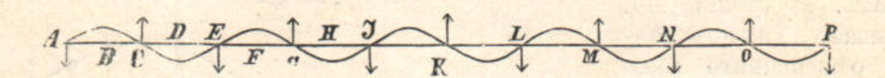
Рис. 64.



волнъ, мы всегда найдемъ частицу Y, находящуюся съ X въ одинаковой фазѣ.

Наоборотъ, двѣ частицы, находящіяся другъ отъ друга на разстояніи $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$, т.-е. нечетнаго числа полуволнъ, находятся въ противоположныхъ фазахъ, т.-е. ихъ фазы отличаются на нечетное число π или, что то же самое, на π.

Рис. 65.



Онѣ одновременно проходятъ черезъ положенія равновѣсія, обладая, однако, при этомъ противоположно направленными скоростями. Примѣры суть A и C на рис. 61, B и D на рис. 62, A и G на рис. 64, A и K $\left(\frac{5}{2}\lambda\right)$, C и P $\left(\frac{9}{2}\lambda\right)$ и т. д. на рис. 65.

Величины λ, v и T связаны очевидною формулою

$$\lambda = vT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

выражающей, что движеніе распространяется во время T съ постоянною скоростью v на разстояніе λ. Формула (1) показываетъ, что длина волны λ тѣмъ меньше, чѣмъ быстрѣе происходятъ колебанія и чѣмъ медленнѣе распространяется колебаніе. Она зависитъ слѣд. и отъ рода колебаній, и отъ свойствъ среды. Если черезъ N обозначить число колебаній, совершаемыхъ каждой частицей въ единицу времени, то

$$NT = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

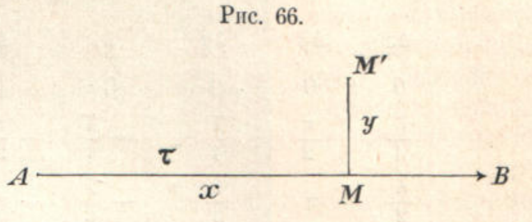
и слѣд. (1) даетъ

$$v = N\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Въ единицу времени первая частица совершитъ N колебаній; въ теченіе этого же времени колебаніе распространится на N волнъ и въ то же время, по опредѣленію, на разстояніе v.

§ 3. Уравненіе луча. Положимъ, что изъ точки A (рис. 66) распространяются поперечныя колебанія съ амплитудою a и періодомъ T по направленію AB; длина волны λ. Условимся считать время t отъ момента начала колебанія точки A. Нѣкоторая частица M, находящаяся отъ A (рис. 66) на разстояніи $AM = x$, занимаетъ во время t нѣкоторое положеніе M'; полагаемъ $MM' = y$. Величина y для даннаго x есть функція времени t; для даннаго значенія времени t она различная для различныхъ точекъ, т.-е. представляется нѣкоторою функціею отъ x. Такимъ образомъ вообще $y = f(x, t)$; найдемъ видъ этой функціи. Обозначимъ черезъ τ время, въ теченіе котораго колебаніе распространилось отъ A до M; точка M начала колебаться на время τ позже, чѣмъ A, а потому къ моменту времени t прошло время $t - \tau$ отъ момента, когда M начала свое движеніе. На основаніи (4) стр. 114 имѣемъ

Рис. 66.



$$y = a \sin 2\pi \frac{t - \tau}{T} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\tau}{T}\right).$$

Времена τ и T относятся, какъ пути, на которые въ эти времена распространилось колебательное движеніе, т.-е. какъ путь x къ длинѣ волны λ. Пропорція $\frac{\tau}{T} = \frac{x}{\lambda}$ даетъ для y выраженіе

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Выраженіе (4), которое даетъ намъ удаленіе y любой точки M на лучѣ отъ ея положенія равновѣсія, какъ функцію ея разстоянія x отъ нѣкоторой начальной точки A и времени t, считаемаго отъ момента начала движенія точки A, называется уравненіемъ луча. Вводя обозначенія

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) &= \theta \\ 2\pi \frac{x}{\lambda} &= \beta \\ \frac{x}{\lambda} &= \alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

мы можемъ уравненіе луча написать въ такихъ формахъ:

$$y = a \sin \theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$y = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \beta\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \alpha\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Въ нижеслѣдующей табличкѣ, которая впослѣдствіи окажется весьма полезной, сопоставлены однозначущія измѣненія величинъ x, β, α, t и θ и соотвѣтствующія измѣненія уравненія луча; очевидно, $\Delta\beta = -\Delta\theta$.

Δx	$\Delta\beta$	$\Delta\alpha$	Δt	$\Delta\theta$	Уравн. луча
0	0	0	0	0	$y = a \sin \theta$
$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{T}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$y = -a \cos \theta$
$\frac{\lambda}{2}$	π	$\frac{1}{2}$	$-\frac{T}{2}$	$-\pi$	$y = -a \sin \theta$
$\frac{3\lambda}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3T}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$y = a \cos \theta$
λ	2π	1	$-T$	-2π	$y = a \sin \theta$

. . . (9)

Измѣненіе величинъ x на λ, β на 2π и α на 1 не влечетъ за собою измѣненія въ выраженіи $y = f(x, t)$. То же самое относится и къ измѣненію величинъ x на $\pm n\lambda$, β на $\pm 2n\pi$ и α на $\pm n$, гдѣ n цѣлое число. Отсюда слѣдуетъ, что $\Delta x = +\frac{\lambda}{2}$ и $-\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{4}$ и $-\frac{3\lambda}{4}$, $\frac{3\lambda}{4}$ и $-\frac{\lambda}{4}$ даютъ одинаковыя измѣненія вида уравненія луча.

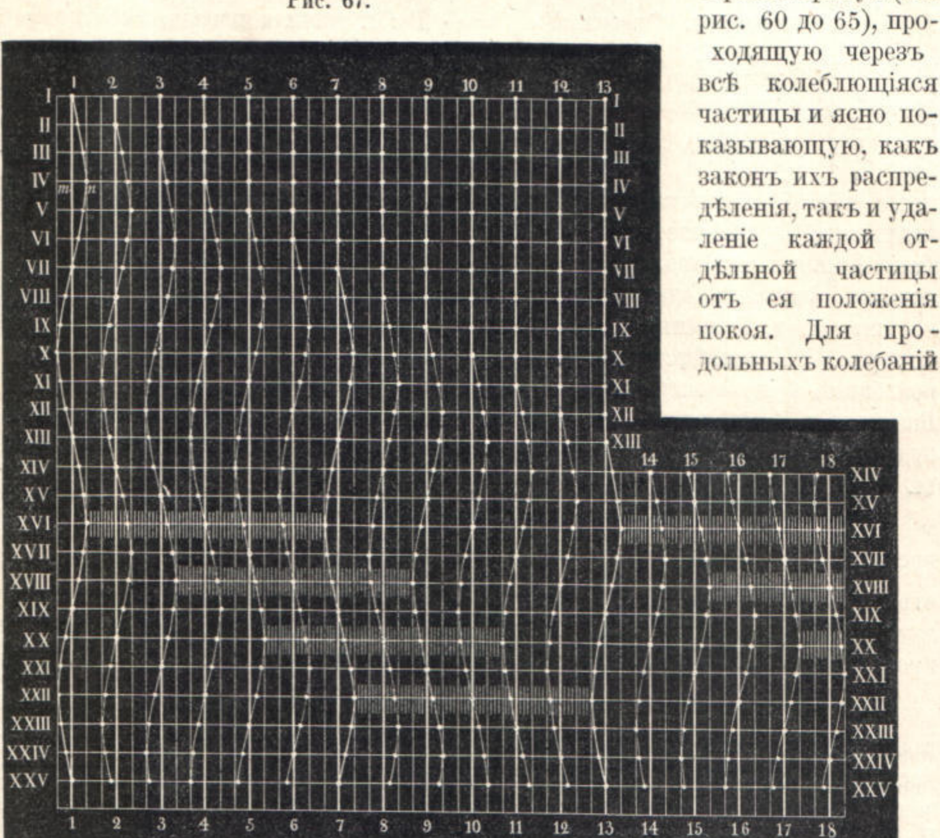
Изъ сказаннаго вытекаетъ далѣе, что мы можемъ мысленно перемѣщать начальную точку A въ ту или другую сторону на цѣлое число волнъ, не мѣняя вовсе выраженія для величины y, а отсюда слѣдуетъ, что начальная точка A всегда можетъ быть придвинута къ любой заданной точкѣ O на лучѣ на разстояніе, меньшее длины волны λ и даже, если A безразлично можетъ находиться съ той или съ другой стороны отъ O, то на разстояніе, не большее $\frac{\lambda}{2}$. Начальная точка A можетъ быть передвинута и на любой отрѣзокъ, не содержащій цѣлаго числа волнъ, при условіи соотвѣтствующаго измѣненія величины x въ уравненіи (4) или, въ частныхъ случаяхъ, измѣненія вида уравненія луча сообразно табличкѣ (9).

§ 4. Продольныя колебанія. Мы назвали продольными колебаніями такія, которыя совершаются по направленію распространенія колебаній, т.-е. самого луча. При продольныхъ колебаніяхъ частицы, въ началѣ равномѣрно распредѣленныя вдоль прямой, остаются постоянно на этой прямой; мѣняется только характеръ ихъ распредѣленія, переставая быть равномѣрнымъ.

При выводѣ формулы (4) стр. 143 направленіе колебаній никакой роли не играло, а потому уравненіе луча (4) остается вѣрнымъ и для лучей съ продольными колебаніями.

Имѣя дѣло съ колебаніями поперечными, мы могли для всякаго даннаго момента начертить кривую (см. рис. 60 до 65), проходящую черезъ всѣ колеблющіяся частицы и ясно показывающую, какъ законъ ихъ распредѣленія, такъ и удаленіе каждой отдѣльной частицы отъ ея положенія покоя. Для продольныхъ колебаній ничего подобнаго сдѣлать нельзя: частицы остаются на прямой, на которой онѣ были сначала.

Рис. 67.



Проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскій далъ рисунокъ, ясно показывающій послѣдовательныя измѣненія въ распредѣленіи частицъ при продольныхъ колебаніяхъ; онъ воспроизведенъ на рис. 67. Частицы обозначены бѣлыми точками. На горизонтальныхъ строкахъ, обозначенныхъ римскими цифрами отъ I до XIII, показано распредѣленіе частицъ черезъ равные промежутки времени $\frac{1}{12}T$. Каждая изъ вертикальныхъ прямыхъ, обозначенныхъ арабскими цифрами отъ 1 до 13, соотвѣтствуетъ положенію равновѣсія одной изъ 13-ти частицъ.

Строка I ($t = 0$): всѣ частицы въ покоѣ. Строка II $\left(t = \frac{1}{12} T\right)$: частица 1 перемѣстилась, остальныя въ покоѣ. Строка III $\left(t = \frac{2}{12} T\right)$: частица 1 перемѣстилась далѣе вправо, 2 начала двигаться. Строка IV $\left(t = \frac{3}{12} T\right)$: 1 достигла крайняго удаленія, 2 перешла дальше вправо, 3 начала двигаться. Строка V $\left(t = \frac{4}{12} T\right)$: 1 пошла назадъ, 2 въ крайнемъ удаленіи, 3 пошла дальше, 4 начала двигаться. Строка VI $\left(t = \frac{5}{12} T\right)$: 3 достигла крайняго положенія, 5 начала двигаться. Строка VII $\left(t = \frac{1}{2} T\right)$: частица 1 совершила половину колебанія, 4 достигла крайняго положенія, 7 приступаетъ къ движенію. Ясно, что разстояніе 1—7 равно полуволнѣ и что частицы 1 и 7, одновременно, но въ противоположныхъ направленіяхъ, выходящія изъ своихъ положеній равновѣсія, и далѣе постоянно будутъ находиться въ противоположныхъ фазахъ. Такъ въ строкѣ X частицы 1 и 7 достигли крайнихъ положеній одна влѣво, другая вправо. Строка XIII соотвѣтствуетъ моменту $t = T$, когда 1 совершила одно полное колебаніе, 7 половину колебанія и 13 только приступаетъ къ движенію. Разстояніе 1—13 равно длинѣ волны λ и частицы 1 и 13 далѣе постоянно будутъ находиться въ одинаковыхъ фазахъ; частицы же 7 и 13 находятся въ фазахъ противоположныхъ.

Строка XIV показываетъ распредѣленіе первыхъ 18-ти частицъ во время $nT + \frac{1}{12} T$, гдѣ n цѣлое число, бо̀льшее единицы. Для частицъ 1—14 строка XIV можетъ быть разсматриваема какъ простое продолженіе строкъ предыдущихъ; но частицы 15—18 въ строкахъ XIV до XXV какъ бы продолжаютъ уже ранѣе начатыя ими движенія.

Точки, находящіяся на разстояніи $\frac{\lambda}{2}$ другъ отъ друга, имѣютъ разность фазъ π; онѣ одновременно, но въ противоположныхъ направленіяхъ достигаютъ крайнихъ удаленій (на величину амплитуды a) отъ своихъ положеній равновѣсія. Это происходитъ черезъ равные промежутки времени $\frac{1}{2} T$, причемъ разсматриваемыя двѣ точки попеременно будутъ находиться на разстояніяхъ $\frac{\lambda}{2} + 2a$ и $\frac{\lambda}{2} - 2a$, такъ что разстояніе между ними мѣняется на величину $4a$. Когда это разстояніе меньше нормальнаго на величину $2a$, то разстоянія промежуточныхъ частицъ другъ отъ друга должны быть также меньше, чѣмъ при нормальномъ расположеніи (строка I), т.-е. между двумя разсматриваемыми частицами должно образоваться сгущеніе; если же разстояніе между ними больше нормальнаго на $2a$, то между ними произойдетъ разрѣженіе. Если A, B и C три частицы, находящіяся другъ отъ друга на нормальныхъ разстояніяхъ $AB = BC = \frac{\lambda}{2}$, то сгущенію въ данный моментъ между A и B должно соотвѣтствовать разрѣженіе между B и C. Спустя время $\frac{1}{2} T$ мы будемъ имѣть, на-

оборотъ, разрѣженіе между A и B и сгущеніе между B и C. На черт. 67 мы имѣемъ, напр., въ X строкѣ разрѣженіе между частицами 1 и 7, которое черезъ время $\frac{1}{2}T = \frac{6}{12}T$ переходитъ въ сгущеніе, какъ это видно въ строкѣ XVI, на которой мы имѣемъ еще рядомъ разрѣженіе между частицами 7 и 13. Еще спустя время $\frac{1}{2}T$ мы видимъ въ строкѣ XXII, наоборотъ, разрѣженіе между 1 и 7 и сгущеніе между 7 и 13. На строкахъ XVI, XVIII, XX и XXII сгущенія отмѣчены рядомъ параллельныхъ черточекъ. Промежутки между двумя сгущеніями соотвѣтствуютъ разрѣженіямъ. На чертежѣ ясно видно, какъ сгущенія и разрѣженія перемѣщаются въ сторону распространенія колебаній и притомъ, очевидно, съ тою же скоростью, съ которою передается и само колебательное движеніе.

Рис. 68.

Длина волны λ равна разстоянію центровъ двухъ сосѣднихъ сгущеній или разрѣженій.

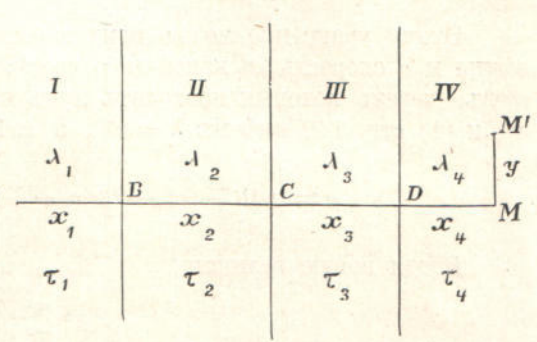


Рис. 69.

На черт. 68 рядъ точекъ (не отмѣченныхъ буквами) обозначаетъ частицы, находящіяся другъ отъ друга на равныхъ разстояніяхъ $\frac{\lambda}{2}$. Колебаніе распространяется отъ P къ Q. Въ нѣкоторый моментъ движенія частицъ имѣютъ направленія, указанныя верхнимъ рядомъ стрѣлокъ. Тогда въ A, B, C... образуются сгущенія, въ a, b... разрѣженія. Черезъ время $\frac{1}{2}T$ частицы движутся въ противоположныхъ направленіяхъ, обозначенныхъ нижнимъ рядомъ стрѣлокъ; теперь сгущенія A, B и C перешли въ A_1, B_1 и C_1; разрѣженія a и b въ a_1 и b_1, а въ α_1 образовалось новое разрѣженіе, перешедшее сюда слѣва, если P не есть начало луча.

§ 5. Уравненіе луча, прошедшаго рядъ срединъ. Уравненіе луча (4), стр. 143, можетъ быть обобщено для случая, когда лучъ послѣдовательно проходитъ черезъ рядъ срединъ, въ которыхъ онъ распространяется съ неодинаковою скоростью и въ которыхъ, поэтому, при одинаковомъ во всѣхъ средахъ періодѣ T, длина волны различная. Положимъ, что колебаніе, начинаясь въ точкѣ A (черт. 69), послѣдовательно проходитъ средины I, II, III и т. д.; длины отрѣзковъ луча въ этихъ срединахъ обозначимъ черезъ x_1, x_2, x_3..., длины волнъ черезъ λ_1, λ_2, λ_3... и, наконецъ, черезъ τ_1, τ_2, τ_3... времена, потребныя для распространенія луча въ послѣдовательныхъ срединахъ,

т.-е. отъ A до B, отъ B до C, отъ C до D и т. д. Какъ и при выводѣ формулы (4), стр. 143, мы имѣемъ $\frac{x_i}{\lambda_i} = \frac{\tau_i}{T}$. Время t считаемъ, какъ и прежде, отъ момента начала колебанія точки A. Перемѣщеніе $y = MM'$ частицы M во время t опредѣлится, какъ для поперечныхъ, такъ и для продольныхъ колебаній, общей формулой (4), стр. 114, въ которой, однако, вмѣсто t слѣдуетъ подставить $t - \sum \tau_i$, такъ какъ частица M начала колебаться позже A на время $\sum \tau_i$, въ теченіе котораго колебаніе распространилось отъ A до M: Итакъ

$$y = a \sin 2\pi \frac{t - \sum \tau_i}{T} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sum \frac{\tau_i}{T}\right).$$

Вышенаписанная пропорція даетъ намъ искомое обобщенное уравненіе луча:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sum \frac{x_i}{\lambda_i}\right) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda_1} - \frac{x_2}{\lambda_2} - \frac{x_3}{\lambda_3} - \ldots\right) \quad . \quad . \quad (10)$$

Этому уравненію можно придать еще другую форму. Пусть λ длина волны и v скорость въ какой-либо средѣ; это можетъ быть одна изъ тѣхъ средъ, черезъ которыя проходитъ лучъ или какая-либо другая. На основаніи (1) стр. 142 имѣемъ $\lambda = vT$, а слѣд. (10) можно написать въ видѣ

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(vt - \frac{\lambda}{\lambda_1} x_1 - \frac{\lambda}{\lambda_2} x_2 - \frac{\lambda}{\lambda_3} x_3 - \ldots\right).$$

Вводя новую величину

$$x = \sum \frac{\lambda}{\lambda_i} x_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10,a)$$

получаемъ уравненіе луча въ видѣ

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10,b)$$

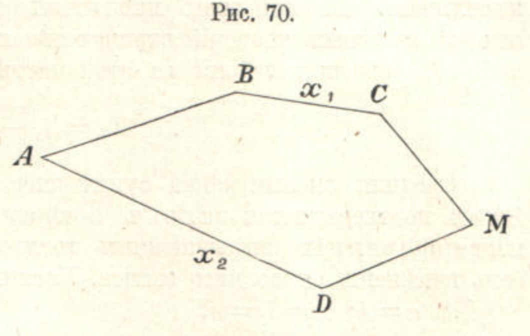
Величину x можно назвать приведенною длиною луча.

§ 6. Интерференція лучей съ одинаковымъ направленіемъ колебаній. Интерференціею, въ обширномъ смыслѣ слова, называется явленіе, происходящее, когда до одной и той же точки M доходятъ два колебательныхъ движенія или, выражаясь иначе, черезъ M распространяются два луча. Періоды двухъ колебаній мы будемъ считать одинаковыми. Такіе два луча «интерферируютъ» въ точкѣ M; результатомъ же интерференціи является нѣкоторое движеніе частицы, находящейся въ M, движеніе, вообще отличное отъ того, которое имѣло бы точка M, еслибы до нея доходилъ только одинъ или только другой изъ интерферирующихъ лучей.

Для рѣшенія задачи объ интерференціи, мы исходимъ изъ т.-наз. принципа сложенія малыхъ перемѣщеній, на основаніи котораго истинное удаленіе M_0M точки M отъ положенія равновѣсія M_0 въ данный

моментъ, по величинѣ и по направленію опредѣляется діагональю параллелограмма, построеннаго на тѣхъ двухъ перемѣщеніяхъ M_0M_1 и M_0M_2, которыя разсматриваемая точка имѣла бы въ этотъ же моментъ подъ вліяніемъ доходящаго до нея только перваго или только второго колебанія. Иначе говоря, искомое движеніе точки M получаемъ, производя такое сложеніе двухъ колебательныхъ движеній, до нея доходящихъ, какое подробно было разсмотрѣно въ §§ 4 и 7 главы IV этого отдѣла (стр. 119 и 125).

Рис. 70.



Мы увидимъ впослѣдствіи, что въ природѣ существуетъ цѣлый рядъ случаевъ, когда лучъ измѣняетъ свое направленіе (отраженіе, преломленіе), причемъ, вообще говоря, и амплитуда мѣняется. Оставляя въ сторонѣ вопросъ о причинахъ такого явленія, мы предположимъ, что колебанія, распространившіяся изъ нѣкоторой точки A (черт. 70) по двумъ различнымъ направленіямъ, дошли до одной и той же точки M, гдѣ и происходитъ интерференція двухъ лучей. Длину пути $ABCM$ обозначимъ черезъ x_1, длину пути ADM черезъ x_2. Разность

$$\delta = x_2 - x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

назовемъ разностью хода интерферирующихъ лучей. Амплитуды обозначимъ черезъ a и b и предположимъ, что колебанія имѣютъ въ обоихъ лучахъ одно и то же направленіе. Перемѣщенія y_1 и y_2, которыя имѣла бы точка M, еслибы до нея доходилъ только лучъ $ABCM$ или только лучъ ADM, опредѣляются уравненіями, см. (4) стр. 143,

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \text{ и } y_2 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Сравнивая это съ (27) и (28) стр. 119 и 120 и пользуясь формулой (34) стр. 121, мы видимъ, что результатомъ интерференціи колебаній будетъ гармоническое колебательное движеніе точки M съ амплитудою

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ δ разность хода лучей. Итакъ величина $2\pi \frac{\delta}{\lambda}$, представляя разность фазъ интерферирующихъ колебаній, играетъ здѣсь роль величины $\beta_1 - \beta_2$ въ (34) стр. 121. Энергія J колебанія точки M выразится черезъ энергіи i_1 и i_2 колебаній двухъ лучей формулой, см. (35) стр. 121,

$$J = i_1 + i_2 + 2\sqrt{i_1 i_2} \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Величина δ имѣетъ въ различныхъ точкахъ пространства различныя значенія; соотвѣтственно и множитель $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ будетъ имѣть всевозможныя значенія отъ -1 до $+1$. Въ части пространства, размѣры которой весьма велики сравнительно съ длиною волны λ, мы встрѣтимъ столько же положительныхъ значеній этого множителя, сколько и одинаковыхъ по абсолютной величинѣ значеній отрицательныхъ. Отсюда ясно, что среднее значеніе J_m энергіи колебанія въ этой части пространства равно

$$J_m = i_1 + i_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Средняя энергія равна суммѣ энергій интерферирующихъ колебаній. Этимъ подтверждается законъ сохраненія энергіи въ явленіяхъ интерференціи, вызывающихъ только измѣненіе распредѣленія энергіи, безъ измѣненія ея полнаго запаса. Частные случаи:

1. $a = b$; $i_1 = i_2 = i$.

$$\left.\begin{aligned} A &= 2a\cos\pi\frac{\delta}{\lambda} \\ J &= 4i\cos^2\pi\frac{\delta}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

2. Разность хода $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$ = четному числу полуволнъ:

$$A = a + b;\quad J = (\sqrt{i_1} + \sqrt{i_2})^2 \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Если $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$ и $a = b$, то

$$A = 2a;\quad J = 4i \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

3. Разность хода $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ = нечетному числу полуволнъ:

$$A = a - b;\quad J = (\sqrt{i_1} - \sqrt{i_2})^2 \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Если $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ и $a = b$, то

$$A = 0;\ J = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

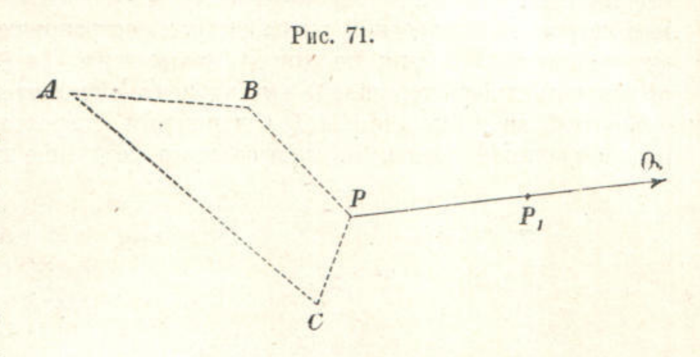
Два луча, интерферируя, даютъ наибольшую амплитуду, когда разность хода δ равна четному, наименьшую — когда она равна нечетному числу полуволнъ. Два луча, интерферируя, «взаимно уничтожаются», когда δ равно нечетному числу полуволнъ и въ то же время амплитуды интерферирующихъ лучей равны.

При равныхъ амплитудахъ энергія колеблется между $4i$ и 0; средняя величина равна $2i$, см. (14).

Иногда случается, что два колебанія, вышедшія изъ одной точки A

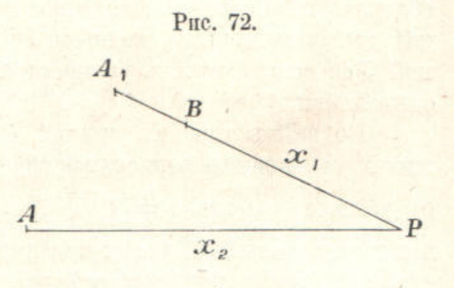
(рис. 71) и дошедшія по различнымъ путямъ ABP и ACP до одной и той же точки P, распространяются затѣмъ далѣе по общему направленію PQ. Въ этомъ случаѣ разность хода δ имѣетъ одно и то же значеніе во всѣхъ точкахъ P_1 прямой PQ, ибо $\delta = ABPP_1 - ACPP_1 = ABP - ACP$. Поэтому результатъ интерференціи будетъ общій для всѣхъ точекъ прямой PQ. Если $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$, то вдоль PQ распространяется колебаніе съ максимальной амплитудой и энергіей. Если $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$, то амплитуда и энергія минимальныя; если притомъ амплитуды a и b равны, то лучъ PQ вовсе не существуетъ, см. (19).

Рис. 71.



Мы до сихъ поръ предполагали, что оба колебанія, встрѣчающіяся въ одной точкѣ, исходятъ изъ одной точки A рис. 70 и 71. Однако можетъ случиться, что интерферирующія колебанія исходятъ изъ различныхъ точекъ A и A_1 (рис. 72). Для вычисленія амплитуды колебанія въ точкѣ P, мы можемъ воспользоваться формулой (12) стр. 149, гдѣ $\delta = x_2 - x_1$, только въ томъ случаѣ, когда точки A и A_1 находятся въ одинаковыхъ фазахъ. Если же A и A_1 завѣдомо находятся въ различныхъ фазахъ, то слѣдуетъ съ той или другой стороны отъ одной изъ нихъ, напр. отъ A_1 отыскать такую точку B, которая находилась бы въ одинаковой фазѣ съ другою точкою (въ данномъ случаѣ съ A). Отъ этой точки B слѣдуетъ считать разстояніе x_1, входящее въ выраженіе разности хода $\delta = x_2 - x_1$.

Рис. 72.

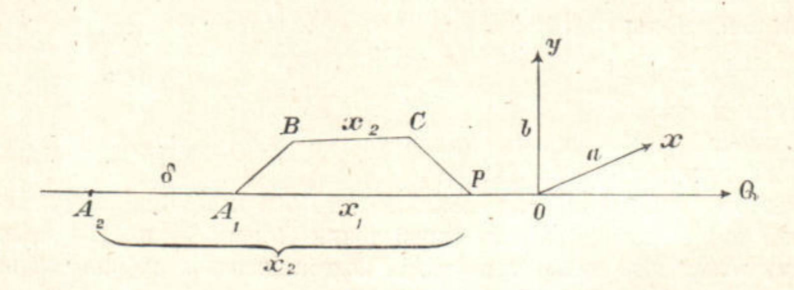


Разсмотрѣнный въ этомъ § случай интерференціи одинаково относится какъ къ поперечнымъ, такъ и къ продольнымъ колебаніямъ.

§ 7. Интерференція лучей, колебанія которыхъ расположены въ плоскостяхъ взаимно перпендикулярныхъ. Этотъ случай относится только къ колебаніямъ поперечнымъ. Положимъ, что вдоль PQ (рис. 73) распространяются два колебанія съ амплитудами a и b и общимъ періодомъ T; первое колебаніе расположено въ плоскости, проходящей черезъ PQ и ось Ox ($\perp$ къ плоскости чертежа), второе въ плоскости чертежа, проходящей черезъ PQ и ось Oy. Разность хода обоихъ лучей пусть равна δ, а слѣд. разность фазъ двухъ колебаній вдоль всего луча $\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$. Появленіе этихъ двухъ колебаній можетъ имѣть разныя причины: или изъ одной точки A_1

распространяются два колебанія въ различныхъ направленіяхъ A_1BCP и A_1P (тоже можетъ быть не прямая), которыя, начиная отъ P, идутъ далѣе въ одномъ общемъ направленіи PQ ($\delta = x_2 - x_1 = A_1BCP - A_1P$); или изъ двухъ точекъ A_1 и A_2, находящихся въ одинаковыхъ фазахъ распространяются два колебанія по общему направленію A_2A_1PQ, ($\delta = A_2A_1$); или, наконецъ, изъ одной точки A_1 распространяются два взаимно перпендикулярныхъ колебанія по одному направленію A_1PQ, но эти колебанія, по какимъ либо причинамъ (въ природѣ дѣйствительно встрѣчающимся), обладаютъ на протяженіи A_1P различными скоростями, а слѣд. и неодинаковой длиной волны. Вслѣдствіе этого колебанія въ точкѣ P уже будутъ

Рис. 73.



обладать нѣкоторою разностью фазъ φ (о разности хода δ въ этомъ случаѣ говорить нельзя), которая будетъ одна и та же для всѣхъ точекъ прямой PQ, если скорость распространенія обоихъ колебаній вдоль этой прямой одинаковая.

Во всѣхъ точкахъ прямой PQ частицы должны одновременно совершать два взаимно перпендикулярныхъ колебанія съ амплитудами a и b и съ разностью фазъ $\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ (если δ существуетъ). Этому случаю сложенія двухъ колебаній былъ посвященъ § 7 главы IV, стр. 125. Формула (57) стр. 126 указываетъ, что всѣ частицы луча PQ должны двигаться по эллипсамъ. Формула (58) стр. 128 показываетъ, что если смотрѣть со стороны Q, то движеніе частицъ будетъ намъ представляться происходящимъ обратно часовой стрѣлкѣ, если

$$0 < \varphi < \pi \text{ или } 0 < \delta < \frac{\lambda}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

по часовой стрѣлкѣ, если

$$\pi < \varphi < 2\pi \text{ или } \frac{\lambda}{2} < \delta < \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Круговое движеніе обратно часовой стрѣлкѣ получается, когда

$$a = b \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ или } \delta = \frac{1}{4}\lambda. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Круговое движеніе по часовой стрѣлкѣ, когда

$$a = b \text{ и } \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ или } \delta = \frac{3}{4}\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Если $\varphi = n\pi$ или $\delta = n\frac{\lambda}{2}$, то вдоль PQ распространяется простое гармоническое колебательное движеніе съ амплитудой $\sqrt{a^2+b^2}$ (см. частные случаи 1 и 2 стр. 126 и 127); положительное направленіе колебаній составляетъ съ Ox (амплитуда a) острый уголъ при n четномъ и тупой при n нечетномъ.

Частицы совершаютъ, какъ мы видѣли, въ общемъ случаѣ движенія по одинаковымъ и одинаково расположеннымъ (ибо φ вездѣ одинаковое) эллипсамъ, плоскости которыхъ перпендикулярны къ PQ. Отсюда слѣдуетъ, что частицы движутся по поверхности эллиптическаго цилиндра, ось котораго прямая PQ. Но такъ какъ они начинаютъ двигаться постепенно одна за другой, то ясно, что въ каждый данный моментъ онѣ расположены вдоль нѣкоторой винтообразной линіи, которая при $a = b$ превращается въ обыкновенную винтовую линію на поверхности кругового цилиндра. Если смотрѣть со стороны Q, то винтообразная линія, идущая къ наблюдателю, будетъ представляться обходящею цилиндръ по или обратно направленію движенія часовой стрѣлки, когда частицы соотвѣтственно движутся обратно или по часовой стрѣлкѣ.

Рис. 74.

§ 8. Интерференція встрѣчныхъ колебаній. Стоячія волны. Положимъ, что вдоль прямой MN (рис. 74) распространяются два гармоническихъ колебательныхъ движенія (одного періода) въ противоположныхъ направленіяхъ: колебаніе I слѣва направо съ амплитудой a и колебаніе II справа налѣво съ амплитудой b. Допускаемъ, что оба колебанія распространяются безпрепятственно въ противоположныхъ направленіяхъ. Спрашивается, какія движенія будутъ совершаться точками, лежащими на MN? Возьмемъ нѣкоторую точку P и положимъ, что разсматриваемыя два колебанія имѣютъ въ ней разность фазъ (фаза II-го минусъ фаза I-го) β. Если перейти на разстояніе x по направленію къ N въ точку P', то разность фазъ β' въ этой точкѣ будетъ уже другая. Фаза колебанія II въ P' больше, чѣмъ въ P, на величину $2\pi\frac{x}{\lambda}$, а фаза колебанія I въ P' меньше, чѣмъ въ P, на ту же величину $2\pi\frac{x}{\lambda}$. Отсюда ясно, что

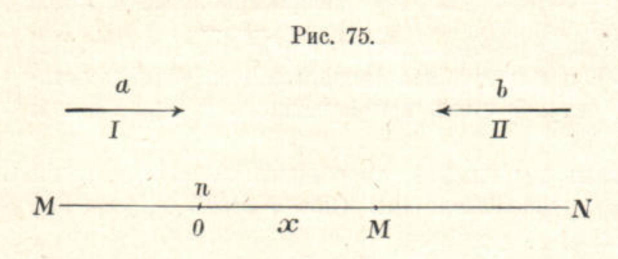
$$\beta' - \beta = 4\pi\frac{x}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Разность фазъ двухъ колебаній мѣняется при переходѣ

отъ одной точки къ другой вдвое быстрѣе, чѣмъ мѣняется фаза каждаго изъ двухъ колебаній.

Ограничиваемся случаемъ, когда колебанія продольныя или поперечныя, совпадающія по направленію. Разность фазъ β двухъ колебаній есть величина постоянная для данной точки, ибо колебанія имѣютъ одинаковый періодъ. Точки на прямой *MN* совершаютъ поэтому гармоническія колебательныя движенія съ амплитудой *A*, которая въ различныхъ точкахъ различна, мѣняясь отъ $a-b$ до $a+b$, см. (37) и (39) стр. 122. Чтобы яснѣе представить себѣ распредѣленіе колебаній вдоль *MN*, выберемъ такую точку *O* (рис. 75), въ которой разность фазъ $\beta=0$. Здѣсь происходитъ колебаніе съ наибольшей амплитудой $A=a+b$. Въ точкѣ *M*, находящейся на разстояніи x отъ *O*, разность фазъ $\beta=4\pi\frac{x}{\lambda}$. Мы видѣли (стр. 122), что $A=a+b$, когда $\beta=2n\pi$ или слѣд. когда $x=n\frac{\lambda}{2}=2n\frac{\lambda}{4}$, т.-е.

Рис. 75.



$$A=a+b \text{ при } x=0,\ \pm\frac{\lambda}{2},\ \pm\lambda,\ \pm\frac{3}{2}\lambda,\ \pm2\lambda \text{ и т. д.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

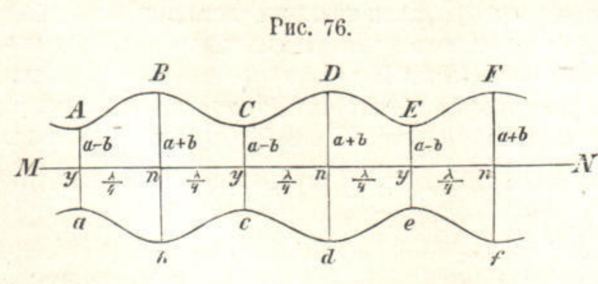
Минимумъ амплитуды $a-b$ имѣемъ при разности фазъ $\beta=(2n+1)\pi$ или слѣд., когда $x=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$, т.-е.

$$A=a-b \text{ при } x=\pm\frac{\lambda}{4},\ \pm\frac{3}{4}\lambda,\ \pm\frac{5}{4}\lambda \text{ и т. д.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Итакъ вдоль *MN* устанавливается колебаніе съ амплитудой, періодически мѣняющейся между предѣлами $a+b$ и $a-b$.

Точки съ наибольшей амплитудой называются пучностями, точки съ наименьшей — узлами. Разстояніе двухъ сосѣднихъ пучностей или двухъ сосѣднихъ узловъ равно $\frac{1}{2}\lambda$; разстояніе сосѣднихъ пучности и узла равно $\frac{1}{4}\lambda$. Совокупность пучности и узла называется «стоячею волною».

Рис. 76.



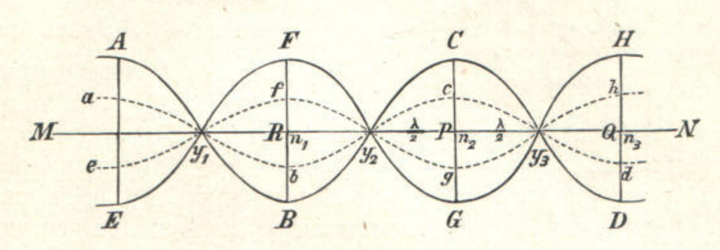
При $a=b$ имѣемъ въ пучностяхъ амплитуду $2a$, въ узлахъ амплитуду нуль, т.-е. частицы въ узлахъ находятся въ полномъ покоѣ.

Двѣ линіи *ABCDEF* и *abcdef*, рис. 76, показываютъ, между какими предѣлами колеблются частицы; пучности и узлы отмѣчены буквами *n* и *y*.

На рис. 77 показаны тѣ же предѣлы для случая $a = b$; въ пучностяхъ (n_i) амплитуда колебаній равна $2a$, въ узлахъ (y_i) частицы остаются неподвижными.

Обращаемся къ важному вопросу о фазахъ, въ которыхъ, въ данный моментъ, находятся частицы, образующія своими колебаніями стоячую волну. Обратимся къ пучности n_2 (рис. 77); здѣсь разность фазъ слагаемыхъ колебаній нуль, а потому искомая фаза равна общей фазѣ этихъ слагаемыхъ колебаній. Возьмемъ тотъ моментъ, когда всѣ эти фазы нуль, т.-е. когда частица *P*, расположенная въ центрѣ пучности, находится на прямой *MN*. Если мы изъ этой пучности перемѣстимся въ сторону на произ-

Рис. 77.



вольную величину x, то, какъ мы видѣли, фаза одного изъ составныхъ колебаній увеличивается на $2\pi\frac{x}{\lambda}$, фаза другого уменьшается на такую же величину, слѣд. слагаемымъ колебаніямъ соотвѣтствуютъ одинаковыя, но въ противоположныя стороны направленныя перемѣщенія. Отсюда явствуетъ, что частица, расположенная на произвольномъ разстояніи x отъ пучности, въ разсматриваемый моментъ также находится на прямой *MN*.

В с ѣ ч а с т и ц ы о д н о в р е м е н н о п р о х о д я т ъ ч е р е з ъ п о л о ж е н і я р а в н о в ѣ с і я, а с л ѣ д. о н ѣ и о д н о в р е м е н н о д о с т и г а ю т ъ к р а й н и х ъ у д а л е н і й о т ъ э т и х ъ п о л о ж е н і й.

Однако частицы, расположенныя въ двухъ сосѣднихъ пучностяхъ, находятся всегда въ противоположныхъ фазахъ, ибо если *P* стремится изъ *P* къ *C*, потому что слагаемыя колебанія въ данный моментъ направлены отъ *P* къ *C*, то въ этотъ же моментъ *Q* стремится изъ *Q* въ *D*, такъ какъ $PQ = \frac{\lambda}{2}$, слагаемыя колебанія въ *P* и *Q* находятся въ противоположныхъ фазахъ, и слѣд. слагаемыя движенія въ *Q* направлены отъ *Q* въ *D*.

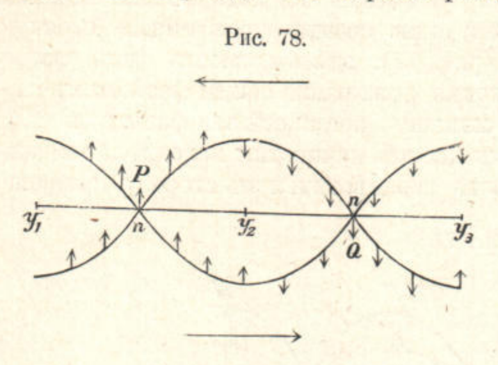
В с ѣ ч а с т и ц ы, р а с п о л о ж е н н ы я м е ж д у д в у м я у з л а м и, н а х о д я т с я в ъ о д и н а к о в ы х ъ, ч а с т и ц ы н а х о д я щ і я с я с ъ д в у х ъ с т о р о н ъ о т ъ о д н о г о у з л а — в ъ п р о т и в о п о л о ж н ы х ъ ф а з а х ъ.

На рис. 78 еще лучше выясняется сказанное. Здѣсь двѣ кривыя показываютъ распредѣленіе частицъ въ слагаемыхъ колебаніяхъ для момента, когда въ составномъ движеніи всѣ частицы находятся въ положеніяхъ равновѣсія; стрѣлки показываютъ направленія движенія въ данный или слѣдующій моментъ. Изъ рисунка ясно, что всѣ частицы, расположенныя въ

разсматриваемый моментъ между y_1 и y_2 движутся вверхъ, а расположенныя между y_2 и y_3 внизъ.

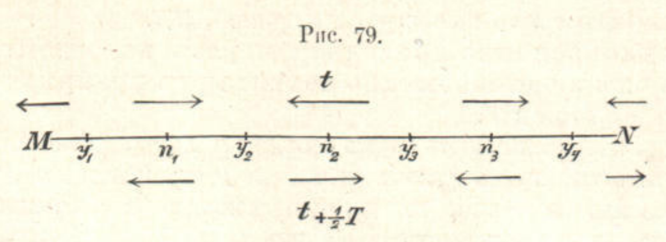
Въ нѣкоторый моментъ частицы расположены вдоль кривой $ABCD$ (рис. 77); черезъ время $\frac{1}{2}T$ ихъ расположеніе опредѣляется кривой $EFGH$. Но переходъ отъ перваго распредѣленія частицъ ко второму происходитъ совсѣмъ не такъ, какъ при распространеніи одного луча. Тамъ всѣ частицы доходили до одинаковаго разстоянія a отъ положенія равновѣсія и промежуточныя распредѣленія геометрически получались передвиженіемъ волнообразной линіи въ сторону $\left(\text{всего на } \frac{\lambda}{2}\right)$. Здѣсь распредѣленіе $ABCD$ переходитъ сперва въ $abcd$, затѣмъ въ прямолинейное $MRPQN$, далѣе въ $efgh$ и наконецъ въ $EFGH$. Въ стоячихъ волнахъ мы вовсе не имѣемъ дѣла съ какимъ либо поступательнымъ перемѣщеніемъ, вдоль луча, опредѣленнаго состоянія движенія. Въ несмѣщающихся пучностяхъ имѣемъ непрерывное максимальное движеніе, въ неподвижныхъ узлахъ совершенный покой.

Рис. 78.



Разсмотримъ еще стоячія волны при продольныхъ колебаніяхъ. И здѣсь чередуются пучности и узлы, находящіеся другъ отъ друга на разстояніи $\frac{1}{4}\lambda$. Всѣ частицы, расположенныя между двумя сосѣдними узлами y_1 и y_2, y_2 и y_3 и т. д. (рис. 79), имѣютъ въ данный моментъ времени t одно общее движеніе, указанное верхними стрѣлками; притомъ наиболѣе перемѣщаются частицы, находящіяся въ центрахъ пучностей. Изъ рисунка видно, что около узловъ y_2 и y_4 должны образоваться сгущенія, около узловъ y_1 и y_3 — разрѣженія. Спустя время $\frac{1}{2}T$ направленіе движеній опредѣлится нижними стрѣлками. Всѣ частицы одновременно пройдутъ черезъ ихъ положенія равновѣсія — въ этотъ моментъ въ средѣ вдоль MN матерія расположена нормально: нигдѣ нѣтъ ни сгущеній, ни разрѣженій. Вслѣдъ затѣмъ образуются разрѣженія около узловъ y_2 и y_4 и сгущенія около y_1 и y_3. Переходъ сгущенія или разрѣженія во время $\frac{1}{2}T$ отъ одного узла къ другому имѣетъ совершенно другой характеръ, чѣмъ тотъ же переходъ при простомъ распространеніи продольныхъ колебаній, изображенномъ на рис. 67, стр. 145. Тамъ сгущеніе послѣдова-

Рис. 79.



тельно переходило съ одного мѣста къ другому; здѣсь оно уничтожается въ одномъ и возникаетъ въ другомъ мѣстѣ, не побывавъ вовсе въ мѣстахъ промежуточныхъ.

Мы видимъ, что въ пучностяхъ частицы имѣютъ наиболѣе сильныя движенія, но плотность среды въ нихъ остается неизмѣнною; наоборотъ, въ узлахъ движенія нѣтъ, но происходятъ поперемѣнныя сгущенія и разрѣженія. Пучности суть мѣста наибольшихъ перемѣщеній, узлы — мѣста наибольшихъ измѣненій плотности.

§ 9. Волновая поверхность и волновая линія; энергія и амплитуда. Мы разсматривали до сихъ поръ распространеніе колебаній только по направленію нѣкоторой данной прямой. Перейдемъ къ разсмотрѣнію результатовъ одновременнаго распространенія колебаній по различнымъ направленіямъ, исходящимъ изъ одной точки O. Разберемъ вопросъ сперва чисто геометрически, а затѣмъ укажемъ, какія слѣдуетъ ввести ограниченія, переходя къ разсмотрѣнію физически возможныхъ случаевъ.

Положимъ, что нѣкоторая частица O изотропной (стр. 25) среды начинаетъ колебаться и что отъ нея колебанія распространяются по всѣмъ направленіямъ. Геометрическое мѣсто точекъ, до которыхъ распространились колебанія въ данный моментъ, назовемъ волновою поверхностью или поверхностью волны. Такъ какъ въ изотропной средѣ колебанія по всѣмъ направленіямъ распространяются съ одинаковою скоростью v, то ясно, что въ изотропной средѣ волновая поверхность есть поверхность сферы. Ея радіусъ R равенъ vt, гдѣ t время, считаемое отъ начала колебанія центральной точки O. Каждое отдѣльное колебаніе центра O вызоветъ чрезъ время t одно колебаніе частицъ на поверхности S сферы, а черезъ другое время t_1 одно колебаніе частицъ на поверхности S_1 другой сферы, радіусъ которой $R_1 = vt_1$. На основаніи принципа сохраненія энергіи вся имѣющаяся на лицо энергія должна быть одна и та же во времена t и t_1, если распространеніе колебаній не сопровождается попутнымъ «поглощеніемъ энергіи», т.-е. переходомъ энергіи колеблющихся частицъ среды въ какую-либо другую форму энергіи.

Число частицъ на поверхности волны, а слѣд. и ихъ общая масса пропорціональны квадратамъ радіусовъ сферъ, а слѣд. энергія колебанія отдѣльныхъ частицъ или совокупности частицъ, расположенныхъ на единицѣ поверхности сферы, обратно пропорціональна квадрату радіуса этой сферы. Отсюда слѣдуетъ, что амплитуда колебаній обратно пропорціональна первой степени радіуса, см. (26) и вытекающее изъ этой формулы слѣдствіе на стр. 118 и 119.

Если въ изотропной средѣ изъ точки O распространяются колебанія во всѣ стороны, то амплитуда колебаній мѣняется обратно пропорціонально первой, энергія — обратно пропорціонально второй степени разстоянія отъ O.

Бываютъ случаи, когда колебанія распространяются отъ точки O лишь по всѣмъ направленіямъ, лежащимъ на одной плоскости, проходящей черезъ O. Въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто точекъ, до которыхъ распространяется колебаніе въ данный моментъ времени, назовемъ волновою

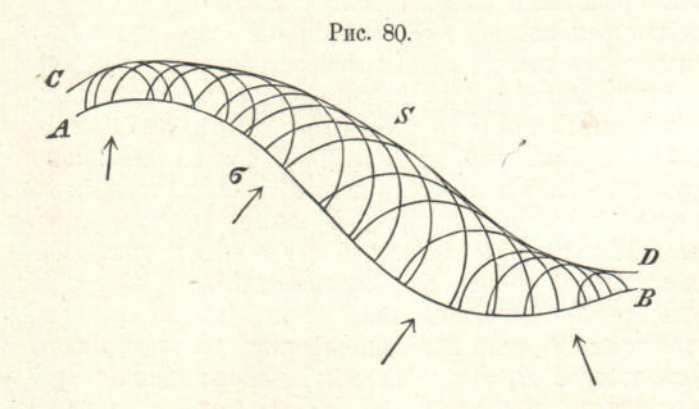
линіей или линіей волны. Въ изотропной средѣ волновая линія есть окружность и не трудно сообразить, что при такомъ распространеніи колебаній въ одной плоскости, энергія колебаній обратно пропорціональна первой степени, амплитуда же обратно пропорціональна корню квадратному изъ разстоянія отъ точки O.

Въ анизотропной средѣ (стр. 25) волновая поверхность уже не будетъ шаровою. Она, напр., можетъ быть поверхностью эллипсоида.

Точно также волновая линія уже не будетъ окружностью, но можетъ быть эллипсомъ.

§ 10. Принципъ Гюйгенса. Если изъ какой-либо точки O колебанія распространяются во всѣ стороны и, между прочимъ, доходятъ до другой точки M, то колебанія этой послѣдней существенно ничѣмъ не отличаются отъ колебаній первой точки O. Но если движеніе этой послѣдней вызвало распространяющіяся во всѣ стороны колебанія, то нѣтъ причины, почему движенія точки M не вызовутъ также въ окружающей ее средѣ колебанія, распространяющіяся отъ нея, какъ отъ центра, во всѣ стороны. Такъ и будетъ въ дѣйствительности и это даетъ намъ возможность, пользуясь особымъ геометрическимъ методомъ, извѣстнымъ подъ названіемъ принципа Гюйгенса, построить волновую поверхность S для какого угодно момента времени t, если намъ извѣстны тѣ предыдущіе, одинаковые или различные моменты времени t_0, когда точки нѣкоторой произвольной поверхности σ начинали колебаться. Когда t_0 общее для всѣхъ точекъ на σ, то ясно, что σ сама есть поверхность волны, соотвѣтствующая времени t_0.

Рис. 80.



Построеніе Гюйгенса заключается въ слѣдующемъ: всѣ точки M поверхности σ слѣдуетъ принять за новые центры колебаній, начинающихъ распространяться во всѣ стороны съ того момента t_0, когда соотвѣтствующія точки M приходятъ въ движеніе; слѣдуетъ построить т.-наз. элементарныя волновыя поверхности (шары, эллипсоиды) около каждой точки M, придавъ имъ тѣ размѣры, которые онѣ получатъ за время $t - t_0$. Огибающая (т.-е. общая касательная поверхность) ко всѣмъ этимъ элементарнымъ поверхностямъ, расположенная съ той стороны отъ σ, куда колебанія распространяются и будетъ искомою волновою поверхностью S вовремя t.

Принципомъ Гюйгенса мы будемъ пользоваться, какъ даннымъ гео-

метрическимъ методомъ, не приводя доказательства его правильности, что не можетъ быть сдѣлано элементарнымъ путемъ.

Для разъясненія можетъ служить рис. 80; AB представляетъ ту поверхность σ, до точекъ которой въ неодинаковыя времена t_0 дошло одно единичное колебательное движеніе съ той стороны, на которой помѣщены стрѣлки. Принявъ всѣ точки на поверхности σ за новые центры колебаній, мы описываемъ около нихъ полусферы радіусами, равными $v(t - t_0)$. Мы приняли, что колебаніе раньше всего достигаетъ среднихъ частей поверхности AB. Общая касательная поверхность CD къ этимъ полусферамъ и будетъ искомою волновою поверхностью въ моментъ времени t. Понимать слѣдуетъ это такъ: ко всякой точкѣ пространства распространяются колебанія отъ всѣхъ точекъ поверхности σ. Интерферируя, эти колебанія взаимно уничтожаются, во-первыхъ во всѣхъ точкахъ пространства, лежащаго «за» поверхностью σ (гдѣ помѣщены стрѣлки). Колебаніе не идетъ назадъ и потому мы можемъ ограничиться полусферами. Во-вторыхъ, колебанія во время $t-t_0$ уничтожаются во всѣхъ точкахъ, лежащихъ между σ и S; въ разсматриваемый моментъ находятся въ движеніи только частицы, лежащія на поверхности S.

Еслибъ среда была анизотропною, то намъ пришлось бы, вмѣсто полусферъ, построить половины элементарныхъ волновыхъ поверхностей другой формы, напр., полу-эллипсоиды.

Дѣло упрощается, когда поверхность σ сама волновая, когда t_0 общее для всѣхъ ея точекъ и полусферы имѣютъ всѣ одинъ и тотъ же радіусъ. На рис. 81 показанъ простой случай построенія сферической волновой поверхности S (центръ въ O), когда дана волновая поверхность σ для болѣе ранняго момента времени.

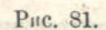
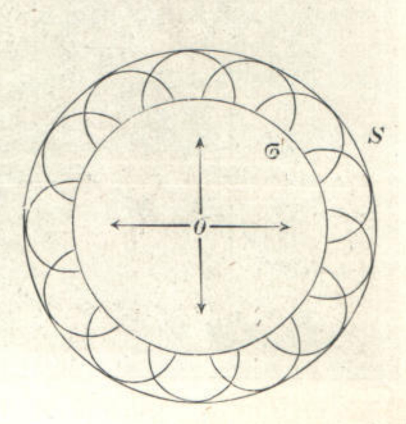


Рис. 81.



Когда центръ колебаній находится на весьма большомъ разстояніи отъ того мѣста, въ которомъ мы разсматриваемъ колебанія, то часть сферической волновой поверхности можетъ быть принята за плоскость; мы будемъ ее называть плоскою волною (хотя этотъ терминъ иногда прилагается къ тому, что мы назвали волновою линіей, стр. 157). На черт. 82 показано весьма простое геометрическое построеніе плоской волны $CD = S$ по данному ея положенію $AB = \sigma$ для какого-либо предшествующаго момента времени.

Замѣтимъ себѣ такое положеніе: въ изотропной средѣ лучъ есть нормаль къ волновой поверхности, напр. къ плоскости; такъ PQ (черт. 82) одинъ изъ лучей.

Принципъ Гюйгенса безъ измѣненія прилагается и къ волновымъ линіямъ. Рис. 80, 81 и 82 непосредственно могутъ относиться и къ этому случаю, если предположить, что σ и S изображаютъ на нихъ линіи, рас-

положенныя въ плоскости распространенія колебаній. Вмѣсто полусферъ мы будемъ имѣть полуокружности.

§ 11. Такъ называемое прямолинейное распространеніе колебаній. Введеніе понятія о волновой поверхности, отъ всѣхъ точекъ которой распространяются колебанія во всѣ стороны и о послѣдовательномъ возникновеніи новыхъ волновыхъ поверхностей, которыя могутъ быть построены на основаніи принципа Гюйгенса, совершенно устраняетъ изъ числа разсматриваемыхъ явленій то, что мы назвали лучемъ, т.-е. прямую, вдоль которой распространяется колебательное движеніе. Колебаніе любой точки A (рис. 83) не слѣдуетъ уже разсматривать какъ слѣдствіе простого распространенія колебаній изъ P до A, гдѣ P промежуточная точка на прямой OA, соединяющей A съ начальнымъ центромъ O колебаній; мы должны колебаніе точки A разсматривать, какъ результатъ интерференціи колебаній, дошедшихъ до A отъ всѣхъ точекъ волновой поверхности QR.

Рис. 82.

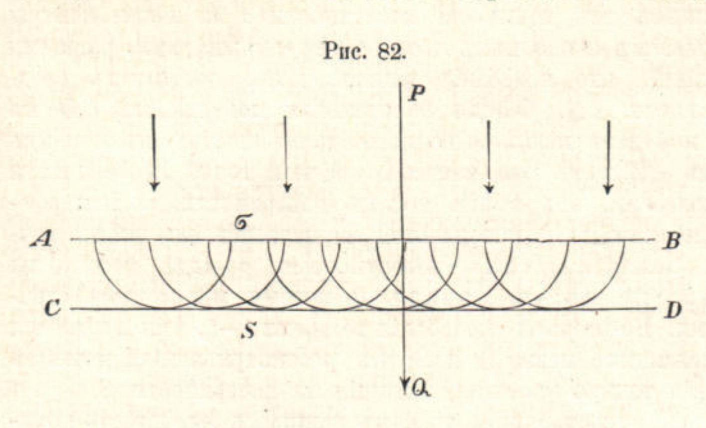
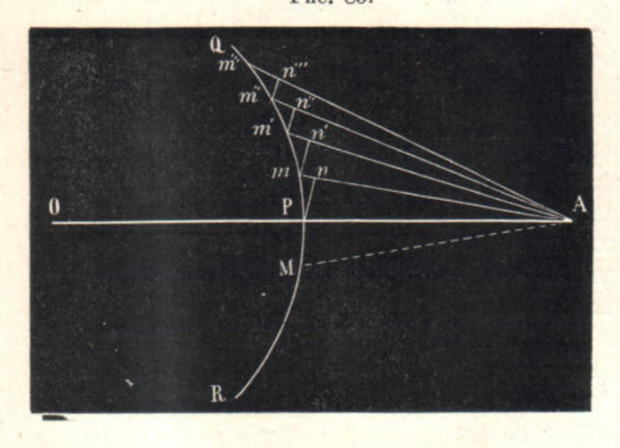


Рис. 83.



Несмотря на это, все-таки возможно такъ сказать спасти понятіе о лучѣ и удержать его, какъ весьма полезное геометрическое пособіе хотя бы для случая свободнаго распространенія колебаній въ однородной средѣ. Дѣлается это на основаніи слѣдующихъ соображеній, не выдерживающихъ, однако, строгой критики, но могущихъ дать приблизительное понятіе о томъ, что здѣсь происходитъ. Проведемъ изъ точки A рядъ прямыхъ Am, Am', Am''...., длины которыхъ, вмѣстѣ съ длиною AP составляли бы ариѳметическую прогрессію съ разностью $\frac{\lambda}{2}$, такъ что $Am - AP = Am' - Am = Am'' - Am' = \ldots\ldots = \frac{\lambda}{2}$. Вращая всю фигуру около прямой OA, получаемъ рядъ поверхностей конусовъ, которые вырѣзываютъ изъ

волновой поверхности QR кольцевыя зоны и одинъ центральный сегментъ mM. Обозначая черезъ r_n длину образующей n-таго конуса, такъ что $r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$, гдѣ $r_0 = AP$, мы видимъ, что n-тая зона заключена между поверхностями конусовъ, образующія которыхъ r_n и $r_{n+1} = r_n + \frac{\lambda}{2}$; нулевая зона и будетъ центральнымъ сегментомъ. Поверхность n-той зоны обозначимъ черезъ S_n. Изъ рис. 84 видно, что $S_n = 2\pi Rh$, гдѣ $h = R\left\{\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\right\}$; слѣдовательно

$$S_n = 2\pi R^2\left\{\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Далѣе рис. 84 даетъ

$$\left(r_n + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (R + r_0)^2 + R^2 - 2R(R + r_0)\cos(\alpha + \beta)$$
$$r_n{}^2 = (R + r_0)^2 + R^2 - 2R(R + r_0)\cos\alpha.$$

Вычитая, получаемъ

$$\lambda\left(r_n + \frac{\lambda}{4}\right) = 2R(R + r_0)\left\{\cos\alpha - \cos(\alpha - \beta)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Раздѣляя (a) на (b), имѣемъ

$$S_n = \frac{\pi R\lambda}{R + r_0}\left(r_n + \frac{\lambda}{4}\right) = S_0 + n\,\frac{\pi R\lambda^2}{2(R + r_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Мы положили $r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$ и обозначили черезъ S_0 поверхность сегмента

$$S_0 = \frac{\pi R\lambda}{R + r_0}\left(r_0 + \frac{\lambda}{4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Формула (27) показываетъ, что поверхности зонъ составляютъ ариѳметическую прогрессію и слѣд. *каждая изъ нихъ равна ариѳметическому среднему поверхностей двухъ зонъ, съ нею сосѣднихъ*. На основаніи этого разсуждаютъ такъ: ко всякой точкѣ M (рис. 84), лежащей на одной изъ зонъ, можно подобрать такія двѣ точки M_1 и M_2, лежащія на двухъ сосѣднихъ зонахъ, что AM_2 и AM_1 будутъ отличаться отъ AM на $\frac{\lambda}{2}$. Колебаніе, идущее отъ M къ A, уничтожается, слѣд., однимъ изъ колебаній, идущихъ отъ M_1 или M_2. Всѣ колебанія, идущія отъ n-той зоны, мы можемъ себѣ представить уничтоженными колебаніями, идущими отъ половины $(n-1)$-ой и половины $(n+1)$-ой зонъ. Такъ колебанія 3-ей зоны уничтожаются колебаніями половины 4-ой и половины 2-ой зоны; колебанія 2-ой — половиною 1-ой и половиною 3-ей; наконецъ, колебанія 1-ой зоны — половиною 2-ой и половиною сегмента. *Неуничтоженными остаются колебанія, идущія отъ половины центральнаго сегмента*. Къ этому слѣдуетъ прибавить, что колебанія, идущія къ A (рис. 83) отъ удаленныхъ зонъ должны пройти болѣе длинный путь и (при болѣе

глубокомъ анализѣ вопроса это оказывается особенно важнымъ), что они выходятъ изъ поверхности QR подъ наклономъ къ нормали. Вслѣдствіе этого можно вовсе не принимать во вниманіе колебаній, идущихъ къ A отъ зонъ, болѣе удаленныхъ отъ центральнаго сегмента.

Разсматривая колебаніе въ A какъ результатъ сложенія колебаній, вышедшихъ изъ поверхности центральнаго сегмента, равной $\frac{1}{2}S_0$, см. (28), и расположенной вокругъ точки P, мы тѣмъ самымъ какъ бы возвращаемся къ представленію о прямолинейномъ распространеніи колебаній, къ представленію о лучахъ, въ дѣйствительности не имѣющихъ никакого реальнаго значенія, но оказывающихся весьма полезными при геометрическихъ построеніяхъ, къ которымъ приходится обращаться, изучая распространеніе колебаній въ различныхъ случаяхъ.

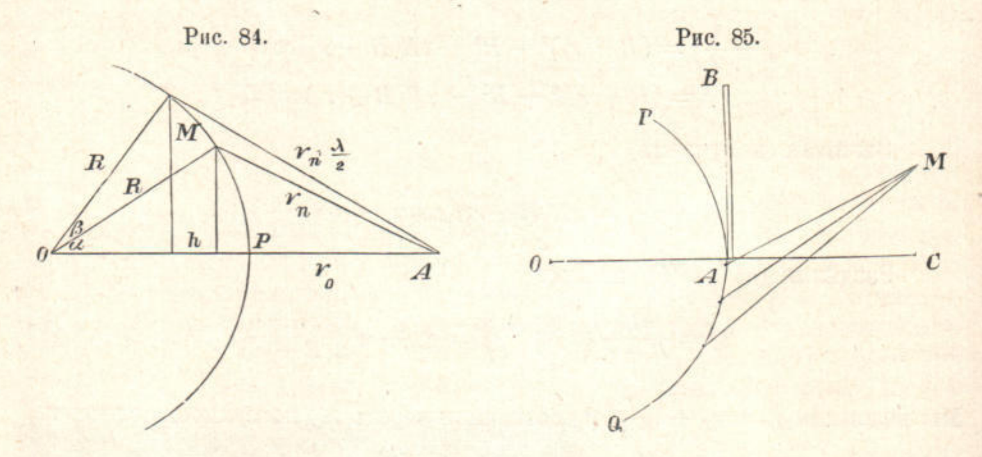


Рис. 84. Рис. 85.

Предыдущія разсужденія о взаимномъ уничтоженіи дѣйствій различныхъ зонъ очевидно приложимы только въ случаѣ, когда вся волновая поверхность QR (рис. 83) дѣйствительно существуетъ, т.-е. только къ случаю т. наз. свободнаго распространенія колебаній.

§ 12. Диффракція. Мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, что реальное, физическое значеніе имѣютъ только волновыя поверхности; понятіе же о лучѣ можетъ быть удержано, и то съ натяжкой, только въ случаѣ свободнаго во всѣ стороны распространенія колебаній. Это особенно рѣзко подтверждается на случаяхъ несвободнаго распространенія волны, когда эта волна встрѣчаетъ на своемъ пути преграду, пресѣкающую дальнѣйшее распространеніе какой-либо ея части. Тогда происходятъ особаго рода явленія, называемыя явленіями диффракціи; при разсмотрѣніи этихъ явленій теряется всякая возможность удержать представленіе о лучахъ. Относя подробности къ ученію о свѣтѣ, мы здѣсь дадимъ только понятіе объ этихъ явленіяхъ. Положимъ, что волновая поверхность PAQ (рис. 85) встрѣчаетъ на своемъ пути экранъ AB, задерживающій половину ея, AP. Еслибы изъ точки O распространялось колебаніе лучами во всѣ стороны, то крайній

лучъ былъ бы OAC; колебанія распространялись бы только въ части пространства CAQ, а въ части CAB частицы должны были бы оставаться въ покоѣ. Совсѣмъ другое получается, если всѣ точки поверхности AQ разсматривать, какъ новые центры колебаній. Въ этомъ случаѣ ясно, что и въ точку M, лежащую въ части BAC, могутъ попадать колебанія. Болѣе сложныя вычисленія показываютъ, что эти колебанія вообще взаимно не уничтожаются, что слѣд. распространяющееся изъ O движеніе отчасти какъ бы огибаетъ экранъ AB. Появленіе колебаній въ части пространства BAC и принадлежитъ къ явленіямъ диффракціи.

Второй случай представленъ на рис. 86: на пути волновой поверхности PQ помѣщено небольшое тѣло AB, напр. кружокъ или узенькая полоска (напр. проволока), ширина которой AB. Въ пространство $CABD$ попадаютъ колебанія, исходящія отъ частей AP и BQ волновой поверх-

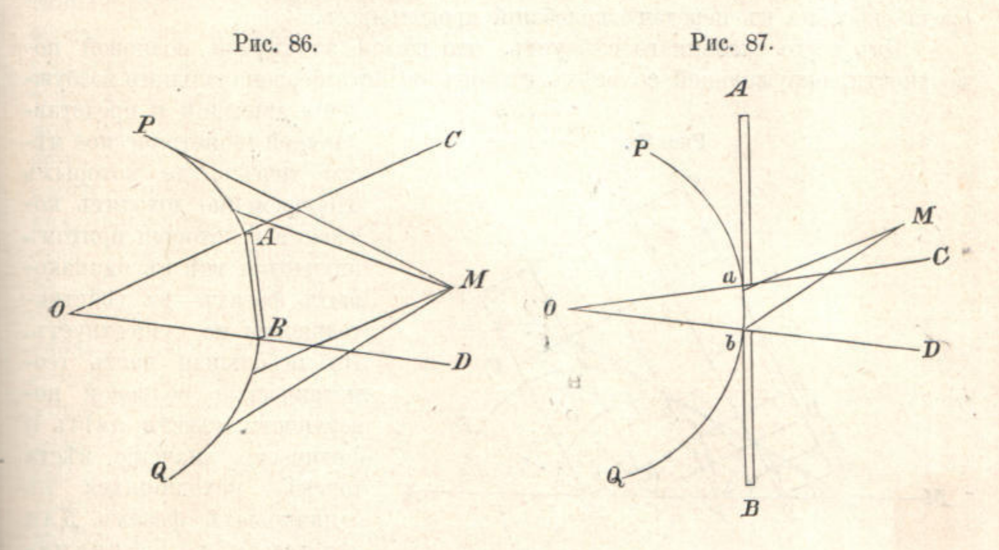


Рис. 86. Рис. 87.

ности и **въ особенности въ центральной точкѣ** M **они не уничтожаются.**

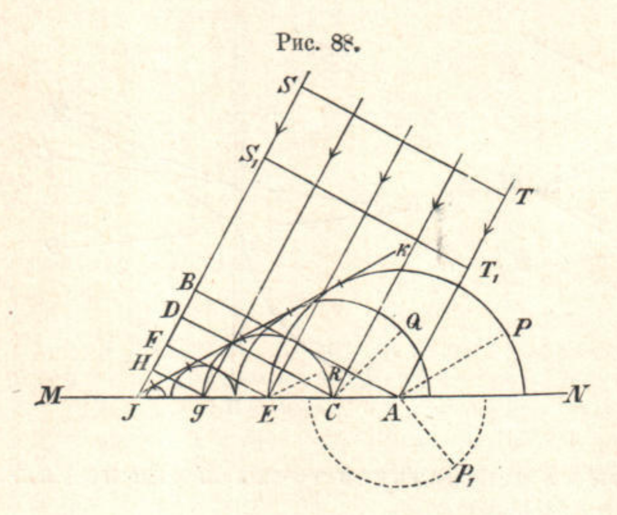
Третій случай мы имѣемъ, когда на пути волновой поверхности PQ (рис. 87) поставленъ экранъ AB съ весьма малымъ отверстіемъ ab. Понятіе о лучахъ привело бы къ невѣрному предположенію, что колебанія должны распространяться только внутри части $CabD$ пространства. Въ дѣйствительности колебанія, исходящія отъ различныхъ точекъ небольшой части ab поверхности волны, распространяясь во всѣ стороны, заставляютъ колебаться точки M, лежащія въ направленіяхъ отъ ab, составляющихъ большіе углы съ направленіемъ OaC и ObD. Особенно изъ этого третьяго случая диффракціи явствуетъ, что ни о какомъ прямолинейномъ распространеніи колебаній вообще говорить нельзя, и что поэтому лучами и при геометрическихъ построеніяхъ слѣдуетъ пользоваться съ величайшею осторожностью.

Явленія диффракціи происходятъ и при распространеніи волновой линіи (стр. 157), встрѣчающей на своемъ пути какія-либо преграды.

§ 13. Физическое понятіе о волновой поверхности. Мы пришли къ понятію о сферической волновой поверхности въ свободной изотропной средѣ, предполагая, что первоначально начинаетъ колебаться только одна точка и что это колебаніе передается всѣмъ окружающимъ ее (со всѣхъ сторонъ) частицамъ. Но такой случай физически невозможенъ. Первоначальныя колебанія исходятъ всегда отъ частицъ, лежащихъ въ нѣкоторой конечной, хотя иногда и небольшой части пространства и притомъ, во многихъ случаяхъ, колебанія различныхъ частицъ обладаютъ неодинаковыми направленіями и фазами. Кромѣ того отъ каждой отдѣльной колеблющейся частицы не передаются колебанія одинаково во всѣ стороны, но преимущественно или въ плоскости, перпендикулярной къ направленію колебаній, когда среда такова, что въ ней могутъ распространяться колебанія поперечныя или по направленію первоначальнаго колебанія, когда среда способна къ передачѣ колебаній продольныхъ.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что цѣлой замкнутой волновой поверхности, окружающей со всѣхъ сторонъ область первоначальнаго возбужденія движеній и представляющей геометрическое мѣсто точекъ, до которыхъ одновременно доходятъ колебанія и которыя притомъ находятся всѣ въ одинаковыхъ фазахъ—въ дѣйствительности не существуетъ. Но небольшая часть геометрической волновой поверхности можетъ имѣть и физическое значеніе мѣста точекъ, находящихся въ одинаковыхъ фазахъ. Для объясненія физическихъ явленій, мы должны поэтому ограничиваться разсмотрѣніемъ лишь небольшихъ участковъ волновой поверхности, во всякомъ случаѣ видимыхъ изъ мѣста первоначальнаго возбужденія колебаній подъ весьма небольшимъ угломъ. Такъ на дѣлѣ всегда и поступаютъ.

Рис. 88.



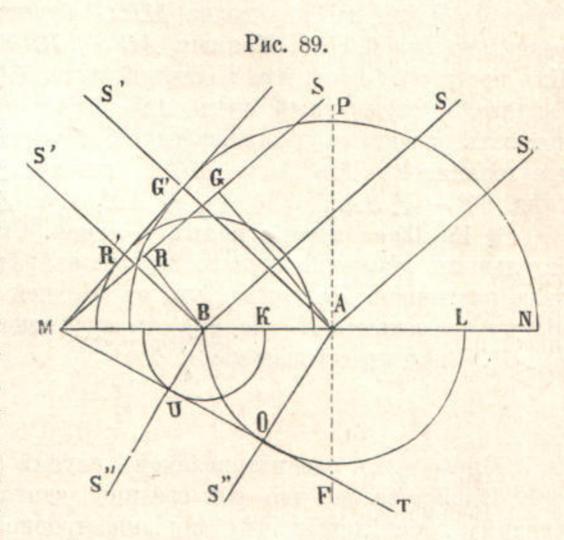
Для волновой линіи дѣло представляется проще, когда колебанія поперечныя. Въ этомъ случаѣ замкнутыя волновыя линіи, всѣ точки которыхъ находятся при одинаковой фазѣ (кольца на поверхности воды), физически возможны.

§ 14. Отраженіе волнъ и лучей. Если колебательное движеніе доходитъ до поверхности, разграничивающей двѣ различныя средины, то оно отчасти распространяется во второй средѣ, отчасти же возвращается назадъ въ первую среду, причемъ образуются новыя волновыя поверхности, удаляющіяся отъ поверхности раздѣла. Это явленіе называется отраженіемъ.

Принципъ Гюйгенса даетъ намъ возможность построить отраженную волну и вывести для изотропной среды элементарный законъ равенства угловъ паденія и отраженія лучей, т.-е. прямыхъ, перпендикулярныхъ къ волновымъ поверхностямъ.

Положимъ, что MN (рис. 88) представляетъ плоскость раздѣла двухъ срединъ; ST часть плоской волны (стр. 159), перпендикулярной, какъ и плоскость MN, къ плоскости рисунка. Прямыя, перпендикулярныя къ ST суть лучи. Рис. 82 стр. 160 показываетъ, какимъ образомъ волна ST переходитъ въ S_1T_1 и вообще передвигается параллельно самой себѣ. Въ нѣкоторый моментъ времени крайняя точка T разсматриваемой части плоской волны дойдетъ въ A до плоскости раздѣла MN. Въ этотъ моментъ волна имѣетъ положеніе AB. Съ этого момента точка A дѣлается новымъ центромъ колебаній, отъ котораго распространяется полушаровая элементарная волновая поверхность обратно въ первую среду. Сказанное относится ко всѣмъ точкамъ прямой A, т.-е. прямой, проходящей черезъ A и перпендикулярной къ плоскости рисунка. Огибающая полушаровидныхъ поверхностей будетъ очевидно поверхностью полуцилиндра, ось котораго прямая A. Нѣсколько позже колебаніе достигаетъ прямой C; въ этотъ моментъ положеніе плоской волны опредѣлится прямой CD и съ этого момента около прямой C начинаетъ образовываться полуцилиндрическая волновая поверхность. Еще позже колебаніе доходитъ до прямыхъ E, G и т. д. Наконецъ оно достигаетъ до точекъ прямой J. Къ этому моменту времени уже успѣло образоваться безчисленное множество полуцилиндрическихъ волнъ около прямыхъ, проходящихъ черезъ различныя точки прямой AJ и перпендикулярныхъ къ плоскости рисунка. Чѣмъ ближе точка къ J, тѣмъ меньше радіусъ сѣченія полуцилиндра. Легко опредѣлить этотъ радіусъ. Точки A и B одновременно начали колебаться; полуцилиндръ образовался около A въ теченіе того времени, пока колебаніе распространилось отъ B до J; отсюда слѣдуетъ, что радіусъ полукруга, описаннаго около A, т.-е. $AP = BJ$. Точно также $CQ = DJ$, $ER = FJ$ и т. д.

Рис. 89.



Плоскость раздѣла MN представляетъ частный случай поверхности $s = AB$ рисунка 80 стр. 158, на которомъ мы выяснили принципъ Гюйгенса. Поверхность, касательная ко всѣмъ полуцилиндрамъ и будетъ искомою новою волновою поверхностью, образующеюся при отраженіи. Докажемъ, что это есть плоскость, проходящая черезъ J или, иначе, что одна и та же

прямая JK есть общая ко всѣмъ полуокружностямъ касательная. Для этого обратимся къ рис. 89, въ которомъ AG часть падающей плоской волны, SA, SB, SM падающіе лучи. Въ моментъ, когда колебаніе достигаетъ точки M, мы имѣемъ въ плоскости рисунка около A полукругъ, радіусъ котораго равенъ GM и около промежуточной точки B полукругъ съ радіусомъ, равнымъ RM. Проведемъ изъ M двѣ касательныя MR' и MG' къ этимъ полуокружностямъ и докажемъ, что онѣ совпадаютъ, т.-е. что M, R' и G' лежатъ на одной прямой. Соединимъ G' съ A и R' съ B. Треугольники $MG'A$ и MGA равны, ибо $\angle G' = \angle G = 90^0$ и радіусъ $AG' = MG$. Отсюда слѣдуетъ, что $\angle G'MA = \angle GAM$. Точно также изъ равенства треугольниковъ $MR'B$ и MRB слѣдуетъ, что $\angle R'MB = \angle RBM$. Но $\angle GAM$ и $\angle RBM$ равны между собою, ибо $GA \parallel RB$; слѣдоват. $\angle G'MA = \angle R'MB$, что и требовалось доказать. Образовавшаяся такимъ образомъ новая плоская волна $MR'G'$ будетъ уже далѣе перемѣщаться параллельно самой себѣ. Прямыя $AG'S'$, $BR'S'$ суть отраженные лучи. Изъ построенія ясно, что падающій лучъ SA, нормаль AP къ поверхности раздѣла и отраженный лучъ AS' лежатъ въ одной плоскости. Остается доказать равенство угловъ паденія SAP и отраженія PAS'. Изъ равенства треугольниковъ $MG'A$ и MGA имѣемъ $\angle G'AM = \angle GMA = \angle SAN$; слѣд. $90^0 - \angle SAN = 90^0 - \angle G'AM$, т.-е. $\angle SAP = \angle PAS'$.

§ 15. Преломленіе волнъ и лучей. Скорость распространенія колебательныхъ движеній даннаго періода въ различныхъ изотропныхъ срединахъ различная. Положимъ, что въ верхней изъ двухъ срединъ, раздѣленныхъ плоскостью MN (рис. 88), эта скорость равна v_1, въ нижней v_2 и пусть $v_1 > v_2$. Введемъ обозначеніе

$$\frac{v_1}{v_2} = n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Число n въ разсматриваемомъ случаѣ больше единицы.

Весьма важно, что обѣ средины считаются нами изотропными. Мы увидимъ впослѣдствіи, что для анизотропной средины слѣдуетъ отличать скорость луча и скорость волны. Обозначеніе (29) относится въ этомъ случаѣ только къ скоростямъ волнъ.

Когда колебаніе достигаетъ точки A, то эта точка дѣлается центромъ колебаній и для второй среды, а потому около прямой A (перпендикулярной къ плоскости рисунка) и во второй средѣ образуется полуцилиндрическая поверхность. Однако, въ тотъ моментъ, когда колебаніе достигло точки J и въ первой средѣ образовался полуцилиндръ съ радіусомъ $AP = BJ$, мы во второй средѣ будемъ имѣть полуцилиндръ, радіусъ AP_1 котораго меньше $AP = BJ$ въ отношеніи $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n}$. То же самое будетъ относиться и къ радіусамъ безчисленнаго множества другихъ полуцилиндровъ, которые къ этому же моменту успѣютъ образоваться во второй средѣ около прямыхъ, перпендикулярныхъ къ MN и къ плоскости рисунка.

Докажемъ, что общая къ этимъ полуцилиндрамъ касательная поверхность есть также плоскость. Для этого обращаемся вновь къ рис. 89.

Около A описана полуокружность радіусомъ AL (она случайно проходитъ черезъ B) и около B—радіусомъ BK, причемъ

$$\frac{AL}{GM}=\frac{BK}{RM}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Изъ M проводимъ касательныя MU и MO къ двумъ полуокружностямъ и докажемъ, что эти касательныя совпадаютъ.

Треугольники BMU и AMO подобны, такъ какъ $\angle O=\angle U=90^\circ$ и стороны пропорціональны, ибо изъ рисунка и изъ (30) получается:

$$\frac{AM}{BM}=\frac{GM}{RM}=\frac{AL}{BK}=\frac{AO}{BU}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\angle AMO=\angle BMU$, что и требовалось доказать. Плоская волна, образовавшаяся во второй средѣ, перемѣщается далѣе параллельно самой себѣ; очевидно, что прямыя AS'', BS'' представляютъ преломленные лучи. Уголъ $S''AF$ есть уголъ преломленія.

Выведемъ законы преломленія. Прежде всего ясно, что падающій лучъ SA, нормаль PF и преломленный лучъ AS'' лежатъ въ одной плоскости. Но далѣе

$$AG'=MA\sin G'MA=MA\sin GAM=MA\sin SAP$$
$$AO=MA\sin AMO=MA\sin S''AF.$$

Слѣдовательно

$$\frac{\sin SAP}{\sin S''AF}=\frac{AG'}{AO}=\frac{GM}{AL}.$$

Равенство (30) даетъ

$$\frac{\sin SAP}{\sin S''AF}=\frac{v_1}{v_2}=n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Мы видимъ, что отношеніе синуса угла паденія къ синусу угла преломленія для колебаній съ даннымъ періодомъ есть величина постоянная для данныхъ двухъ срединъ, характеризованныхъ скоростями распространенія v_1 и v_2; это отношеніе равно отношенію скорости въ первой къ скорости во второй срединѣ. Оно называется относительнымъ коэффиціентомъ преломленія. Сравнивая всѣ среды съ одною опредѣленною, произвольно нами выбранной, въ которой скорость равна v_0, мы называемъ просто коэффиціентомъ преломленія какой-либо данной среды тотъ, который соотвѣтствуетъ переходу лучей изъ выбранной нами въ эту данную среду. Пусть n_1 и n_2 коэффиціенты преломленія двухъ срединъ, въ которыхъ скорости суть v_1 и v_2. Тогда мы имѣемъ $n_1=\frac{v_0}{v_1}$ и $n_2=\frac{v_0}{v_2}$. Относительный коэффиціентъ преломленія n при переходѣ изъ первой среды во вторую, какъ мы видѣли, равенъ

$$n=\frac{v_1}{v_2}=\frac{v_0}{v_2}:\frac{v_0}{v_1}=\frac{n_2}{n_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Относительный коэффиціентъ преломленія при переходѣ луча изъ одной среды въ другую равенъ коэффиціенту преломленія второй среды, дѣленному на коэффиціентъ преломленія первой.

На рис. 90 показанъ переходъ лучей изъ среды съ меньшею скоростью v_1 въ среду съ бо́льшею скоростью v_2. Здѣсь $AF > CE$ и $BG > DE$, притомъ

$$\frac{AF}{CE} = \frac{BG}{DE} = \frac{v_2}{v_1} > 1.$$

Какъ видно, лучъ при преломленіи удаляется отъ нормали. Проведя нормаль NN, имѣемъ уголъ паденія $\varphi = \angle SAN$ и уголъ преломленія $\psi = \angle S_1AN$. Какъ и прежде, имѣемъ, полагая $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n}$, гдѣ $n > 1$,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n} < 1.$$

Отсюда

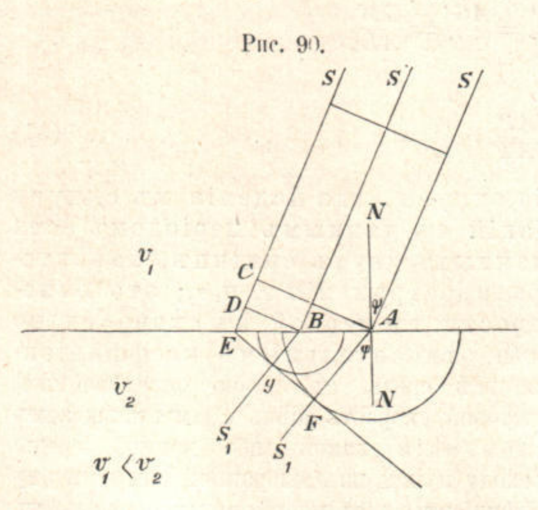
$$\sin\psi = n\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Мы получаемъ $\psi = 90^0$, когда φ принимаетъ нѣкоторое частное значеніе Φ, гдѣ

$$\sin\Phi = \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

При $\varphi = \Phi$ преломленный лучъ идетъ по направленію AE; его амплитуда, впрочемъ, дѣлается безконечно малою, когда φ приближается къ Φ и ψ къ 90^0. Когда $\varphi > \Phi$, то $\sin\varphi > \frac{1}{n}$ и формула (33) даетъ $\sin\psi > 1$, чего быть не можетъ. Въ этомъ случаѣ лучъ вовсе не преломляется, т.-е. не переходитъ во вторую среду, но безъ измѣненія величины амплитуды отражается. Такое явленіе называется полнымъ внутреннимъ отраженіемъ: оно происходитъ на границѣ двухъ средъ и притомъ въ той, въ которой скорость распространенія колебаній меньше. Уголъ Φ, опредѣляемый ур. (34), называется предѣльнымъ угломъ полнаго внутренняго отраженія.

Рис. 90.

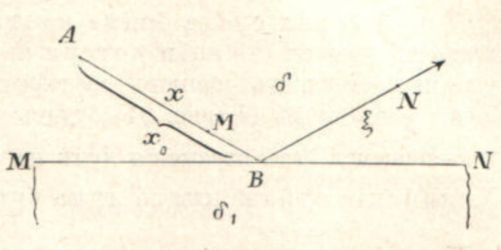


Все изложенное въ послѣднихъ параграфахъ одинаково относится какъ къ поперечнымъ, такъ и къ продольнымъ колебаніямъ.

§ 16. Потеря полуволны при отраженіи. Обратимся къ вопросу о фазѣ отраженныхъ колебаній. Спрашивается, составляетъ ли отраженный

лучъ прямое продолженіе луча падающаго, въ смыслѣ непрерывности измѣненія фазъ? Пусть AB (рис. 91) падающій, BN отраженный лучъ. Считаемъ время t отъ момента начала колебанія нѣкоторой точки A. Удаленіе y любой точки M падающаго луча во время t опредѣляется формулою (4) стр. 143

Рис. 91.



$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad . \; . \; . (35)$$

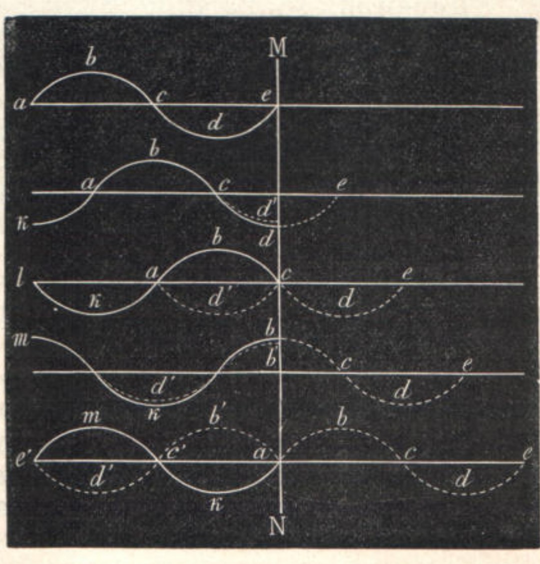
гдѣ x разстояніе этой точки M отъ A. Спрашивается, получимъ ли мы удаленіе y во время t точки N, лежащей на отраженномъ лучѣ, если мы въ (35) вставимъ $x = x_0 + \xi$, гдѣ $AB = x_0$ и $BN = \xi$? Теоретическое изслѣдованіе, которое со всею строгостью здѣсь не можетъ быть указано, приводитъ къ слѣдующему результату.

Необходимо различать два случая: 1) когда плотность δ_1 второй среды меньше и 2) когда она больше плотности δ первой среды.

I. Вторая среда менѣе плотна; $\delta_1 < \delta$. Въ этомъ случаѣ отраженное колебаніе есть прямое продолженіе падающаго и фаза въ точкѣ N такая же, какая получилась бы на разстояніе ξ отъ B на прямомъ продолженіи луча AB. Перемѣщеніе y въ точкѣ N, т.-е. уравненіе отраженнаго луча будетъ (полагая $a_1 < a$)

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \xi}{\lambda} \right) \ldots (36)$$

Рис. 92.



На рис. 92 прямая MN изображаетъ границу двухъ средъ, до которой дошло колебательное движеніе въ нѣкоторый моментъ t, въ который распредѣленіе частицъ опредѣляется кривой *abcde* на первой строкѣ (каждое колебаніе начинается движеніемъ внизъ). Сплошными линіями показаны въ слѣдующихъ затѣмъ строкахъ распредѣленія частицъ въ падающемъ лучѣ во времена $t + \frac{1}{4} T$, $t + \frac{1}{2} T$, $t + \frac{3}{4} T$ и $t + T$. Пунктиромъ обозначено налѣво отъ MN распредѣленіе частицъ въ отраженномъ колебаніи. Оно получается, если продолжить кривую падающаго луча направо отъ

MN на величины $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$ и λ и затѣмъ перегнуть мысленно рисунокъ вдоль прямой MN такъ, чтобы его правая половина упала на лѣвую. Амплитуды въ отраженномъ лучѣ меньше, чѣмъ въ падающемъ.

Никакой потери фазы при отраженіи не происходитъ.

II. Вторая среда болѣе плотна; $\delta_1 > \delta$. Въ этомъ случаѣ происходитъ при отраженіи потеря полуволны и отраженное колебаніе уже не составляетъ прямого продолженія падающаго колебанія. Перемѣщеніе y въ точкѣ N (рис. 91) будетъ такое, какое получилось бы на продолжающемся безъ отраженія лучѣ на разстояніи $x_0 + \xi + \frac{1}{2}\lambda$ отъ точки A. Уравненіе отраженнаго луча будетъ

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi + \frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)$$

или

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi}{\lambda} - \frac{1}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

или еще

$$y = -a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Перемѣна знака амплитуды и выражаетъ собою фактъ потери полуволны, см. таблица (9) стр. 144, строка 4-ая.

На рис. 93 сплошныя кривыя съ лѣвой стороны отъ MN имѣютъ то же значеніе, какъ и на рис. 92. Пунктиромъ и здѣсь изображено распредѣленіе частицъ въ отраженномъ лучѣ. Оно получается, когда продолжимъ сплошную кривую направо отъ MN, выбросимъ полволны и перегнемъ опять правую часть рисунка на лѣвую. Такъ во второй строкѣ (время $t + \frac{T}{4}$) выброшена полуволна def и часть fg переложена налѣво въ положеніе $f'c$. Въ третьей строкѣ выброшена полуволна cde и часть efg переложена въ положеніе $cf'a$ и т. д. И здѣсь амплитуда отраженнаго луча меньше амплитуды падающаго.

Все сказанное о двухъ случаяхъ отраженія одинаково относится какъ къ поперечнымъ, такъ и къ продольнымъ колебаніямъ.

Сопоставляя все изложенное, мы получаемъ такой результатъ:

1. При отраженіи отъ менѣе плотной среды перемѣны знака амплитуды или потери полуволны не происходитъ. Если уравненіе падающаго луча написать въ видѣ

$$y = a \sin \theta \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

гдѣ $\theta = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, то уравненіе отраженнаго луча будетъ

$$y = a_1 \sin\left(\theta_0 - 2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

Здѣсь $a_1 < a$ и $\theta_0 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right)$, гдѣ $x_0 = AB$ на рис. 91.

2. При отраженіи отъ болѣе плотной среды амплитуда претерпѣваетъ перемѣну знака или, иначе, теряется полуволна. Уравненіе отраженнаго луча будетъ

$$y = a_1 \sin\left(\theta_0 - 2\pi\frac{\xi}{\lambda} - \pi\right) = -a_1 \sin\left(\theta_0 - 2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Причина, въ одномъ случаѣ потери, а въ другомъ случаѣ не потери полуволны можетъ быть вполнѣ выяснена только впослѣдствіи. Обыкновенно приводимое, можетъ быть и не вполнѣ удовлетворительное разъясненіе главнымъ образомъ основано на нѣкоторой аналогіи, существующей между явленіемъ отраженія лучей на границѣ двухъ различныхъ срединъ и явленіемъ, происходящимъ при ударѣ упругихъ тѣлъ. Мы увидимъ въ слѣдующемъ отдѣлѣ, что если упругій шаръ ударяетъ въ другой неподвижный упругій шаръ, обладающій меньшею, чѣмъ онъ, массою, то направленіе скорости перваго не мѣняется; если же масса второго шара больше массы перваго, то послѣдній отскакиваетъ, т.-е. его скорость мѣняетъ знакъ. Аналогично происходитъ перемѣна направленія скорости частицы, движущейся на границѣ двухъ различно плотныхъ срединъ, если она принадлежитъ средѣ менѣе плотной.

Рис. 93.

Разберемъ, однако, вопросъ подробнѣе и точнѣе.

Если колебательное движеніе, распространяясь, послѣдовательно передается отъ одной частицы къ сосѣдней, то на границѣ двухъ средъ должно происходить слѣдующее. Пусть A послѣдняя частица первой, B первая, сосѣдняя съ нею частица второй среды.

Если A и B обладаютъ одинаковой массой, то вся энергія частицы A цѣликомъ передается частицѣ B.

Если, однако, частица B обладаетъ меньшею массою, чѣмъ A, то правильность передачи энергіи нарушается; лишь часть энергіи частицы A передается частицѣ B, которая, если можно такъ выразиться, слишкомъ легко поддается импульсу, съ которымъ на нее дѣйствуетъ A. Эта по-

слѣдняя частица сохранитъ часть своего движенія въ прежнемъ направленіи и вотъ это-то не переданное движеніе и составляетъ начальный импульсъ для возникновенія новаго колебанія, распространяющагося отъ A назадъ въ первой средѣ. Если къ A непрерывно прибываютъ колебанія съ амплитудой a, то ясно, что частица A будетъ колебаться съ амплитудой b, которая больше чѣмъ a; амплитуда отраженнаго луча и будетъ $b - a$. Въ крайнемъ случаѣ, когда плотность второй среды нуль, получимъ $b = 2a$; амплитуды падающаго и отраженнаго луча равны между собою ($b - a = 2a - a = a$).

Если, наоборотъ, масса частицы B больше, чѣмъ масса частицы A, то первая не повинуется импульсу, исходящему отъ второй; она не слѣдуетъ за движеніемъ частицы при поперечныхъ и не перемѣщается по направленію луча при продольныхъ колебаніяхъ. Какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ случаѣ частица A подвергается со стороны B импульсу, направленіе котораго обратно направленію ея движенія. Вотъ этотъ-то обратный импульсъ и является причиною возникновенія отраженнаго колебанія, которое, такимъ образомъ, не есть продолженіе колебанія падающаго. Амплитуда b точки A будетъ меньше a; разность $a - b$ и есть амплитуда отраженнаго колебанія. Въ крайнемъ случаѣ, когда частица B совсѣмъ не можетъ быть приведена въ движеніе, имѣемъ $b = 0$; движеніе частицы A вполнѣ заглушается сосѣднею частицею B. Въ этомъ случаѣ амплитуды падающаго и отраженнаго луча тоже будутъ равны между собою.

§ 17. Стоячія волны, образующіяся при отраженіи. Если падающій лучъ нормаленъ къ поверхности раздѣла двухъ средъ, то отраженный лучъ распространяется по одинаковой съ нимъ прямой, но въ противоположномъ направленіи.

Рис. 94.

Мы видѣли въ § 8, что въ этомъ случаѣ вдоль прямой должны образоваться стоячія волны, причемъ сосѣдніе пучность и узелъ будутъ находиться на разстояніи $\frac{1}{4}\lambda$ другъ отъ друга. Такія стоячія волны дѣйствительно и получаются вслѣдствіе интерференціи между падающимъ и отраженнымъ колебаніями.

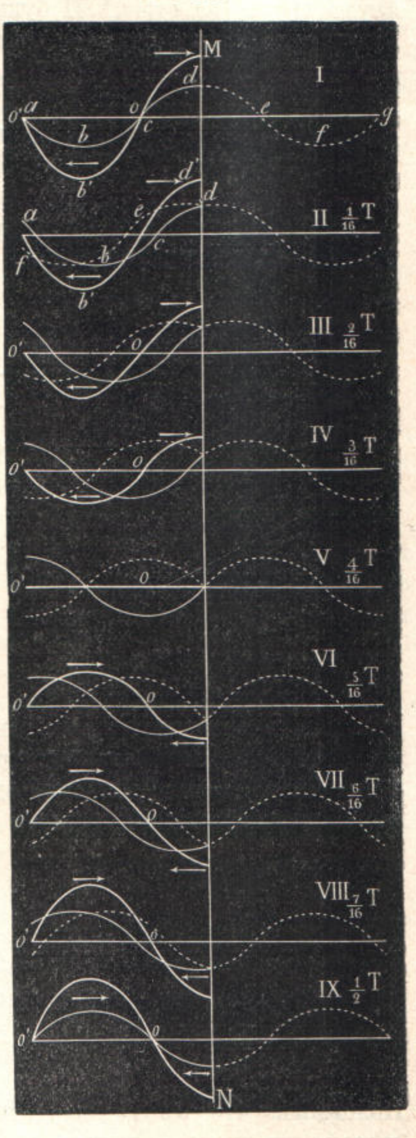
Не трудно сообразить распредѣленіе узловъ и пучностей. Если вторая среда менѣе плотная, то у поверхности раздѣла должна быть пучность, ибо, какъ мы видѣли, предѣльная частица A колеблется съ амплитудой $b > a$ (въ предѣлѣ $b = 2a$).

Если же вторая среда болѣе плотная, то амплитуда $b < a$ (до $b = 0$) и около поверхности раздѣла долженъ находиться узелъ.

Строже можно такъ разсуждать:

1. Отраженіе отъ менѣе плотной среды ($\delta_1 < \delta$). Въ точкѣ M (рис. 94), находящейся на разстояніи $MP = x$ отъ поверхности AB интерферируютъ два луча, разность хода которыхъ очевидно $MP + PM = 2x$. Мы знаемъ (стр. 150), что усиленія колебаній, т.-е пучности, получатся въ точкахъ, для которыхъ $2x = 2n\frac{\lambda}{2}$ или $x = n\frac{\lambda}{2}$, т.-е. въ точкахъ $x = 0$, $\frac{\lambda}{2}$, λ, $\frac{3}{2}\lambda$, 2λ... Ослабленіе колебаній, т.-е. узлы, образуются въ точкахъ, въ которыхъ разность хода $2x = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ или $x = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$, т.-е. при $x = \frac{\lambda}{4}$, $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$, $\frac{7}{4}\lambda$ и т. д.

Рис. 95.



2. Отраженіе отъ болѣе плотной среды; $\delta_1 > \delta$. Если $NQ = x$, то въ N интерферируютъ два луча, разность хода которыхъ $2x + \frac{\lambda}{2}$, ибо въ точкѣ Q теряется полуволна.

Пучности получатся при $2x + \frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{2}$ или $x = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$, т.-е. при $x = \frac{\lambda}{4}$, $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$, $\frac{7}{4}\lambda$ и т. д.; узлы образуются тамъ, гдѣ разность хода $2x + \frac{\lambda}{2} = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ или $x = n\frac{\lambda}{2}$, т.-е. при $x = 0$, $\frac{\lambda}{2}$, λ, $\frac{3}{2}\lambda$, 2λ и т. д.

На рис. 94 показано распредѣленіе пучностей (n) и узловъ (y) въ этихъ двухъ случаяхъ.

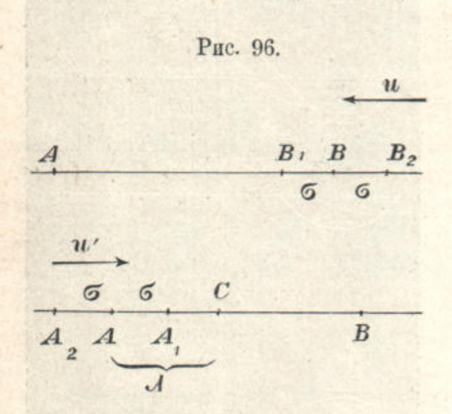
На рис. 95 показано распредѣленіе частицъ въ падающемъ лучѣ для девяти послѣдовательныхъ моментовъ t, $t + \frac{1}{16}T$, $t + \frac{2}{16}T$ и т. д. до $t + \frac{8}{16}T = t + \frac{1}{2}T$, сплошною, болѣе тонкою линіей (напр. $abcd$ въ строкахъ I и II). Пунктиромъ колебаніе продолжено во вторую среду и безъ потери полуволны ($\delta_1 < \delta$) оно переложено направо, гдѣ этотъ пунктиръ изображаетъ отраженное колебаніе, которое въ строкахъ I и IX совпадаетъ съ кривой падающаго колебанія. Болѣе толстою сплошною линіей показано рас-

предѣленіе частицъ въ колебаніи сложномъ; въ строкѣ V оно совпадаетъ съ прямой $O'O$. Мы видимъ, что предѣльная частица совершаетъ колебаніе съ удвоенной амплитудой, см. точки M и N въ строкахъ I и IX; здѣсь находится пучность. Точка O, находящаяся на разстояніи $\frac{\lambda}{4}$ отъ границы двухъ средъ (на строкѣ II буква O должна находиться тамъ, гдѣ $b'd'$ пересѣкаетъ горизонтальную прямую), остается въ покоѣ; здѣсь узелъ. Въ b' (строка I и II) опять пучность, въ O' узелъ.

Мы разсматривали одинъ падающій лучъ и получили пучности и узлы въ точкахъ. Понятно, что при паденіи плоской волны получаются попеременно поверхности сильнаго движенія и поверхности покоя; послѣднія называются узловыми поверхностями.

Если колебанія распространяются только въ двухъ измѣреніяхъ, образуя волновыя линіи (стр. 157) и если они отражаются отъ нѣкоторой предѣльной линіи, ограничивающей данную среду, то, вслѣдствіе интерференціи между первоначальными и отраженными колебаніями, образуются области сильныхъ движеній (пучности), разграниченныя линіями сравнительнаго или даже полнаго покоя, т. наз. узловыми линіями.

Рис. 96.



§ 18. Принципъ Допплера. Положимъ, что въ точкѣ A (рис. 96) дѣйствуетъ сила, заставляющая частицу A среды совершать гармоническія колебательныя движенія съ періодомъ T и непрерывно поддерживающая это движеніе. Причину возникновенія такой силы назовемъ источникомъ колебаній (звучащее тѣло, свѣтящееся тѣло, тѣло колеблющееся и ударяющее при этомъ на поверхность жидкости и т. д.). Колебанія распространяются вдоль прямой AB со скоростью v; длина волны λ, скорость v и періодъ T связаны уравненіемъ (1) стр. 142

$$\lambda = vT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Число волнъ, исходящихъ въ единицу времени отъ A, т.-е. число его колебаній, обозначимъ черезъ n. Очевидное тожество $Tn = 1$, даетъ намъ, см. (3) стр. 143 (гдѣ число колебаній обозначено черезъ N),

$$v = n\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Положимъ, что въ B находится наблюдатель, имѣющій возможность опредѣлить число n_1 волнъ, проходящихъ мимо него въ единицу времени, т.-е. напр. при продольныхъ колебаніяхъ число сгущеній, образующихся около него, а при поперечныхъ колебаніяхъ число, показывающее, сколько разъ онъ въ единицу времени замѣтитъ, что рядомъ съ нимъ расположенная частица проходитъ черезъ положеніе равновѣсія.

Допустимъ возможность самостоятельнаго движенія источника A и наблюдателя B вдоль прямой AB. Въ первомъ случаѣ это значитъ, что отдѣльныя колебанія, вызываемыя источникомъ A черезъ равные промежутки времени T, берутъ свое начало послѣдовательно въ тѣхъ различныхъ точкахъ среды, въ которыхъ въ соотвѣтствующіе моменты находится самый источникъ. Если движется наблюдатель, то мы будемъ предполагать, что онъ не замѣчаетъ своего перехода отъ однихъ частицъ среды къ другимъ, а только отмѣчаетъ либо число сгущеній, либо число прохожденій черезъ положеніе равновѣсія, или вообще число n_1 возвращеній къ одной и той же фазѣ, совершающихся въ единицу времени около него. Мы предположимъ далѣе, что источникъ A уже настолько давно началъ вызывать колебанія, что послѣднія успѣли распространиться дальше, чѣмъ до наблюдателя B.

Обозначимъ черезъ u скорость наблюдателя B, черезъ u' скорость источника A, считая обѣ скорости положительными, если A и B другъ къ другу приближаются (т.-е. AB уменьшается, см. стрѣлки на рис. 96).

Требуется опредѣлить число n_1 при различныхъ значеніяхъ u и u'. Различаемъ четыре случая:

I. Наблюдатель и источникъ неподвижны ($u=0$, $u'=0$). Въ этомъ случаѣ ясно, что всѣ колебанія, вышедшія изъ A черезъ равныя времена T, будутъ достигать и точку B черезъ такіе же промежутки времени; поэтому $n_1 = n$.

II. Наблюдатель B движется со скоростью u, считаемой положительной по направленію къ источнику A. Въ теченіе нѣкотораго времени τ наблюдатель перейдетъ изъ B въ B_1, пройдя путь $\sigma = u\tau$. За это время мимо него очевидно пройдутъ $n_1\tau$ волнъ, каковое число больше числа $n\tau$ волнъ, которыя прошли бы мимо него, еслибы онъ остался неподвиженъ, на тó число волнъ, которое укладывается въ промежуткѣ $BB_1 = \sigma$, т.-е. на $\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{u\tau}{\lambda}$ волнъ. Итакъ, мы имѣемъ $n_1\tau = n\tau + \frac{u\tau}{\lambda}$, или подставивъ $\lambda = \frac{v}{n}$ на основаніи (43) и сокративъ на τ:

$$n_1 = n + n\frac{u}{v} = n\frac{v+u}{v}.$$

Еслибы u было отрицательное, равное $-u_1$, и наблюдатель во время τ перешелъ бы изъ B въ B_2, то мы имѣли бы $n_1\tau = n\tau - \frac{\sigma}{\lambda}$, откуда $n_1 = n\frac{v-u_1}{v} = n\frac{v+u}{v}$. Соединяя обѣ формулы, мы имѣемъ при движеніи наблюдателя со скоростью u (положительною, если она направлена къ источнику):

$$n_1 = n\frac{v+u}{v} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (44)$$

III. Источникъ A движется со скоростью u', считаемой положительной по направленію къ наблюдателю B.

Пусть $AC = \lambda$ длина волны. Еслибы A оставалось неподвижнымъ, то одинаковыя фазы (напр. сгущенія или прохожденія черезъ положеніе

покоя) распространялись бы направо, находясь другъ отъ друга на разстоянiи λ.

Положимъ, что за время одного перiода T источникъ перешелъ изъ A въ A_1 на разстоянiе $AA_1 = \sigma = u'T$. Теперь одинаковыя фазы распространяются направо, находясь другъ отъ друга на разстоянiи $CA_1 = \lambda_1$. Такъ какъ скорость v не мѣняется, то (43) даетъ $v = n\lambda = n_1\lambda_1$, откуда

$$n_1 = n\frac{\lambda}{\lambda_1} = n\frac{\lambda}{\lambda - \sigma} = n\frac{vT}{vT - u'T} = n\frac{v}{v - u'}.$$

Еслибы источникъ обладалъ отрицательной скоростью $u' = -u_1'$ и онъ за время T перешелъ бы изъ A въ A_2, то до B доходили бы болѣе длинныя волны $\lambda_1 = \lambda + \sigma$ и мы получили бы $n_1 = n\frac{v}{v + u_1'} = n\frac{v}{v - u'}$. Соединяя обѣ формулы, мы имѣемъ при движенiи источника со скоростью u' (положительною по направленiю къ наблюдателю)

$$n_1 = n\frac{v}{v - u'}. \quad \text{. . . . .} \quad (45)$$

IV. Наблюдатель и источникъ движутся со скоростями u и u'. Вслѣдствiе движенiя источника число n колебанiй, доходящихъ до наблюдателя при $u = 0$ и $u' = 0$, увеличится въ отношенiи $\frac{v}{v - u'}$, потому что волны (при $u' > 0$) укорочены. Вслѣдствiе движенiя наблюдателя число волнъ, проходящихъ мимо него, увеличивается (при $u > 0$) еще въ отношенiи $\frac{v + u}{v}$. Такимъ образомъ $n_1 = n\frac{v}{v - u'} \cdot \frac{v + u}{v}$ или, окончательно,

$$n_1 = n\frac{v + u}{v - u'}. \quad \text{. . . . .} \quad (46)$$

Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи.

1. Наблюдатель приближается къ источнику со скоростью v; тогда $u = v$ и (44) даетъ $n_1 = 2n$. Наблюдателю покажется, что перiодъ колебанiй уменьшился вдвое.

2. Наблюдатель удаляется отъ источника со скоростью v; тогда $u = -v$ и (44) даетъ $n_1 = 0$. Наблюдателю, движущемуся вмѣстѣ съ какою либо фазою, покажется, что частица неподвижна.

3. Источникъ удаляется отъ наблюдателя со скоростью v; тогда $u' = -v$ и (45) дастъ $n_1 = \frac{1}{2}n$. Наблюдателю покажется, что перiодъ колебанiй увеличился вдвое.

4. Источникъ приближается къ наблюдателю со скоростью v. Тогда $u' = v$ и (45) даетъ $n_1 = \infty$. Это предѣльный случай безконечно короткихъ волнъ.

5. Источникъ и наблюдатель движутся со скоростями u и u'. Къ этому случаю относится общая формула (46).

Три формулы, (44) (45) и (46) показываютъ, что кажущееся

измѣненіе числа колебаній не опредѣляется только относительною скоростью источника и наблюдателя. Обозначая эту скорость черезъ $c = u + u'$, мы можемъ (46) представить въ видѣ

$$n_1 = n \frac{v+u}{v+u-c}$$

или

$$n_1 = n \frac{v-u'+c}{v-u'}.$$

Эти формулы ясно показываютъ, что n_1 зависитъ не только отъ c, но и отъ u или u'. Только въ случаѣ $c = 0$ имѣемъ $n_1 = n$ при всякомъ $u' = -u$, если не считать предѣльнаго случая $u' = -u = v$, когда наблюдатель и источникъ движутся со скоростью v по направленію отъ источника къ наблюдателю и когда, очевидно, колебанія вовсе не достигаютъ наблюдателя.

При совмѣстномъ движеніи наблюдателя и источника со скоростью v по обратному направленію, т.-е. отъ наблюдателя къ источнику, имѣемъ $u = -u' = v$ и $n_1 = n$.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Всемірное тяготѣніе.

§ 1. Законъ всемірнаго тяготѣнія. Всѣ части существующей въ мірѣ матеріи, насколько онѣ доступны нашему наблюденію, проявляютъ особаго рода, по крайней мѣрѣ кажущееся взаимодѣйствіе, которое съ чисто внѣшней стороны заключается въ слѣдующемъ. Положимъ, что имѣются двѣ массы m и m_1, размѣры которыхъ, при совершенной произвольности ихъ формы, весьма малы сравнительно съ ихъ разстояніемъ r другъ отъ друга. Оказывается изъ непосредственныхъ наблюденій, что присутствіе каждой изъ этихъ двухъ массъ вызываетъ появленіе особой силы, дѣйствующей на другую массу, причемъ обѣ силы, изъ которыхъ одна дѣйствуетъ на m, другая на m_1, равны между собою; обозначимъ ихъ черезъ f.

По величинѣ силы f пропорціональны произведенію массъ m и m' и обратно пропорціональны квадрату разстоянія между ними. Ихъ численное значеніе опредѣляется формулою

$$f = C\frac{mm'}{r^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

гдѣ C коэффиціентъ пропорціональности.

Направленіе двухъ силъ f совпадаетъ съ направленіемъ прямой r и притомъ сила f, дѣйствующая на m, направлена къ m_1, а сила, дѣйствующая на m_1, направлена къ m. Отсюда слѣдуетъ, что силы f суть силы центральныя (стр. 95).

Сила f называется всемірнымъ тяготѣніемъ.

Если масса m свободна, то присутствіе массы m_1 вызываетъ въ ея движеніи нѣкоторое ускореніе w, равное

$$w = C\frac{m_1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и направленное къ m_1; точно также, когда m_1 свободна, то проявляется въ ея движеніи ускореніе

$$w_1 = C\frac{m}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

направленное къ m_1. Изъ (2) и (3) получается

$$\frac{w}{w_1} = \frac{m_1}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

т.-е. ускоренія двухъ тѣлъ, являющіяся вслѣдствіе существующаго между ними всемірнаго тяготѣнія, обратно пропорціональны ихъ массамъ. Если массы не свободны, то каждая изъ нихъ производитъ давленіе равное f на то препятствіе, которое мѣшаетъ ему пріобрѣтать указанное формулами (2) и (3) ускореніе.

Такъ какъ силы f, дѣйствующія на массы m и m_1, стремятся ихъ сблизить, то съ чисто внѣшней стороны явленіе представляется такимъ, какъ еслибы изъ каждой массы исходила сила, дѣйствующая на другую массу. Это принято выражать словами «тѣла притягиваются». Слѣдуетъ однако весьма твердо помнить, что этими словами только вкратцѣ и удобно описывается явленіе и отнюдь не слѣдуетъ ихъ понимать въ буквальномъ смыслѣ, т.-е. такъ, какъ будто напр. масса m, какъ нѣчто активное, непосредственно вліяетъ на массу m_1 и тянетъ ее къ себѣ съ силою f. Въ дѣйствительности мы только можемъ сказать, что присутствіе массы m на разстояніи r обусловливаетъ возникновеніе силы f, дѣйствующей на m_1. Мы къ этому вопросу возвратимся ниже въ § 4 стр. 184.

Для краткости мы будемъ далѣе говорить о взаимодѣйствіяхъ массъ, о силахъ, исходящихъ изъ такихъ-то массъ и т. д. Такая терминологія и выведенныя на ея основаніи слѣдствія не могутъ привести къ ошибочнымъ результатамъ, потому что явленія происходятъ совершенно такъ, какъ они происходили бы, еслибы въ дѣйствительности существовали взаимодѣйствія массъ и силы, исходящія изъ нихъ.

Такъ какъ всѣ тѣла въ мірѣ взаимно «притягиваются», то сила тяготѣнія, подъ вліяніемъ которой одно изъ нихъ находится, получится, если опредѣлить равнодѣйствующую всѣхъ дѣйствующихъ на него силъ тяготѣнія.

Взаимное притяженіе двухъ тѣлъ, размѣры которыхъ не весьма малы сравнительно съ ихъ разстояніемъ, получается, если мысленно каждое изъ двухъ тѣлъ раздѣлить на безконечное число безконечно малыхъ частей, массы которыхъ мы для одного тѣла обозначимъ черезъ μ, для другого черезъ μ_1; далѣе слѣдуетъ предположить, что между каждою парою массъ μ и μ_1 дѣйствуетъ сила $f = C\frac{\mu\mu_1}{r^2}$, гдѣ r ихъ разстояніе и, наконецъ сложить всѣ силы f, дѣйствующія на каждое изъ двухъ тѣлъ.

Всемірнымъ тяготѣніемъ управляется движеніе небесныхъ свѣтилъ; оно обнаруживается между землею и тѣлами, находящимися близь ея поверхности — въ этомъ случаѣ оно называется силою тяжести или вѣсомъ; наконецъ, можно показать, что оно дѣйствуетъ и между тѣлами, которыя на поверхности земли могутъ быть подвергнуты нашему наблюденію.

Мы докажемъ (см. § 5 стр. 186), что сплошной однородный шаръ, а также неоднородный, но состоящій изъ концентрическихъ однородныхъ слоевъ, притягиваетъ всякое внѣ его находящееся тѣло съ силою, которая получается на основаніи формулы (1), если представить себѣ, что вся масса шара сосредоточена въ его центрѣ.

Въ первомъ приближеніи мы можемъ допустить, что земля и есть такой шаръ. Обозначая массу ея черезъ M, радіусъ черезъ R и среднюю плотность черезъ δ, имѣемъ

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Сила f, съ которою земля притягиваетъ тѣло, масса котораго m и которое находится на разстояніи r отъ ея центра, равна

$$f = C \frac{Mm}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ускореніе w движенія массы m равно

$$w = C \frac{M}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Формула (7) показываетъ, что подъ вліяніемъ притяженія земнаго шара, всѣ тѣла пріобрѣтаютъ, находясь въ одинаковомъ отъ него разстояніи, одинаковое ускореніе. Ускореніе не зависитъ отъ притягиваемаго тѣла, а только отъ массы притягивающаго тѣла и отъ взаимнаго разстоянія двухъ тѣлъ.

Обозначимъ частное значеніе ускоренія w, см. (7), у самой поверхности земли черезъ g; это такъ называемое ускореніе свободнаго паденія; (7) и (5) даютъ

$$g = C \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi \delta C R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Всѣ тѣла падаютъ на землѣ съ одинаковымъ ускореніемъ.

Законъ всемірнаго тяготѣнія былъ формулированъ Ньютономъ въ книгѣ «Philosophiae naturalis principia mathematica», появившейся въ Лондонѣ въ 1687 г. и написанной, по всей вѣроятности, въ 1684 и 1685 годахъ; этотъ законъ посему и называется закономъ Ньютона.

Допуская, что одна и та же, по своему происхожденію, сила, какъ бы исходящая изъ земли, заставляетъ падать тѣла у поверхности земли съ ускореніемъ g и заставляетъ луну двигаться по ея орбитѣ вокругъ земли съ нѣкоторымъ ускореніемъ w; предполагая, далѣе, что это ускореніе обратно пропорціонально квадрату разстоянія отъ центра земли, Ньютону

оставалось провѣрить вытекающее изъ такихъ предположенiй слѣдствiе. см. (7) и (8),

$$\frac{g}{w}=\frac{r^2}{R^2},$$

гдѣ r среднее разстоянiе луны отъ цѐнтра земли. Принимая $r=60\,R$, мы получимъ

$$g=3600\,w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Допуская, какъ первое приближенiе, что луна движется равномѣрно по окружности со скоростью v, имѣемъ, см. (30) стр. 58, $w=\frac{v^2}{r}=\frac{1}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$, гдѣ T время полнаго оборота луны около земли. Принимая за единицу времени секунду, за единицу длины метръ и вставляя $T=27$ сутокъ 7 часовъ 43 мин. $=39343.60$ сек. и $r=60\,R=60\times 6{,}360{,}000$ метровъ [1]), получаемъ для скорости $v=1020$ метровъ въ сек., а для ускоренiя луны $w=0{,}00271$ метра. Вставляя это въ (9) получаемъ $g=0{,}00271\times 3600=9{,}76$ метра. Превосходное согласiе этого числа, полученнаго путемъ не вполнѣ точнаго вычисленiя, съ числомъ, которое даютъ непосредственныя наблюденiя на земной поверхности и служитъ доказательствомъ справедливости основныхъ представленiй и самой формы закона Ньютона.

Законъ Ньютона можетъ быть выведенъ изъ третьяго закона Кеплера: квадраты временъ оборотовъ (T_1 и T_2) двухъ планетъ относятся какъ кубы ихъ среднихъ разстоянiй (r_1 и r_2) отъ солнца:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Допуская, что планеты равномѣрно движутся по кругамъ и обозначая ихъ скорости черезъ v_1 и v_2, а нормальныя ускоренiя черезъ w_1 и w_2, имѣемъ

$$v_1=\frac{2\pi r_1}{T_1}\ ;\ v_2=\frac{2\pi r_2}{T_2}$$

$$w_1=\frac{v_1^2}{r_1}=\frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}\ ;\ w_2=\frac{v_2^2}{r_2}=\frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}.$$

Отсюда

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{T_2^2}{T_1^2}$$

(10) дастъ равенство

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2^3}{r_1^3}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$$

т.-е. ускоренiя въ движенiяхъ планетъ обратно пропорцiональны квадратамъ ихъ разстоянiй отъ солнца, а это и есть законъ Ньютона.

§ 2. О коеффицiентѣ пропорцiональности въ формулѣ Ньютона. Въ формулѣ (1) встрѣчается коеффицiентъ пропорцiональности C, численное

---

[1]) Окружность большого круга земли $2\pi R$ принимается равною 40,000,000 метрамъ, откуда $R=6{,}360{,}000$ метр.

значеніе котораго, какъ и во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, зависитъ отъ выбора тѣхъ единицъ, которыми мы измѣряемъ величины, входящія въ формулу (1). Такихъ величинъ разнородныхъ три: масса, длина (ея единицей измѣряется r) и сила. Положимъ, что мы остановились на какомъ-либо опредѣленномъ выборѣ этихъ трехъ единицъ. Въ такомъ случаѣ численное значеніе коэффиціента C проще всего опредѣляется слѣдующимъ образомъ: Формула (1) даетъ при

$$\left.\begin{aligned} m = m_1 = 1 \\ r = 1 \end{aligned}\right\} \ldots f = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Это показываетъ, что C равно численному значенію силы, съ которою взаимно притягиваются двѣ единицы массы, находящіяся на разстояніи единицы другъ отъ друга. При этомъ мы должны себѣ представить обѣ массы въ видѣ однородныхъ шаровъ, центры которыхъ находятся на указанномъ разстояніи другъ отъ друга или обѣ массы какъ бы сосредоточенными въ двухъ точкахъ.

При выборѣ единицъ величинъ m, r и f мы можемъ поступить трояко: или ихъ выбрать вполнѣ произвольно и независимо другъ отъ друга, или измѣрять m, r и f абсолютными единицами или, наконецъ, произвести выборъ такъ, чтобы коэффиціентъ C равнялся бы единицѣ. Начнемъ съ третьяго способа выбора единицъ, т.-е. положимъ $C = 1$ и слѣд.

$$f = \frac{mm_1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Въ высшей степени важно твердо помнить, что если мы пользуемся формулою Ньютона въ видѣ (12), т.-е. безъ коэффиціента пропорціональности, то мы уже не имѣемъ дѣло съ абсолютными единицами, но вводимъ совершенно особую своеобразную единицу силы. Дѣйствительно, (12) даетъ при $m = m_1 = 1$ и $r = 1$ для силы значеніе $f = 1$. Это показываетъ, что выбравъ произвольно единицы массы и длины, мы за единицу силы уже непремѣнно должны принять силу, съ которою взаимно притягиваются двѣ выбранныя единицы массы, находящіяся на выбранной единицѣ разстоянія другъ отъ друга. Эта единица силы ничего общаго не имѣетъ съ абсолютною единицею силы, которая, дѣйствуя на единицу массы, придаетъ ей единицу ускоренія, см. стр. 67. Новую единицу назовемъ астрономической единицей силы.

Интересно сравнить между собою астрономическую и абсолютную единицы силы, принявъ за основныя единицы массы и длины — граммъ и сантиметръ. Въ этомъ случаѣ абсолютная единица силы будетъ динъ, если еще за единицу времени принять секунду; астрономическая же единица и есть сила C въ формулѣ (1), какъ видно изъ (11). Итакъ, вопросъ сводится къ выраженію силы C въ динахъ. Чтобы сравнить C съ диномъ, выразимъ одну и ту же силу, а именно вѣсъ p массы граммъ у поверхности земли сперва въ динахъ, а потомъ въ астрономическихъ единицахъ C.

Мы видѣли на стр. 78, что вѣсъ p (французская единица вѣса граммъ)

$$p = 981 \text{ дину} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Съ другой стороны p равно силѣ, съ которой взаимно притягиваются земля, масса которой $M = \frac{4}{3}\pi R^3\delta$ (гдѣ R радіусъ, δ средняя плотность земли) и масса $m = 1$ грамму. Такимъ образомъ (1) даетъ

$$p = C\frac{Mm}{R^2} = \frac{4}{3}\pi R\delta C = \frac{2}{3}\delta \,.\, 2\pi RC \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Но $2\pi R = 40$ милл. метрамъ $= 4.\ 10^9$ сантим.; для средней плотности земли принимаемъ число $\delta = 5.51$. Сравнивая (13) и (14) находимъ

$$C = \frac{3 \times 981}{2\ \ \delta \,.\, 2\pi R} \text{ дин.} = \frac{3 \times 981}{2 \times 5{,}51 \times 4 \times 10^9} \text{ дин.}$$

или окончательно

$$C = \frac{1}{14{,}950.000} \text{ дина} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Итакъ, если граммъ, сантиметръ и секунду принять за единицы массы, длины и времени, то астрономическая единица силы въ 15 милліоновъ разъ меньше единицы абсолютной; иначе говоря, граммъ и граммъ на разстояніи одного сантиметра притягиваются съ силою, равною всего только одной 15-ти милліонной долѣ дина или, примѣрно, такой же долѣ миллиграмма.

§ 3. Отрицательныя массы. Введеніе понятія объ отрицательныхъ массахъ оказывается не только весьма важнымъ и даже необходимымъ въ ученіи объ электричествѣ и магнетизмѣ, но также полезнымъ въ ученіи о взаимномъ тяготѣніи тѣлъ. Понятіе объ отрицательныхъ массахъ есть фикція; такихъ массъ въ природѣ не существуетъ. Что касается до названія «отрицательныя массы», то мы его, какъ общепринятое, сохранимъ, хотя лучше было бы говорить о массахъ, обладающихъ отрицательною плотностью.

Отрицательными массами мы назовемъ такія фиктивныя массы, дѣйствіе которыхъ, при одинаковыхъ условіяхъ, направлено противоположно дѣйствію массъ положительныхъ. Количественно равными мы называемъ массы положительную и отрицательную, если онѣ, при равныхъ условіяхъ, производятъ дѣйствія, одинаковыя по величинѣ. Положимъ, что масса m притягиваетъ массу m_1 съ силою f; фиктивная масса $-m$, помѣщенная на мѣсто m, будетъ отталкивать массу m_1 съ силою f. Допуская и здѣсь равенство дѣйствія и противодѣйствія, мы должны предположить, что и масса m_1 отталкиваетъ массу $-m$; наконецъ, чтобы быть послѣдовательными, допускаемъ, что масса $-m_1$, помѣщенная на мѣсто m_1, притягиваетъ массу $-m$.

Въ этомъ отдѣлѣ мы, для удобства, допускаемъ, что равнозначныя массы притягиваются, разнозначныя отталкиваются.

Оказывается болѣе удобнымъ обозначать отрицательныя массы отрицательными числами, а символически одною буквою (напр. m) какъ положительныя такъ и отрицательныя, полагая, что сама эта буква имѣетъ знакъ. Если въ то же время условиться притягательныя силы считать за положительныя, а отталкивательныя—за отрицательныя, то всѣ случаи взаимодѣйствій массъ изобразятся одною общею формулою

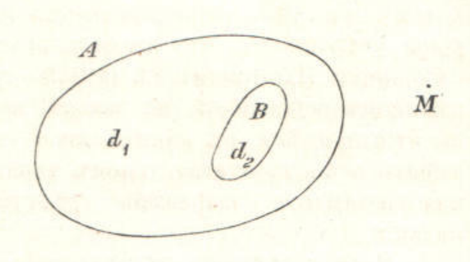
$$f = \frac{mm_1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Когда m и m_1 одного знака (оба $+$ или оба $-$), то f положительное, т.-е. массы притягиваются; если m и m_1 разныхъ знаковъ (одно $+$, другое $-$), то f отрицательное, что соотвѣтствуетъ отталкиванію.

Для болѣе удобнаго рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ, мы вводимъ понятіе о плотности d отрицательныхъ, конечно фиктивныхъ массъ, допуская существованіе и для нихъ соотношенія $m = vd$, гдѣ v численное значеніе объема. Предположимъ что отрицательныя массы обладаютъ и отрицательною плотностью; мы представляемъ себѣ, что вызванныя ими силы имѣютъ направленіе, обратное тѣмъ силамъ, которыя при одинаковыхъ обстоятельствахъ вызываются массами, плотность которыхъ положительная.

Иногда оказывается удобнымъ представлять себѣ данную плотность d раздѣленною на двѣ части d_1 и d_2, такія, что $d = d_1 + d_2$. Вмѣсто одного тѣла съ плотностью d, мы представляемъ себѣ данное пространство одновременно занятымъ двумя тѣлами, плотности которыхъ d_1 и d_2.

Рис. 97.



Распространяя это и на тѣла съ отрицательною плотностью, мы будемъ допускать одновременное существованіе въ одномъ и томъ же пространствѣ двухъ тѣлъ съ разноименными плотностями $+d_1$ и $-d_2$ и считать это тожественнымъ съ нахожденіемъ въ томъ же пространствѣ одного тѣла съ плотностью $d = d_1 - d_2$. Въ случаѣ $d_1 = d_2$ получаемъ $d = 0$. Отсутствіе массъ въ данномъ пространствѣ можно мысленно замѣнить присутствіемъ въ немъ двухъ массъ съ плотностями, одинаковыми по величинѣ, но противоположными по знаку.

Введеніе отрицательныхъ массъ весьма полезно при рѣшеніи многихъ задачъ о притяженіи тѣлъ.

Положимъ, что мы рѣшили задачу о притяженіи точки M однородными тѣлами A и B (рис. 97). Тогда легко рѣшается задача о притяженіи тѣломъ A, обладающимъ вездѣ плотностью d_1, исключая области B, находящейся цѣликомъ внутри него и имѣющей другую плотность d_2. Дѣйствіе такого, уже не однороднаго тѣла сводится къ суммѣ дѣйствій однороднаго съ плотностью d_1 тѣла A и однороднаго же тѣла B, плотность котораго $d = d_2 - d_1$. Въ случаѣ $d_2 = 0$ (полость внутри тѣла A) имѣемъ $d = -d_1$

и слѣд. къ притяженію сплошного тѣла A придется прибавить отталкиваніе тѣла B, чтобы получить истинное дѣйствіе тѣла A, имѣющаго полость.

§ 4. Actio in distans. Терминомъ «actio in distans», т.-е. «дѣйствіе на разстояніе» обозначается одно изъ наиболѣе вредныхъ ученій, когда-либо господствовавшихъ въ физикѣ и тормозившихъ ея развитіе: это ученіе, допускавшее возможность непосредственнаго дѣйствія чего либо (A) на что либо другое (B), находящееся отъ него на опредѣленномъ и столь большомъ разстояніи, что соприкосновенія между A и B происходить не можетъ.

Исторія этого ученія слѣдующая. Ньютонъ открылъ, что движенія, какъ небесныхъ свѣтилъ, такъ и тѣлъ, падающихъ на земной поверхности, происходятъ такъ, какъ еслибы всѣ тѣла взаимно притягивались съ силою, величина которой опредѣляется формулой (1) или (12). Вопроса о причинахъ появленія этой силы онъ не касался, отклоняя всякія попытки къ его рѣшенію словами «hypotheses non fingo». Нигдѣ и никогда онъ, однако, не высказывался за возможность actionis in distans, не утверждалъ, что тѣло A непосредственно притягиваетъ къ себѣ тѣло B, т.-е. производитъ дѣйствіе тамъ, гдѣ оно само не находится. Оставляя вопросъ о механизмѣ возникновенія всемірнаго тяготѣнія нетронутымъ, онъ, несомнѣнно, придавалъ открытому имъ закону характеръ описательный: свѣтила движутся и тѣла падаютъ такъ, какъ они двигались и падали бы, еслибы они взаимно притягивались. Ученикъ Ньютона, Cotes, въ предисловіи ко второму изданію «Principia», котораго Ньютонъ не читалъ до его напечатанія, впервые ясно выразилъ мысль объ «actio in distans», о томъ, что тѣла непосредственно взаимно притягиваются. Съ одной стороны увѣренность, что взглядъ, высказанный въ предисловіи къ его книгѣ, одобряется Ньютономъ, съ другой—грандіозное развитіе небесной механики, цѣликомъ основанной на законѣ всемірнаго тяготѣнія, какъ на фактѣ, и не нуждавшейся въ какихъ либо его разъясненіяхъ, заставили ученыхъ забыть о чисто описательномъ характерѣ этого закона и видѣть въ немъ законченное выраженіе дѣйствительно происходящаго физическаго явленія.

Идея о дѣйствіи въ даль, господствовавшая въ прошломъ столѣтіи, получила новую пищу, еще болѣе окрѣпла, когда, въ концѣ столѣтія, изъ опытовъ Кулона оказалось, что и магнитныя и электрическія взаимодѣйствія могутъ быть сведены къ взаимодѣйствіямъ особыхъ гипотетическихъ веществъ (два электричества и два магнетизма), происходящимъ непосредственно въ даль и по законамъ, вполнѣ аналогичнымъ закону Ньютона.

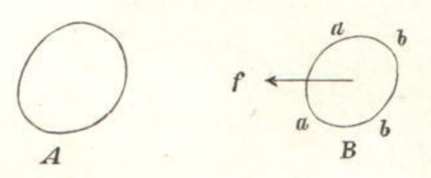
Въ первой половинѣ текущаго столѣтія actio in distans полновластно господствовала въ наукѣ.

Фарадей, величайшій экспериментаторъ и физикъ-философъ, первый высказалъ несообразность допущенія, чтобы тѣло могло непосредственно возбуждать силы и движенія тамъ, гдѣ оно не находится. Оставляя въ сторонѣ вопросъ о всемірномъ тяготѣніи, онъ обратился спеціально къ явленіямъ магнитнымъ и электрическимъ и указалъ на первенствующую роль, которую въ этихъ явленіяхъ играетъ промежуточная среда, заполняющая пространство между тѣлами, какъ будто непосредственно дѣй-

ствующими другъ на друга. Здѣсь не мѣсто распространяться о дальнѣйшей исторіи этого вопроса, съ которою мы познакомимся впослѣдствіи. Достаточно сказать, что опыты, произведенные молодымъ, безвременно скончавшимся нѣмецкимъ ученымъ Гейнрихомъ Герцомъ (H. Hertz), доказали справедливость основныхъ взглядовъ Фарадея на роль промежуточной среды въ упомянутыхъ выше явленіяхъ и навсегда изгнали мысль объ actio in distans изъ ученія объ этихъ явленіяхъ.

Въ настоящее время успѣло сдѣлаться общимъ достояніемъ убѣжденіе, что actio in distans не должна быть допускаема ни въ одной области физическихъ явленій. Но какъ ее изгнать изъ ученія о всемірномъ тяготѣніи? Это вопросъ пока открытый, несмотря на безчисленное множество различныхъ въ этомъ направленіи попытокъ ученыхъ, стремившихся дать «механическое» объясненіе всемірному тяготѣнію. Во всѣхъ этихъ объясненіяхъ играетъ главную роль допущеніе существованія особой міровой среды, вліяніемъ которой и обусловливается возникновеніе тѣхъ ускореній, которыя выражаются формулой (2). Не входя въ эту область, пока еще фантазій, ограничимся немногими указаніями. Мы знаемъ, что въ присутствіи тѣла A (рис. 98) дѣйствуетъ на тѣло B сила f по направленію къ A. Возникновеніе такой силы можетъ быть понимаемо двояко: или какъ тяга, дѣйствующая на B со стороны aa (такою тягою представилась бы actio in distans) или какъ давленіе, производимое на B со стороны bb. Къ такому давленію и старались привести вліяніе присутствія тѣла A. Допускалось, напр., что частицы міровой среды, двигаясь, ударяютъ со всѣхъ сторонъ на всякое тѣло. Присутствіе тѣла A какъ бы отчасти охраняетъ тѣло B отъ ударовъ частицъ, идущихъ слѣва. Число толчковъ на тѣло B справа будетъ больше, чѣмъ слѣва, и вотъ этотъ-то избытокъ толчковъ яко-бы и есть причина возникновенія силы f.

Рис. 98.



Предупреждая юныхъ читателей не вдаваться въ эту область фантазій, замѣтимъ, что прежде всего неизвѣстно, какая это «міровая среда»: тотъ ли эфиръ, о которомъ мы говорили раньше, или другая, особая, служащая причиною всемірнаго тяготѣнія? Непреодолимое затрудненіе представляетъ далѣе тотъ фактъ, что частицы, находящіяся внутри притягивающаго тѣла, вызываютъ такія же дѣйствія на внѣшнія массы, какъ и частицы, лежащія у его поверхности, что сама матерія такъ сказать абсолютно прозрачна для силы взаимнаго притяженія тѣлъ.

Можетъ быть вопросъ о всемірномъ тяготѣніи никогда не будетъ рѣшенъ; во всякомъ случаѣ слѣдуетъ помнить, что actio in distans, изгнанная изъ области явленій магнитныхъ и электрическихъ, не должна быть допущена для объясненія какой бы то ни было группы физическихъ явленій; что на нее слѣдуетъ смотрѣть только, какъ на удобную форму простого описанія явленій: они происходятъ такъ, какъ еслибы существовала actio in distans.

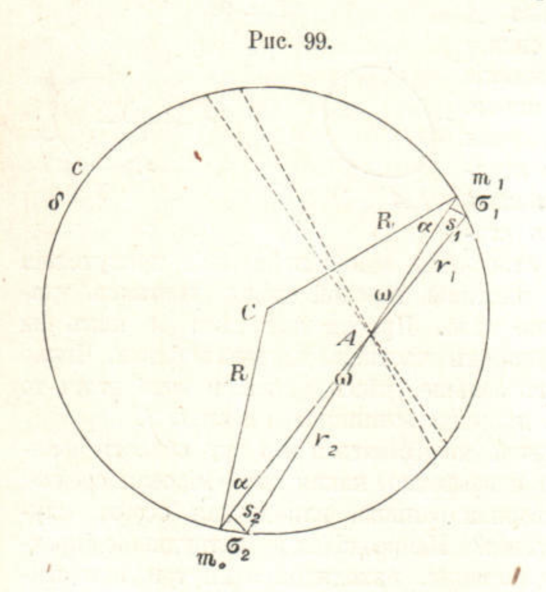
Нѣкоторые полагаютъ, что тяготѣніе есть основное свойство матеріи, неразрывно съ нею связанное и представляющее поэтому одинъ изъ признаковъ ея существованія; никакихъ объясненій въ этомъ случаѣ быть не можетъ и не требуется. Задача исчерпана—разъ законъ тяготѣнія найденъ. Съ такимъ взглядомъ согласиться нельзя; проводить его въ другихъ отдѣлахъ физики значило бы разрушать эту науку.

Теперь мы можемъ пополнить недосказанное въ двухъ предыдущихъ статьяхъ.

На стр. 16 было упомянуто, что приписывать эфиру вѣсъ можно только съ оговоркою. Теперь понятно, въ чемъ эта оговорка заключается: если допустить, что причина всемірнаго тяготѣнія матеріи заключается въ особыхъ свойствахъ эфира, то понятно, что нельзя и мысленно допустить возможности возникновенія тяготѣнія въ самомъ эфирѣ, даже при какихъ-либо особыхъ, можетъ быть вполнѣ фантастическихъ условіяхъ, упомянутыхъ на стр. 16.

На стр. 109 была высказана мысль, что въ природѣ, можетъ быть, вовсе не существуетъ потенціальной энергіи, что въ тѣхъ случаяхъ, когда намъ кажется, что работоспособность совокупности двухъ тѣлъ является только слѣдствіемъ ихъ взаимнаго расположенія, въ дѣйствительности мы имѣемъ дѣло съ кинетической энергіей движенія неизвѣстнаго намъ вещества. Когда мы поднимаемъ грузъ, мы тратимъ часть энергіи, запасенной въ нашихъ мышцахъ, на производство работы, результатомъ которой является, какъ мы говоримъ, потенціальная энергія притягивающихся двухъ тѣлъ, т.-е. земного шара и приподнятаго груза. Но если actio in distans не существуетъ, если причина кажущагося притяженія кроется въ движеніяхъ особой среды (хотя-бы и эфира), то мы должны допустить, что прямымъ результатомъ поднимація груза является увеличеніе кинетической энергіи движенія этой среды; при паденіи тѣла эта энергія переходитъ въ энергію движенія груза.

Рис. 99.



§ 5. Притяженіе точки шаровымъ слоемъ и шаромъ. Данъ шаровой слой весьма малой толщины c, плотности δ и радіуса R, такъ что вся его масса M равна

$$M = 4\pi R^2 c\delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

На рис. 99 толщина c вовсе не отмѣчена и шаровой слой въ разрѣзѣ изображенъ окружностью.

Требуется опредѣлить, съ какою силою F_i дѣйствуетъ шаровой слой на матеріальную точку m (ея масса), находящуюся **внутри** его (значекъ i = intérieure) и съ какою силою F_e на точку m, расположенную во внѣшнемъ (значекъ e = extérieure) пространствѣ.

Положимъ, что масса m находится въ точкѣ A (рис. 99). Проведемъ отъ нея безконечно малый тѣлесный уголъ (стр. 37) ω въ обѣ стороны; онъ вырѣжетъ два элемента поверхности σ_1 и σ_2 изъ шарового слоя и соотвѣтствующія имъ массы $m_1 = \sigma_1 c\delta$ и $m_2 = \sigma_2 c\delta$, которыя притягиваютъ массу m съ силами

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} = \frac{c\delta m\sigma_1}{r_1^2} \text{ и } f_2 = \frac{c\delta m\sigma_2}{r_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

направленными въ противоположныя стороны; здѣсь r_1 и r_2 разстоянія отъ A до σ_1 и до σ_2.

Опишемъ около A, какъ центра, двѣ шаровыя поверхности съ радіусами r_1 и r_2 и пусть s_1 и s_2 (рис. 99) элементы этихъ поверхностей, вырѣзанные тѣлеснымъ угломъ ω. Очевидно

$$s_1 = r_1^2\omega \;,\; s_2 = r_2^2\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Соединимъ центръ C съ σ_1 и σ_2; получается фигура, безконечно мало отличающаяся отъ равнобедреннаго треугольника; пусть $\angle Cm_1A = \angle Cm_2A = \alpha$. Уголъ между σ_1 и s_1 равенъ углу между нормалями R и r_1 къ нимъ, т.-е. $\angle(\sigma_1, s_1) = \alpha$ и точно также $\angle(\sigma_2, s_2) = \alpha$. Но s_1 есть проекція элемента σ_1 на поверхность шара (съ радіусомъ r_1), а потому $s_1 = \sigma_1 \cos(\sigma_1, s_1) = \sigma_1 \cos\alpha$. Отсюда, см. еще (19),

$$\sigma_1 = \frac{s_1}{\cos\alpha} = \frac{r_1^2\omega}{\cos\alpha}; \quad \sigma_2 = \frac{s_2}{\cos\alpha} = \frac{r_2^2\omega}{\cos\alpha}.$$

Вставляя σ_1 и σ_2 въ (18), получаемъ

$$f_1 = \frac{c\delta\omega m}{\cos\alpha}; \quad f_2 = \frac{c\delta\omega m}{\cos\alpha}.$$

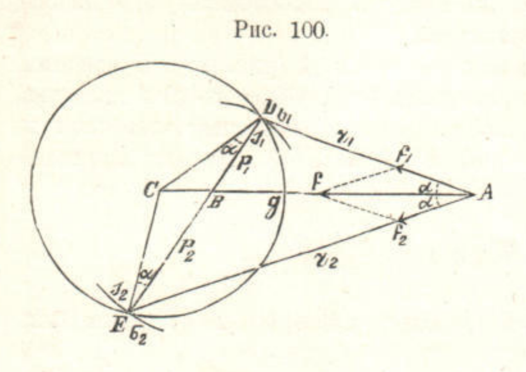
Отсюда $f_1 = f_2$, т.-е. элементы шарового слоя, вырѣзанные угломъ ω, притягиваютъ массу m, находящуюся въ A, съ силами, равными по величинѣ, но противоположными по направленію; ихъ равнодѣйствующая нуль. Проводя черезъ точку A, какъ вершину, по всевозможнымъ направленіямъ тѣлесные углы, мы можемъ исчерпать весь шаровой слой (см. пунктиръ), раздѣливъ его на элементы, попарно другъ другу противоположные и попарно притягивающіе m съ одинаковыми по величинѣ силами. Каждыя такія двѣ силы взаимно уничтожаются, а потому и **весь тонкій шаровой слой никакого дѣйствія на точку, лежащую внутри него, не производитъ**, т.-е.

$$F_i = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Перейдемъ къ дѣйствію шарового слоя на массу m, сосредоточенную

во внѣшней точкѣ A (рис. 100), находящейся на разстояніи $CA = x$ отъ центра; R, c, δ и $M = 4\pi R^2 c\delta$ имѣютъ прежнее значеніе. Отыщемъ на CA такую точку B, чтобы радіусъ $R = CG$ былъ бы среднимъ пропорціональнымъ между $CA = x$ и $CB = a$, т.-е. чтобы

Рис. 100.



$$\frac{a}{R} = \frac{R}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Черезъ B проведемъ безконечно тонкій тѣлесный уголъ ω, направленіе котораго DBE только и намѣчено на рис. 100. Онъ вырѣжетъ изъ поверхности шарового слоя два элемента σ_1 и σ_2, расположенные около точекъ D и E, а изъ самого слоя массы $m_1 = \sigma_1 c\delta$ и $m_2 = \sigma_2 c\delta$. Соединимъ D и E съ C и A; пусть $\angle CDB = \angle CEB = \alpha$, $BD = p_1$, $BE = p_2$, $DA = r_1$ и $EA = r_2$. Наконецъ, пусть f_1 и f_2 силы, съ которыми масса m въ A притягивается элементами шарового слоя m_1 и m_2. Имѣемъ

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} = \frac{\sigma_1 c\delta m}{r_1^2}; \quad f_2 = \frac{\sigma_2 c\delta m}{r_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Около B, какъ центра, опишемъ двѣ шаровыя поверхности съ радіусами p_1 и p_2 черезъ D и E. Тѣлесный уголъ ω вырѣжетъ изъ нихъ элементы s_1 и s_2. Какъ и прежде, имѣемъ $s_1 = p_1^2 \omega = \sigma_1 \cos\alpha$; $s_2 = p_2^2 \omega = \sigma_2 \cos\alpha$.

Вставляя взятыя отсюда σ_1 и σ_2 въ (22) получаемъ

$$f_1 = \frac{c\delta m\omega}{\cos\alpha} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^2; \quad f_2 = \frac{c\delta m\omega}{\cos\alpha} \left(\frac{p_2}{r_2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

ΔDCB и ΔDCA подобны, ибо уголъ при C общій, а стороны этого угла пропорціональны: (21) даетъ $\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CA}$.

Изъ этого подобія слѣдуетъ, что $\angle DAC = \angle CDB = \alpha$ и далѣе, что

$$\frac{BD}{DA} = \frac{CD}{CA} \text{ или } \frac{p_1}{r_1} = \frac{R}{x}.$$

Подобіе треугольниковъ ECB и ECA даетъ, что $\angle CAE = CEB = \alpha$ и что $\frac{p_2}{r_2} = \frac{R}{x}$. Вставляя найденныя отношенія въ (23), получаемъ

$$f_1 = f_2 = \frac{c\delta m\omega R^2}{x^2 \cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Итакъ, силы f_1 и f_2 равны между собою и составляютъ равные углы

α съ направленіемъ AC. Ихъ равнодѣйствующая f направлена къ центру и равна

$$f = 2f_1 \cos\alpha = \frac{2c\delta m\omega R^2}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Проведя черезъ B безконечное множество тѣлесныхъ угловъ, мы раздѣлимъ шаровой слой на пары элементовъ, изъ которыхъ каждая даетъ равнодѣйствующую силу f, направленную къ центру. Искомая сила F_e, съ которою весь слой притягиваетъ массу m, получается простымъ суммированіемъ силъ f, т.-е.

$$F_e = \sum f = \sum \frac{2c\delta m\omega R^2}{x^2} = \frac{2R^2 c\delta m}{x^2} \sum \omega.$$

Сумма тѣлесныхъ угловъ ω, которые исчерпали бы весь шаровой слой, равна 2π, такъ какъ каждый изъ этихъ угловъ двойной. Положивъ $\sum \omega = 2\pi$ и принявъ во вниманіе, что вся масса M слоя равна $4\pi R^2 c\delta$, получаемъ

$$F_e = \frac{Mm}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Эта формула показываетъ, что дѣйствіе тонкаго шарового слоя на внѣшнюю точку такое же, какое получилось бы, еслибы вся масса слоя была сосредоточена въ его центрѣ.

Шаровой однородный слой конечной толщины можетъ быть мысленно раздѣленъ на безконечное множество концентрическихъ безконечно тонкихъ слоевъ. Прилагая къ этимъ слоямъ формулы (20) и (26), мы видимъ, что и конечный шаровой слой никакого дѣйствія не производитъ на точку, лежащую внутри его полости, и что на внѣшнюю точку онъ производитъ такое же дѣйствіе, какъ еслибы вся его масса была сосредоточена въ его центрѣ.

Сплошной однородный шаръ также можно раздѣлить на концентрическіе слои, а потому и его дѣйствіе на внѣшнюю точку будетъ такое же, какъ еслибы вся масса шара была сосредоточена въ его центрѣ. Мы этимъ уже пользовались на стр. 179. На массу m, находящуюся на разстояніи x отъ центра шара, дѣйствуетъ сила

$$F_e = \frac{Mm}{x^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi R^3 \delta m}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Если масса m находится у самой поверхности шара, то получается сила

$$F = \frac{Mm}{R^2} = \frac{4}{3}\,\pi\delta R m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Опредѣлимъ силу F_i, съ которой сплошной шаръ дѣйствуетъ на массу m, находящуюся внутри него на разстояніи $x < R$ отъ его центра. Проведемъ шаровую поверхность, имѣющую общій съ даннымъ шаромъ центръ и радіусъ x; она пройдетъ черезъ m и раздѣлитъ данный шаръ на двѣ

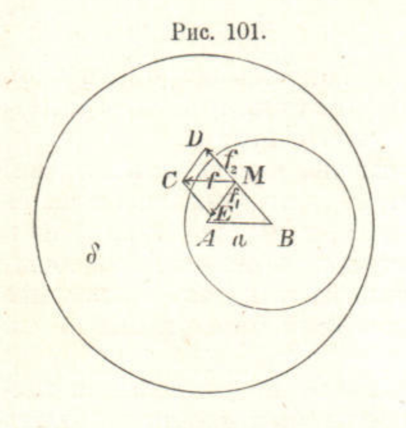
части: на шаровой слой, для котораго m будетъ внутреннею массою, на которую его дѣйствіе есть нуль и на шаръ съ радіусомъ x, у поверхности котораго находится точка m. Этотъ шаръ притягиваетъ m къ центру съ силою, которая получится, если въ (28) положить x вмѣсто R. Полагая, что x считается положительнымъ отъ центра къ m, мы передъ выраженіемъ силы F_i поставимъ знакъ минусъ, чтобы указать, что она дѣйствуетъ къ центру, т.-е. въ сторону отрицательную:

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi\delta x m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Итакъ притяженіе сплошного шара на внутреннюю точку пропорціонально ея разстоянію отъ центра шара и направлено къ центру.

Формула (29) аналогична (22) стр. 117, гдѣ s поставлено вмѣсто x. Отсюда слѣдуетъ, что еслибы масса m могла свободно двигаться въ весьма узкомъ каналѣ, проходящемъ черезъ центръ однороднаго шара, находясь только подъ вліяніемъ притяженія этого шара, то она совершала бы гармоническое колебательное движеніе. Сравнивая (29) съ (22) стр. 117, мы не должны полагать $C = \frac{4}{3}\pi\delta$, ибо въ (22) стр. 117 сила выражена въ абсолютныхъ, въ (29) же въ астрономическихъ (см. стр. 181) единицахъ.

Рис. 101.



§ 6. Случай равномѣрнаго динамическаго поля. Вообразимъ однородный шаръ, центръ котораго въ A (рис. 101) и внутри него шаровидную полость съ центромъ въ B. Требуется опредѣлить силу f, дѣйствующую на массу m, находящуюся въ M внутри полости. Пусть δ плотность большого шара. Шаръ, имѣющій полость, можно замѣнить совокупностью двухъ шаровъ: сплошного съ центромъ въ A и съ плотностью δ и другого, также сплошного, съ центромъ въ B и съ плотностью $-\delta$ (см. рис. 97 и текстъ стр. 183). Первый шаръ притягиваетъ массу m съ силою $f_1 = ME$, направленной къ A и, на основаніи (29), пропорціональной разстоянію MA, такъ что можно положить $f_1 = k . MA$, гдѣ k зависитъ только отъ плотности δ, но не зависитъ отъ радіуса шара, см. (29); второй шаръ отталкиваетъ массу m съ силою $f_2 = MD$, направленною отъ B и равною $f_2 = k.MB$. Построивъ равнодѣйствующую f, мы видимъ, что ΔCDM подобенъ ΔAMB, ибо $\angle CDM = \angle AMB$ и далѣе $\frac{MD}{CD} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{k.MB}{k.MA} = \frac{MB}{MA}$.

Изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle DMC = \angle MBA$ и что слѣд. $MC = f$ параллельно BA. Это должно относиться ко всѣмъ точкамъ M полости. Далѣе имѣемъ

$$\frac{MC}{AB} = \frac{MD}{MB} \text{ т.-е. } \frac{f}{a} = \frac{f_2}{MB} = \frac{k.MB}{MB} = k.$$

т.-е.

$$f = ka \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Если силу f выражать въ астрономическихъ единицахъ, то

$$k = \frac{4}{3}\pi\delta m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

(30) показываетъ, что сила f по величинѣ также не зависитъ отъ положенія точки M внутри полости.

Шаровидная полость внутри однороднаго шара есть равномѣрное динамическое поле (стр. 83), т.-е. во всѣхъ его точкахъ дѣйствуетъ на массу m одна и та же сила, параллельная прямой, соединяющей центры шара и полости и пропорціональная разстоянію a этихъ центровъ.

Напряженіе (стр. 83) этого равномѣрнаго поля вовсе не зависитъ отъ радіусовъ шара и полости. Когда центры шара и полости совпадаютъ

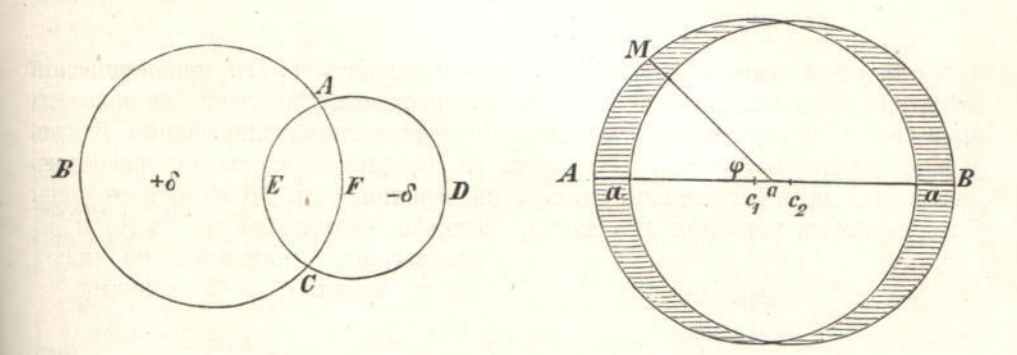


Рис. 102. Рис. 103.

($a = 0$), то напряженіе поля дѣлается равнымъ нулю и мы имѣемъ случай однороднаго шарового слоя, для котораго, какъ мы видѣли, $F_i = 0$.

Представимъ себѣ два шара: $ABCFA$ (рис. 102) съ плотностью $+\delta$ и $AECDA$ съ плотностью $-\delta$; ихъ совокупность сводится къ положительной массѣ $ABCEA$, отрицательной $AFCDA$ и пустой чечевицеобразной полости $AECFA$. Тѣмъ же способомъ, какъ выше, мы найдемъ, что эта полость есть равномѣрное динамическое поле, напряженіе котораго пропорціонально плотности δ и разстоянію центровъ шаровъ.

Особенно важенъ, какъ мы увидимъ, случай, когда радіусы обоихъ шаровъ равны и центры ихъ c_1 и c_2 (рис. 103) весьма близки другъ къ другу. Въ этомъ случаѣ равномѣрное динамическое поле получается въ пространствѣ почти шаровидномъ, ограниченномъ двумя одинаковыми слоями положительной и отрицательной массы, отмѣченными на рисункѣ штрихами. Если положить $c_1c_2 = a$, то оказывается, что толщина c слоя въ любой точкѣ M приблизительно равна

$$c = a\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

гдѣ φ уголъ между прямой AB, проходящей черезъ центры c_1 и c_2 и радіусомъ, проведеннымъ къ M изъ c_1 или c_2 (при очень маломъ $c_1c_2 = a$ это безразлично).

Чѣмъ меньше $c_1c_2 = a$, тѣмъ точнѣе формула (32).

Если силы измѣрять въ астрономическихъ единицахъ, т.-е. исходить изъ формулы (12) стр. 181, то напряженіе поля $\psi = \frac{f}{m}$ оказывается равнымъ

$$\psi = \frac{4}{3}\pi\delta a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

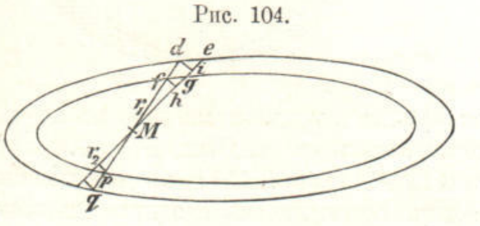
гдѣ a наибольшая толщина двухъ слоевъ.

§ 7. Частный случай притяженія точки эллипсоидальнымъ слоемъ. Представимъ себѣ безконечно тонкій однородный слой (плотность δ), ограниченный поверхностями двухъ подобныхъ и сходственно расположенныхъ эллипсоидовъ (рис. 104), т.-е. такихъ, оси которыхъ другъ другу пропорціональны, такъ что

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

гдѣ a, b, c оси одного, a_1, b_1, c_1 оси другого эллипсоида. Въ аналитической геометріи доказывается, что если черезъ произвольную точку M провести прямую, то ея отрѣзки, лежащіе между поверхностями эллипсоидовъ будутъ равны; итакъ $fd = pq = \alpha$. Пусть въ M находится масса m; проведемъ безконечно малый тѣлесный уголъ ω съ вершиною въ M въ обѣ стороны. Онъ вырѣжетъ изъ слоя двѣ массы, которыя обозначимъ черезъ m_1 и m_2 и которыя притягиваютъ массу m съ силами f_1 и f_2, равными

Рис. 104.



$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} \cdot \quad f_2 = \frac{m_2 m}{r_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Если черезъ точки f и d проведемъ шаровыя поверхности съ центромъ въ M, то нашъ тѣлесный уголъ вырѣжетъ изъ шарового слоя, ограниченнаго этими поверхностями, элементъ $fdih$, объемъ котораго отличается отъ объема элемента $fdeg$ на величину безконечно малую сравнительно съ этими двумя элементами. Поэтому можно принять $m_1 = \delta r_1^2\omega \times fd = \delta r_1^2\omega\alpha$; такимъ же образомъ получаемъ $m_2 = \delta r_2^2\omega\alpha$. Вставляя эти значенія для m_1 и m_2 въ (35) получаемъ $f_1 = f_2$.

Отсюда, какъ и прежде для шарового слоя, заключаемъ, что однородный слой, ограниченный поверхностями двухъ подобныхъ и сходственно расположенныхъ эллипсоидовъ, т.-е. удовлетворяющихъ условію (34), вовсе не дѣйствуетъ на точку, лежащую въ его полости.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Элементарное ученіе о потенціалѣ.

§ 1. Функціи точки. Элементарному ученію о потенціалѣ необходимо предпослать нѣсколько словъ о функціяхъ точки. Всякая величина, относящаяся къ опредѣленной точкѣ, называется функціею точки. Такъ напр. температура есть функція точки, ибо ея значеніе мѣняется, вообще говоря, отъ точки къ точкѣ, и можно говорить о значеніи температуры въ данной точкѣ M. Пусть A данная точка и r разстояніе другой точки M отъ A. Тогда величины r, r^2, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{\sqrt{r}}$ и т. д. суть функціи точки M, ибо значеніе этихъ величинъ зависитъ отъ положенія точки M.

Всякую функцію V точки M можно разсматривать какъ функцію координатъ x, y, z этой точки, т.-е. можно положить

$$V = f(x, y, z).$$

Такъ напр. $V = \frac{1}{r}$ есть функція точки вида

$$V = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

гдѣ a, b, c координаты точки A. Геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ V имѣетъ одно и то же значеніе C, представляетъ нѣкоторую поверхность, уравненіе которой

$$V = f(x, y, z) = C.$$

Такая поверхность называется поверхностью уровня данной функціи точки или ея изо-поверхностью.

Отсюда напр. названіе изотермической для поверхности, всѣ точки которой обладаютъ одинаковой температурой. Придавая числу C различныя значенія, получаемъ безконечное множество поверхностей уровня; черезъ каждую точку пространства проходитъ одна такая поверхность и только одна, если функція однозначна.

Черезъ каждую точку A пространства можно провести кривую линію, которая проходитъ черезъ поверхности уровня по направленіямъ, къ нимъ перпендикулярнымъ. Это значитъ, что во всякой точкѣ A касательная къ кривой перпендикулярна къ плоскости, касательной въ A къ поверхности уровня, проходящей черезъ ту же точку A. Такія кривыя линіи называются ортогональными траекторіями системы поверхностей уровня.

§ 2. Потенціалъ при одной притягивающей массѣ (матеріальной точкѣ). Въ этой главѣ мы будемъ исходить изъ выраженія

$$f = \frac{mm_1}{r^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

для силы f взаимнаго притяженія массъ m и m_1, находящихся на разстояніи r другъ отъ друга. За единицу силы мы возьмемъ слѣд. астрономическую единицу (стр. 181), которая, если m и m_1 измѣрять въ граммахъ и r въ сантиметрахъ, примѣрно въ 15 милліоновъ разъ меньше абсолютной *C. G. S.* единицы силы, т.-е. дина (см. стр. 182). Для работы R мы, какъ прежде, примемъ выраженіе

$$R = fs \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ s путь, пройденный точкою приложенія силы f по направленію послѣдней. Измѣряя s напр. въ сантиметрахъ, мы вводимъ особую единицу работы, которая въ 15 милліоновъ разъ меньше эрга (стр. 91).

Положимъ, что въ точкѣ A (рис. 105) сосредоточена масса m; на разстояніи r возьмемъ геометрическую точку B и назовемъ величину V, численное значеніе которой опредѣляется формулою

$$V = \frac{m}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

потенціаломъ точки B или, какъ иногда говорятъ, потенціаломъ въ точкѣ B. Этотъ потенціалъ какъ бы «вызывается» присутствіемъ массы m въ A. Въ различныхъ точкахъ B потенціалъ будетъ вообще различный, а потому потенціалъ есть функція точки. Поверхности уровня потенціала суть концентрическія шаровыя поверхности съ общимъ центромъ въ A. Ортогональныя траекторіи поверхностей уровня потенціала суть радіусы шаровыхъ поверхностей, т.-е. прямыя линіи, исходящія изъ точки A. Потенціалъ есть функція убывающая съ удаленіемъ отъ A, т.-е. съ возрастаніемъ r. Въ безконечно удаленныхъ точкахъ потенціалъ стремится къ предѣлу нуль.

Рис. 105.

A B_1 $V = \frac{m}{r}$

m σ B

r

Если мы изъ B перейдемъ въ B_1 по направленію къ A, т.-е. въ сторону увеличивающагося потенціала, на безконечно малый отрѣзокъ пути $BB_1 = \sigma$, то мы въ B_1 найдемъ новое значеніе потенціала, которое обозначимъ черезъ $V + \Delta V$, гдѣ ΔV измѣненіе потенціала, соотвѣтствующее переходу отъ B къ B_1. Очевидно $V + \Delta V = \frac{m}{r - \sigma}$, откуда

$$\Delta V = \frac{m}{r-\sigma} - \frac{m}{r} = \frac{m\sigma}{r(r-\sigma)}.$$

При весьма маломъ σ можемъ положить

$$\Delta V = \frac{m\sigma}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Если какая-либо масса m_1 перейдетъ изъ B въ B_1, то сила f притяженія

между m и m_1 произведетъ элементарную работу, которую мы обозначимъ черезъ ΔR. Такъ какъ сила f направлена отъ B къ A, то

$$\Delta R = f\sigma = \frac{mm_1}{r^2}\sigma.$$

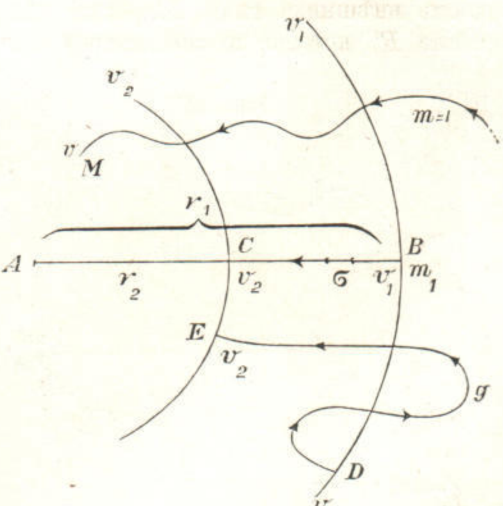
Сравнивая это съ (4), мы видимъ, что

$$\Delta R = m_1 \Delta V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

т. е. элементарная работа силы притяженія выражается произведеніемъ перемѣщенной массы на измѣненіе потенціала, соотвѣтствующее перемѣщенію.

Если масса m пройдетъ конечный путь изъ B въ C (рис. 106), то вся работа R силы притяженія легко получится, если путь BC разбить на элементы σ, изъ которыхъ каждому соотвѣтствуетъ малая работа ΔR, такъ что $R = \sum \Delta R$. Пусть $AB = r_1$, $AC = r_2$; потенціалы точекъ B и C суть $V_1 = \frac{m}{r_1}$ и $V_2 = \frac{m}{r_2}$. Въ этомъ случаѣ имѣемъ, см. (5).

Рис. 106.



$$R = \sum \Delta R = \sum m_1 \Delta V = m_1 \sum \Delta V.$$

Но $\sum \Delta V$ есть сумма малыхъ измѣненій потенціала, соотвѣтствующихъ перемѣщеніямъ σ, на которыя мы разбили весь путь отъ B до C; ясно, что она равна полному измѣненію потенціала, т.-е. что $\sum \Delta V = V_2 - V_1$. Итакъ

$$R = m_1(V_2 - V_1) \quad . \quad . \quad (6)$$

Работа силы притяженія измѣряется произведеніемъ притягиваемой массы на разность потенціаловъ конечной и начальной точекъ пути.

Сила притяженія принадлежитъ къ силамъ центральнымъ (стр. 95), а потому работа R не зависитъ ни отъ вида пройденнаго пути, ни отъ положенія начальной и конечной точекъ на двухъ шаровыхъ поверхностяхъ съ радіусами r_1 и r_2 (см. стр. 95), которыя здѣсь суть поверхности уровня потенціала. Формула (6) даетъ слѣд. и работу силы f при перемѣщеніи массы m_1 по пути DGE.

Работа зависитъ только отъ разности потенціаловъ тѣхъ двухъ точекъ, между которыми данная масса m_1 совершила переходъ.

Если $m_1 = 1$, то получается

$$R = V_2 - V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

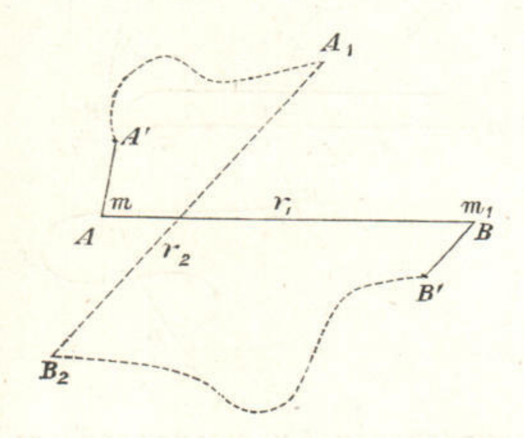
Разность потенціаловъ двухъ точекъ равна работѣ перемѣщенія единицы массы изъ одной точки въ другую. Пусть масса $m_1 = 1$ переходитъ по произвольному пути изъ безконечно удаленной точки въ точку M (рис. 106), потенціалъ которой V. Въ этомъ случаѣ $V_1 = 0$, $V_2 = V$ и вмѣсто (7) получаемъ

$$R = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Потенціалъ данной точки равенъ работѣ силы притяженія, совершенной при переходѣ единицы массы изъ безконечности по произвольному пути въ эту точку. Изъ (6) слѣдуетъ еще, что $R = 0$, когда начальная и конечная точки пути лежатъ на одной и той-же поверхности уровня потенціала.

Когда m_1 удаляется отъ A, то происходитъ затрата работы R' или на счетъ энергіи движенія самой массы m_1 или на счетъ какого-либо другого запаса энергіи. Въ послѣднемъ случаѣ мы говоримъ, что R' есть работа внѣшнихъ силъ. Переходу CB или EGD должна соотвѣтствовать работа R', которая по абсолютной величинѣ равна R. Разница только въ томъ, что начальная точка пути дѣлается теперь конечной и наоборотъ. (6) и (8) даютъ $R' = m_1 (V_2 - V_1)$ и $R' = V$ т.-е.:

Рис. 107.



Работа внѣшнихъ силъ измѣряется произведеніемъ перемѣщенной массы на разность потенціаловъ начальной и конечной точекъ пути.

Потенціалъ данной точки равенъ работѣ внѣшнихъ силъ, затрачиваемой при переходѣ единицы массы изъ этой точки по произвольному пути въ безконечность.

Сила f въ каждой точкѣ пространства направлена къ точкѣ A (рис. 105 и 106), т.-е. по радіусу шаровой поверхности, которая есть поверхность уровня потенціала. Это даетъ теорему:

Дѣйствующая сила во всякой точкѣ пространства перпендикулярна къ поверхности уровня потенціала, проходящей черезъ эту-же точку.

Линіи силъ суть ортогональныя траекторіи поверхностей уровня потенціала.

Положимъ опять, что массы m и m_1 сосредоточены въ точкахъ A и B (рис. 107) на разстояніи r другъ отъ друга. Введемъ новую величину W, численное значеніе которой опредѣлялось бы формулой

$$W = \frac{mm_1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

и которую мы назовемъ **потенціаломъ массъ** m и m_1 **другъ на друга**. Если V потенціалъ точки B, «вызванный» точкою A, и V_1 потенціалъ точки A, вызванный точкою B, т.-е. если положить $V=\frac{m}{r}$ и $V_1=\frac{m_1}{r}$, то ясно, что

$$W=\frac{mm_1}{r}=Vm_1=V_1m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9,a)$$

Если m_1 перемѣстится изъ B въ B', то работа ΔR, произведенная силою f, равна $\Delta R=m_1\Delta V=\Delta(m_1V)=\Delta W$, т.-е. равна измѣненію потенціала массъ другъ на друга. Но, аналогично, при перемѣщеніи m изъ A въ A' сила f взаимнаго притяженія массъ произведетъ работу, равную $\Delta R=m\Delta V_1$, гдѣ ΔV_1 разность потенціаловъ точекъ A и A'. Отсюда $\Delta R=\Delta(mV_1)=\Delta W$. Итакъ, которая изъ двухъ массъ не измѣнила бы своего положенія, работа ΔR всегда равна измѣненію величины W. Если сперва m перейдетъ изъ A въ A' и затѣмъ m_1 изъ B въ B', то вся работа, совершенная взаимнымъ притяженіемъ двухъ массъ m и m', будетъ очевидно равняться полному измѣненію величины W. Мы видѣли, однако, что работа внутреннихъ центральныхъ силъ не зависитъ отъ того, какимъ образомъ система перешла изъ одного расположенія въ другое (стр. 96), а потому и при **одновременномъ** перемѣщеніи массъ m и m_1 работа ΔR численно равняется измѣненію величины W. Разбивая конечныя перемѣщенія на элементы, мы отсюда уже легко выводимъ такой результатъ:

Если двѣ матеріальныя точки, массы которыхъ m и m_1, изъ какого-либо начальнаго расположенія A и B, при которомъ ихъ потенціалъ другъ на друга W имѣетъ спеціальное значеніе W_1, по произвольнымъ путямъ переходятъ въ новое расположеніе A_1 и B_2 (рис. 107), при которыхъ W имѣетъ другое значеніе W_2, то вся работа R силы ихъ взаимнаго притяженія равна

$$R=W_2-W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

т.-е. разности ихъ потенціаловъ другъ на друга въ конечномъ и въ начальномъ расположеніяхъ. Если $AB=r_1$ и $A_1B_2=r_2$, то

$$R=W_2-W_1=\frac{mm_1}{r_2}-\frac{mm_1}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Если массы m и m_1 первоначально находились на безконечно большомъ разстояніи другъ отъ друга и затѣмъ перешли по произвольнымъ путямъ въ такое положеніе, при которомъ ихъ потенціалъ другъ на друга имѣетъ значеніе W, то въ (11) слѣдуетъ положить $W_1=0$, $W_2=W$; тогда получается

$$R=W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Потенціалъ двухъ точекъ другъ на друга равенъ работѣ ихъ притяженія, совершенной при переходѣ изъ «безконечно разрозненнаго» расположенія въ данное.

§ 3. Потенціалъ при системѣ дѣйствующихъ массъ (матеріальныхъ точекъ). Дана система матеріальныхъ точекъ $m_1, m_2, m_3, m_4 \ldots$ (рис. 108) и пусть геометрическая точка A находится на разстояніяхъ $r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots$ отъ этихъ точекъ. Назовемъ потенціаломъ точки A, какъ бы вызваннымъ въ ней системой точекъ m_i, величину V, равную

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots = \sum \frac{m}{r} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

т.-е. равную суммѣ потенціаловъ, которые вызываются въ той же точкѣ отдѣльными массами, изъ которыхъ состоитъ система. Если эти массы

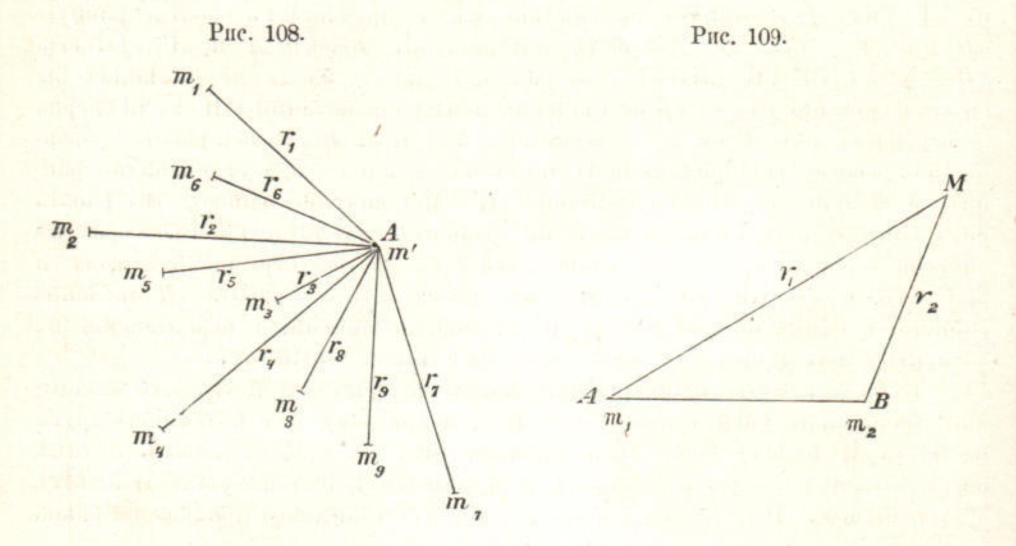


Рис. 108. Рис. 109.

составляютъ сплошное тѣло, то мы раздѣлимъ его мысленно на безконечно малыя части, изъ которыхъ каждая будетъ играть роль одной изъ точекъ системы. Для знакомыхъ съ интегральнымъ исчисленіемъ замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ V принимаетъ видъ

$$V = \int \frac{k dv}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

гдѣ dv элементъ объема, k его плотность, r его разстояніе отъ точки, потенціалъ которой V и, наконецъ, $\int$ сокращенно обозначаетъ знакъ опредѣленнаго тройного интеграла, распространеннаго на объемъ тѣла.

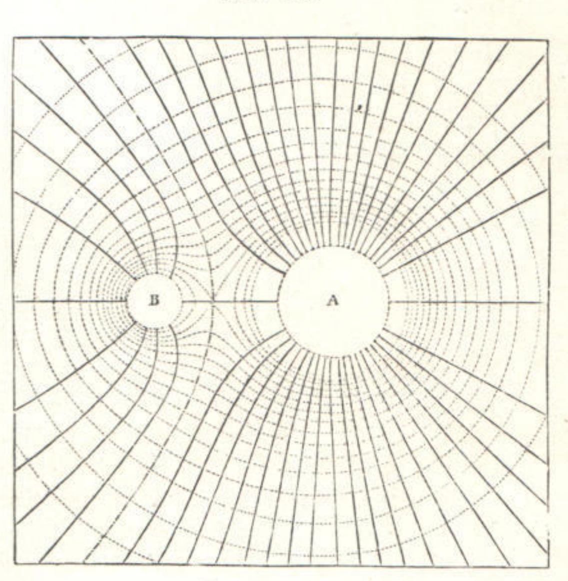
Величина V, см. (13), есть функція точки, ибо съ измѣненіемъ положенія точки A вообще измѣняются всѣ знаменатели r. Геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ одинаковымъ потенціаломъ, есть поверхность уровня потенціала. Ея уравненіе

$$V = C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

гдѣ C постоянное число. Въ зависимости отъ числа и расположенія массъ m, видъ этихъ поверхностей можетъ быть весьма различный. Когда мы имѣемъ всего двѣ дѣйствующія массы m_1 и m_2, то потенціалъ V въ точкѣ M (рис. 109) будетъ равняться $V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$ и уравненія поверхностей уровня будутъ $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = C$.

На рис. 110 изображены пунктиромъ линіи пересѣченія плоскости рисунка съ поверхностями уровня потенціала для случая, когда въ точкѣ A находится масса m_1, въ точкѣ B масса m_2 и притомъ $m_1 = 4m_2$. Поверхности уровня суть поверхности вращенія, получающіяся при вращеніи всего рисунка около прямой AB. Кривыя, ближайшія къ A и B, мало отличающіяся отъ круговъ, не начерчены. Сплошныя линіи суть ортогональныя траекторіи (стр. 193) поверхностей уровня потенціала; ихъ физическое значеніе выяснится ниже. Понятно, что двѣ системы кривыхъ (линіи сплошныя и линіи пунктиромъ) на рис. 110 вездѣ пересѣкаются подъ прямыми углами.

Рис. 110.



Положимъ, что (рис. 108) m' переходитъ изъ точки A, потенціалъ которой равенъ

$$V_1 = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_1} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots \quad (16)$$

въ точку B, потенціалъ которой

$$V_2 = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \ldots \quad (17)$$

гдѣ ρ_i разстояніе массы m_i отъ B. Требуется опредѣлить всю работу R, совершенную при этомъ переходѣ массы m' силою F, съ которою масса m' притягивается массами m_i системы. Сила F есть равнодѣйствующая силъ $f_1, f_2, f_3 \ldots$, съ которыми отдѣльныя эти массы притягиваютъ m'. Если черезъ $R_1, R_2, R_3 \ldots$ обозначить работу силъ $f_1, f_2, f_3 \ldots$, то работа R силы F, на основаніи теоремы о работѣ равнодѣйствующей (стр. 93), равна алгебраической суммѣ работъ $R_1, R_2, R_3 \ldots$

Итакъ

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \; \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Но на основаніи теоремы, формулирующей смыслъ равенства (6), имѣемъ

$$R_1 = m'\left(\frac{m_1}{\rho_1} - \frac{m_1}{r_1}\right); \quad R_2 = m'\left(\frac{m_2}{\rho_2} - \frac{m_2}{r_2}\right) \text{ и т. д.}$$

Вставляя это въ (18), получаемъ

$$R = m'\left\{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \ldots\right\} - m'\left\{\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots\right\}$$

т.-е., см. (16) и (17).

$$R = m'(V_2 - V_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Въ случаѣ системы дѣйствующихъ массъ, работа, произведенная при перемѣщеніи массы m', также измѣряется произведеніемъ этой массы на разность потенціаловъ конечной и начальной точекъ пути.

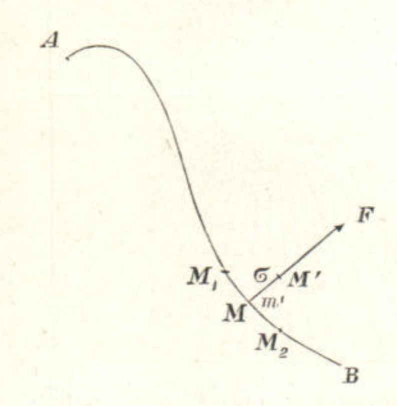
При $m' = 1$ получимъ формулу, тожественную съ (7). Если масса $m' = 1$ перейдетъ изъ безконечности по произвольному пути въ точку, потенціалъ которой V, то (19) даетъ ($m' = 1$, $V_1 = 0$, $V_2 = V$)

$$R = V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Получается то же самое значеніе потенціала точки, которое было формулировано послѣ равенства (8).

Формула (19) показываетъ, что работа R зависитъ только отъ тѣхъ двухъ поверхностей уровня потенціала ($V = V_1$ и $V = V_2$), между которыми былъ совершенъ переходъ массы m', но не зависитъ, ни отъ формы пути, ни отъ положенія начальной и конечной точекъ пути на этихъ поверхностяхъ.

Рис. 111.



Черезъ каждую точку M пространства, въ которой дѣйствуетъ сила, можно провести поверхность уровня AB потенціала и притомъ только одну (рис. 111). Если въ эту точку M помѣстить массу m', то на нее будетъ дѣйствовать нѣкоторая сила F. Опредѣлимъ ея направленіе. Если массу m' перемѣстить по поверхности AB на безконечно малый путь MM_1, MM_2 или другой, не лежащій въ плоскости рисунка, то работа R силы F будетъ нуль на основаніи формулы (19), такъ какъ начальныя и конечныя точки пути лежатъ на одной и той же поверхности уровня потенціала. Отсюда слѣдуетъ (стр. 92), что сила F перпендикулярна ко всѣмъ малымъ линіямъ, которыя по всевозможнымъ направленіямъ можно провести изъ M по поверхности AB. Это показываетъ, что сама сила F нормальна къ поверхности AB.

Въ каждой точкѣ пространства дѣйствующая сила перпендикулярна къ поверхности уровня потенціала, проходящей черезъ эту же точку.

Отсюда непосредственно вытекаетъ, что линіи силъ суть орто-

гональныя траекторіи (стр. 193) поверхностей уровня потенціала.

Сплошныя линіи на рис. 110 суть, слѣдовательно, линіи силъ.

Сила F направлена въ сторону возрастающаго потенціала. Дѣйствительно, если m перемѣстить на безконечно малую величину $MM' = \sigma$ (рис. 111) по направленію силы F, то работа R съ одной стороны будетъ равна $F\sigma$, съ другой, на основаніи (19), $R = m'(V + \Delta V - V) = m'\Delta V$, если потенціалъ точки M (и всей поверхности AB) обозначить черезъ V, а потенціалъ точки M' черезъ $V + \Delta V$. Итакъ

$$F\sigma = m'\Delta V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Отсюда ясно, что $\Delta V > 0$ и что F обращено въ сторону возрастающаго потенціала. Равенство (21) даетъ

$$F = m' \frac{\Delta V}{\sigma}.$$

Однако σ величина безконечно малая и послѣдняя формула строго вѣрна только въ предѣлѣ, т.-е.

$$F = m' \lim \frac{\Delta V}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Здѣсь ΔV есть измѣненіе потенціала, соотвѣтствующее безконечно малому перемѣщенію σ, нормальному къ поверхности уровня потенціала.

Провѣримъ (22) для случая одной дѣйствующей точки m, когда $V = \frac{m}{r}$; пусть малое перемѣщеніе $\sigma = BB_1$ (рис. 105 стр. 194). Тогда $\Delta V = \frac{m}{r-\sigma} - \frac{m}{r} = \frac{m\sigma}{r(r-\sigma)}$; $\frac{\Delta V}{\sigma} = \frac{m}{r(r-\sigma)}$. При безконечно маломъ σ имѣемъ $\lim \frac{\Delta V}{\sigma} = \frac{m}{r^2}$, и (22) даетъ вѣрное выраженіе $F = \frac{mm'}{r^2}$.

§ 4. Потенціалъ двухъ системъ другъ на друга. Положимъ, что имѣются двѣ системы точекъ A и B и пусть m_i масса одной изъ точекъ системы A, m_k масса одной изъ точекъ системы B и r разстояніе этихъ двухъ точекъ другъ отъ друга. Составимъ сумму W всѣхъ величинъ вида

$$\frac{m_i m_k}{r},$$

получающихся при комбинаціи каждой точки системы A съ каждою точкою системы B. Эту сумму

$$W = \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

назовемъ потенціаломъ системъ A и B другъ на друга. Если обѣ системы перейдутъ изъ какого-либо начальнаго расположенія точекъ, при которомъ $W = W_1$, въ новое расположеніе, при которомъ $W = W_2$,

то измѣненіе каждаго члена $m_i m_k : r$ дастъ работу силы, дѣйствующей между точками m_i и m_k, см. (11), а потому полное измѣненіе величины W, т.-е. $W_2 - W_1$ дастъ всю работу R всѣхъ силъ, дѣйствующихъ между точками двухъ системъ. Такимъ образомъ имѣемъ

$$R = W_2 - W_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Если обѣ системы первоначально находились на весьма большомъ другъ отъ друга разстояніи и затѣмъ перешли въ расположеніе, при которомъ ихъ потенціалъ другъ на друга равенъ W, то работа R силъ, дѣйствующихъ между системами A и B, получится, если въ (24) положить $W_1 = 0$ и $W_2 = W$; такимъ образомъ имѣемъ

$$R = W \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Потенціалъ двухъ системъ другъ на друга равенъ работѣ силъ, дѣйствующихъ между точками m_i одной и точками m_k другой системы, произведенной при переходѣ обѣихъ системъ изъ весьма далекаго другъ отъ друга разстоянія въ то положеніе, которое онѣ занимаютъ.

Пусть W_0 наибольшее значеніе величины W, возможное при заданныхъ свойствахъ двухъ системъ и получающееся при наибольшемъ ихъ сближеніи. Тогда

$$R = W_0 - W \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

есть вся та работа, которая еще можетъ быть получена отъ двухъ системъ, потенціалъ которыхъ другъ на друга равенъ W. Ясно, что величина $W_0 - W$ равна запасу потенціальной энергіи, которымъ обладаетъ совокупность двухъ системъ, вслѣдствіе существованія притягательныхъ силъ между каждой точкой одной системы и каждой точкой другой.

§ 5. Потенціалъ системы самой на себя. Положимъ, что имѣется система матеріальныхъ точекъ

$$m_1 \quad m_2 \quad m_3 \ldots m_i \ldots m_k \ldots$$

и пусть $r_{i,k}$ разстояніе какихъ либо двухъ изъ нихъ m_i и m_k другъ отъ друга. Величина $\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}$ есть потенціалъ массъ m_i и m_k другъ на друга, стр. 197. Составимъ подобныя дроби для всевозможныхъ комбинацій двухъ частицъ, причемъ однако каждая пара должна быть взята только одинъ разъ. Если n число всѣхъ частицъ, то число дробей будетъ $\frac{1}{2}n(n-1)$, что при очень большомъ n можно принять равнымъ $\frac{1}{2}n^2$. Сумму всѣхъ такихъ дробей назовемъ потенціаломъ системы самой на себя и обозначимъ черезъ W.

Символическое условное обозначеніе для W легко написать, если мы подъ символомъ

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{m_i m_k}{r_{i,k}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

условимся понимать сумму дробей, которыя получатся, если поочередно каждую точку системы (безъ пропусковъ) будемъ сочетать со всѣми остальными точками. Очевидно, что при этомъ каждая пара m_i и m_k встрѣтится по два раза и что слѣд. $W=\frac{1}{2}S$. Отбрасывая значки, принято писать

$$W=\frac{1}{2}\sum\sum\frac{mm'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Величину S можно преобразовать, написавъ

$$S=\sum_i m_i \sum_k \frac{m_k}{r_{i,k}}.$$

Но $\sum_k \frac{m_k}{r_{i,k}}$ есть ничто иное, какъ значеніе V_i потенціала системы въ принадлежащей ей геометрической точкѣ, занимаемой массой m_i, см. (13). Слѣд. можно написать $S=\sum_i m_i V_i$. Отсюда, отбросивъ значки, получаемъ для W такое выраженіе

$$W=\frac{1}{2}\sum mV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Потенціалъ системы самой на себя равенъ полусуммѣ произведеній массы каждой изъ матеріальныхъ точекъ, изъ которыхъ состоитъ система, на потенціалъ занимаемой ею геометрической точки.

Положимъ, что система изъ нѣкотораго первоначальнаго расположенія, при которомъ $W=W_1$, перешла въ новое, при которомъ $W=W_2$. Требуется опредѣлить всю «внутреннюю» работу R, совершенную всѣми силами притяженія, дѣйствующими между частицами системы при этомъ переходѣ. Мы уже знаемъ (стр. 96), что R не зависитъ отъ тѣхъ путей, по которымъ точки системы перешли изъ перваго во второе расположеніе.

При переходѣ каждой пары m_i и m_k частицъ изъ перваго положенія во второе, новое, совершается силою ихъ взаимодѣйствія работа $R_{i,k}$, равная измѣненію потенціала этихъ двухъ частицъ другъ на друга, т.-е. равная измѣненію соотвѣтствующаго имъ члена суммы (28), выражающей величину W. Вся искомая работа R равна суммѣ всѣхъ работъ, подобныхъ $R_{i,k}$; она слѣд. равна суммѣ измѣненій, претерпѣваемыхъ членами, изъ которыхъ состоитъ W, при переходѣ системы изъ перваго расположенія во второе. Отсюда ясно, что R равно измѣненію величины W, т.-е.

$$R=W_2-W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Если система матеріальныхъ точекъ переходитъ изъ одного расположенія въ другое, то вся работа внутреннихъ силъ равна измѣненію потенціала системы самой на себя.

Допустимъ, что система изъ «безконечно разрозненнаго» состоянія.

при которомъ всѣ $r_{i,k}$ безконечно велики, перешла въ данное расположеніе, при которомъ потенціалъ ея самой на себя равенъ W. Тогда въ (30) имѣемъ $W_1 = 0$, $W_2 = W$, т.-е.

$$R = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

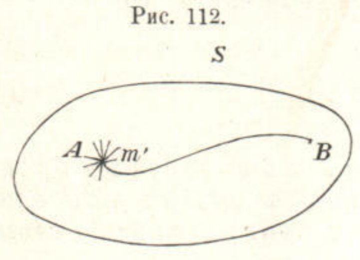
Потенціалъ системы самой на себя равенъ работѣ, совершенной внутренними силами при ея образованіи изъ безконечно разрозненнаго состоянія.

Результатомъ этой работы долженъ явиться эквивалентный запасъ энергіи, напр. кинетической энергіи видимаго движенія частицъ, или теплоты, или иной ея формы.

§ 6. Теорема о пространствѣ, внутри котораго $V = Const$. Докажемъ слѣдующую теорему:

Если внутри замкнутаго пространства потенціалъ V, вызванный массами, лежащими внѣ его, имѣетъ повсюду одно и то же постоянное значеніе $V = C$, то во всѣхъ точкахъ этого пространства дѣйствующая сила $F = 0$, и наоборотъ: если въ замкнутомъ пространствѣ вездѣ $F = 0$, то въ немъ потенціалъ $V = C$, т.-е. постояненъ.

Рис. 112.



Для доказательства положимъ, что внутри поверхности S (рис. 112) $V = Const$. Помѣстимъ мысленно въ какую либо точку A массу m'; въ какомъ бы направленіи мы ее изъ A ни перемѣстили, работа дѣйствующей силы F будетъ нуль, ибо въ (19) $V_1 = V_2 = C$. Отсюда слѣдуетъ, что $F = 0$.

Положимъ, наоборотъ, что внутри S вездѣ $F = 0$; возьмемъ двѣ произвольныя точки A и B внутри S и перемѣстимъ массу m' изъ A въ B. Такъ какъ на всемъ пути $F = 0$, то ясно, что $R = 0$. Но тогда (19) показываетъ, что потенціалы точекъ A и B равны между собою. Въ виду произвольности точекъ A и B отсюда слѣдуетъ, что всѣ точки внутри S обладаютъ однимъ и тѣмъ же потенціаломъ.

§ 7. Потенціалъ шарового слоя и шара. Замѣтимъ, что кромѣ введенной выше терминологіи: «потенціалъ точки A, вызванный системою матеріальныхъ точекъ» еще говорятъ о «потенціалѣ системы въ точкѣ A».

Для тонкаго шарового слоя, радіусъ котораго R, толщина c, плотность δ, можно найти внѣшній потенціалъ V_e и внутренній V_i слѣдующимъ элементарнымъ путемъ. Такъ какъ шаровой слой во внѣшнемъ пространствѣ вызываетъ такія же силы F_e, какъ еслибы вся его масса M была сосредоточена въ его центрѣ (стр. 189), то ясно, что и потенціалъ V_e долженъ обладать соотвѣтствующимъ свойствомъ, т.-е. въ точкѣ A, лежащей на разстояніи $x > R$ отъ центра, долженъ быть

$$V_e = \frac{M}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Очевидно, что эта же формула относится и къ однородному шаровому слою конечной толщины и къ однородному сплошному шару. Во внутреннемъ пространствѣ $F_i = 0$ (стр. 187); на основаніи теоремы § 6 мы должны имѣть $V_i = Const.$, т.-е. во всѣхъ точкахъ внутри шарового слоя потенціалъ V долженъ имѣть одно и то же значеніе. Легко найти значеніе V_c потенціала въ центрѣ шара; ясно, что мы должны имѣть $V_i = V_c$. Раздѣлимъ массу шарового слоя на элементы m; они всѣ находятся на одинаковомъ разстояніи R отъ центра, слѣд. потенціалъ

$$V_c = \sum \frac{m}{R} = \frac{\Sigma m}{R} = \frac{M}{R}.$$

Итакъ

$$V_i = \frac{M}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Такъ какъ $M = 4\pi R^2 c\delta$, то V_i равно еще

$$V_i = 4\pi Rc\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Для знакомыхъ съ интегральнымъ исчисленіемъ приведемъ болѣе строгій выводъ величинъ V_e и V_i для тонкаго шарового слоя. Пусть A (рис. 113) внѣшняя точка, находящаяся на разстояніи $CA = x$ отъ центра шара. Если m масса элемента шарового слоя, находящагося въ B, и $BA = r$, то искомое $V_e = \sum \frac{m}{r}$. Обозначимъ черезъ $\varphi = \angle BCD$ и ψ (долгота) полярныя координаты точки B; тогда $R^2 \sin\varphi d\varphi d\psi$ элементъ поверхности около B и слѣд. $m = c\delta R^2 \sin\varphi d\varphi d\psi$. Далѣе $r = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi}$ и потому

$$V_e = c\delta R^2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{R^2+x^2-2Rx\cos\varphi}} = 2\pi c\delta R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{R^2+x^2-2Rx\cos\varphi}} \quad . \quad . \quad (35)$$

или

$$V_e = \frac{2\pi\delta cR}{x} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Предѣлы интеграла обозначены символически. Неопредѣленный интегралъ равенъ $\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi} = r$ и потому символически напишемъ $V_e = \frac{2\pi\delta cR}{x} \left\{ r \right\}_D^E$, гдѣ D и E точки на чертежѣ, въ которыхъ $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Это даетъ

$$V_e = \frac{2\pi c\delta R}{x}\left\{AE - DA\right\} = \frac{2\pi c\delta R}{x}\left\{(x+R) - (x-R)\right\} = \frac{4\pi R^2 c\delta}{x} = \frac{M}{x};$$

такимъ образомъ формула (32) провѣрена.

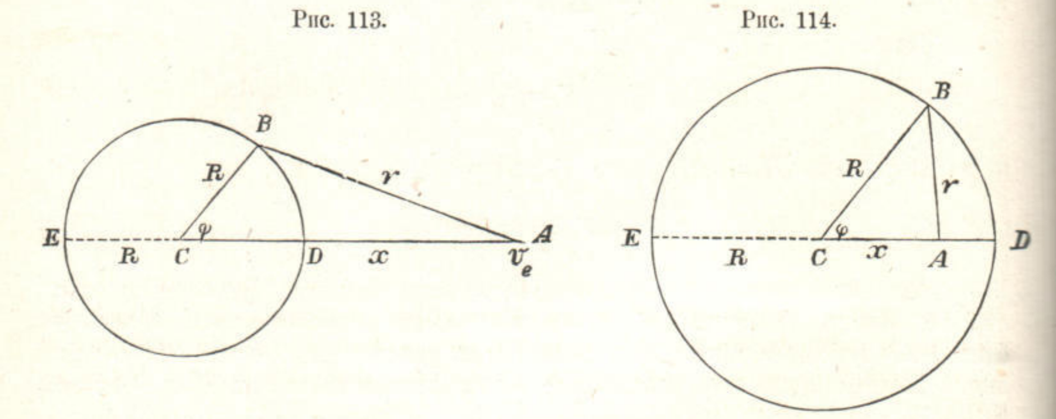
Внутренній потенціалъ V_i въ точкѣ A (рис. 114) выражается тѣми же

интегралами (35) и (36), какъ и V_e; только теперь $x = CA < R$. Мы опять имѣемъ

$$V_i = \frac{2\pi c\delta R}{x}\left\{AE - AD\right\} = \frac{2\pi c\delta R}{x}\left\{(R+x) - (R-x)\right\} = 4\pi\delta cR = \frac{M}{R}.$$

чѣмъ и провѣряются формулы (33) и (34).

Потенціалъ V_i во внутренней полости однороднаго шарового слоя, ограниченнаго шаровыми поверхностями съ радіусами R_1 и



R_2, получится, если раздѣлить данный слой на безконечно тонкіе слои, принимая c въ (34) равнымъ dR. Тогда

$$V_i = \int_{R=R_1}^{R_2} 4\pi\delta R dR = 2\pi\delta(R_2{}^2 - R_1{}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Потенціалъ V внутри сплошного шара (радіусъ R, плотность δ) въ точкѣ A, находящейся на разстояніи x отъ центра, состоитъ изъ двухъ частей. Первая, V_1, есть потенціалъ сплошного шара, радіусъ котораго x и у поверхности котораго находится точка A; (32) даетъ $V_1 = \frac{M}{x} = \frac{4\pi x^3\delta}{3x} = \frac{4}{3}\pi x^2\delta$. Вторая часть, V_2, есть потенціалъ шарового слоя, внутри котораго находится точка A; онъ получится изъ (37), полагая $R_2 = R$ и $R_1 = x$, такъ что $V_2 = 2\pi\delta(R^2 - x^2)$. Складывая $V_1 + V_2 = V$, находимъ внутри сплошного однороднаго шара

$$V = 2\pi\delta R^2 - \frac{2}{3}\pi\delta x^2 = 2\pi\delta\left(R^2 - \frac{1}{3}x^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Потенціалъ въ центрѣ сплошного шара равенъ $2\pi\delta R^2$.

Рѣшимъ любопытную задачу о потенціалѣ W сплошного однороднаго шара самого на себя. Воспользуемся формулою (29)

$$W = \frac{1}{2} \sum mV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Раздѣлимъ шаръ концентрическими шаровыми поверхностями на безконечно тонкіе слои; пусть x радіусъ, dx толщина одного изъ этихъ слоевъ. Такъ какъ V одно и то же во всѣхъ точкахъ слоя, а именно равно величинѣ (38), то мы можемъ въ (39) принять m равнымъ массѣ слоя, т.-е. положить $m = 4\pi x^2 \delta dx$. Такимъ образомъ, см. (38),

$$W = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{R} (2\pi\delta R^2 - \frac{2}{3}\pi\delta x^2) 4\pi\delta x^2 dx.$$

Этотъ простой интегралъ даетъ, если M масса всего шара,

$$W = \frac{16}{15} \pi^2 \delta^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{M^2}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Итакъ, потенціалъ шара самого на себя пропорціоналенъ квадрату его плотности и пятой степени его радіуса.

Формула (40) даетъ намъ работу образованія шара изъ безконечно разрозненнаго состоянія.

(40) показываетъ далѣе, что если данная масса M, сгущаясь, послѣдовательно занимаетъ объемъ шаровъ съ различными радіусами, то потенціалъ W, а слѣд. и работа образованія шара обратно пропорціональны его радіусу.

Если масса M, занимавшая объемъ шара съ радіусомъ R, сгустится до объема шара съ радіусомъ $R_1 < R$, то работа сгущенія будетъ равна

$$W_1 - W = \frac{3}{5} M^2 \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Слѣдуетъ твердо помнить, что формулы (40) и (41) даютъ намъ работу образованія и сгущенія шара не въ абсолютныхъ единицахъ. Если M выразить въ граммахъ и R въ сантиметрахъ, то (40) и (41) дадутъ намъ искомую работу въ единицахъ, изъ которыхъ каждая приблизительно въ 15.10^6 разъ меньше эрга (стр. 194).

Формула (41) даетъ намъ возможность вычислить работу сгущенія солнца хотя бы на 0.1% его радіуса, а слѣд. и ту теплоту Q, которая при этомъ выдѣлится, что и предлагаемъ сдѣлать читателямъ. Интересно затѣмъ узнать, на сколько времени хватитъ этой теплоты, если допустить, что на квадратный сантиметръ, перпендикулярный къ лучамъ солнца и находящійся на разстояніи земли отъ солнца, падаютъ 3 малыя калоріи въ одну минуту. Принимая для теплоемкости шара какое-либо приближенное число, можно получить понятіе о нагрѣваніи, которое имѣло бы мѣсто при его

образованіи или сгущеніи, еслибы не было потери тепла черезъ лучеиспусканіе. Интересно вычислить примѣрное повышеніе температуры солнца при внезапномъ уменьшеніи его радіуса на 0.1°/₀, принимая теплоемкость солнца хотя бы равною $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{10}$ или даже равною 1, что по всей вѣроятности слишкомъ большое число.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Сила тяжести.

§ 1. Равномѣрное динамическое поле у поверхности земли. Мы уже упоминали о томъ, что сила тяжести, дѣйствующая у поверхности земли на всѣ тѣла, представляетъ частный случай всемірнаго тяготѣнія (стр. 179). Обозначая массу земли черезъ M, ея радіусъ черезъ R, ускореніе свободнаго паденія у поверхности земли черезъ g, массу какого-либо тѣла черезъ m, его вѣсъ черезъ p, и допуская, что притяженіе земли происходитъ, какъ притяженіе однороднаго шара, имѣемъ

$$p = C\frac{Mm}{R^2} = mg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

откуда

$$g = C\frac{M}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Хотя вѣсъ p различныхъ тѣлъ не одинаковъ, но ускореніе g свободнаго паденія для всѣхъ тѣлъ у поверхности земли въ пустотѣ одно и то же. Формула (2) показываетъ, что ускореніе g, вездѣ направленное къ центру земли, принимаемой за однородный шаръ, мѣняется съ удаленіемъ отъ ея поверхности.

Для небольшихъ частей пространства мы можемъ однако предположить, что во всѣхъ его точкахъ ускореніе g одно и то же по величинѣ и по направленію. Въ этомъ случаѣ разсматриваемая часть пространства есть равномѣрное динамическое поле (стр. 83), линіи силъ котораго имѣютъ направленіе, называемое вертикальнымъ. Плоскости, перпендикулярныя къ этимъ линіямъ, называются плоскостями горизонтальными.

Способы опредѣленія численнаго значенія ускоренія g и результаты этихъ опредѣленій мы разсмотримъ ниже въ отдѣлѣ третьемъ.

§ 2. Центръ тяжести. Въ § 15, стр. 84, мы видѣли, что если помѣстить тѣло въ равномѣрное динамическое поле, то всѣ дѣйствующія на него силы имѣютъ равнодѣйствующую, точка приложенія которой называется центромъ инерціи тѣла. Если размѣры тѣла, находящагося у поверхности земли, не чрезмѣрно велики, то можно допустить, что всѣ его точки находятся въ одномъ и томъ же равномѣрномъ динамическомъ полѣ. Точка приложенія всѣхъ силъ тяжести, дѣйствующихъ на элементы тѣла,

совпадающая съ его центромъ инерціи, называется въ этомъ случаѣ центромъ тяжести.

Координаты центра тяжести опредѣляются для неоднороднаго тѣла формулами (31) стр. 85, а для однороднаго — формулами (32) на той же страницѣ. Положеніе центра тяжести тѣла не зависитъ отъ положенія самого тѣла, ибо такимъ свойствомъ обладаетъ центръ инерціи (стр. 84).

На основаніи формулы (34) стр. 86 и соотвѣтствующей теоремы мы можемъ сказать, что моментъ инерціи K_A тѣла относительно произвольной оси A равенъ моменту инерціи K_C того же тѣла относительно оси C, параллельной первой и проходящей черезъ центръ тяжести, сложенному съ Ma^2, т. е. съ произведеніемъ массы M тѣла на квадратъ разстоянія a осей A и C:

$$K_A = K_C + Ma^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Примѣровъ опредѣленія центра тяжести мы не даемъ; ихъ можно найти въ курсахъ механики. Не останавливаемся также на вопросахъ, касающихся условій устойчиваго, неустойчиваго и безразличнаго равновѣсій тѣлъ, подпертыхъ или подвѣшенныхъ въ одной или многихъ точкахъ; объ этомъ говорится въ элементарныхъ курсахъ физики; болѣе серьезный разборъ относящихся сюда вопросовъ можно найти въ спеціальныхъ курсахъ механики.

§ 3. Свободное вертикальное движеніе тѣлъ въ пустотѣ. Хотя этотъ вопросъ излагается въ учебникахъ элементарной физики, куда онъ и относится, мы считаемъ не лишнимъ помѣстить здѣсь краткій обзоръ формулъ. Полагая, что ускореніе g есть величина постоянная, мы должны паденіе тѣлъ въ пустотѣ считать за движеніе равномѣрно ускоренное, а свободное движеніе тѣлъ, направленное вертикально вверхъ — за движеніе равномѣрно замедленное.

I. Паденіе. Пусть s пройденный путь, v скорость, t время и v_0 начальная скорость при $t = 0$; формулы (20) и (21) стр. 56 даютъ

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + gt \\ s &= v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

При паденіи безъ начальной скорости ($v_0 = 0$) имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} v &= gt \\ s &= \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ скорость растетъ пропорціонально первой, пройденный путь — пропорціонально второй степени времени.

При $t = 1$ имѣемъ изъ (5) $v_1 = g$, $s_1 = \frac{1}{2} g$; скорость въ концѣ первой единицы времени численно равна удвоенному пути, пройденному въ

эту единицу времени. Путь s_n, пройденный втеченіе n-той секунды, равенъ $s_n = \frac{1}{2} gn^2 - \frac{1}{2} g(n-1)^2$ или

$$s_n = (2n-1)\frac{g}{2} = \frac{1}{2}g + (n-1)g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Пути, пройденные въ послѣдовательныя единицы времени, увеличиваются на ту же численную величину g, на которую возростаютъ и скорости въ концѣ послѣдовательныхъ единицъ времени. Эти пути суть $s_1 = \frac{g}{2}$; $s_2 = \frac{g}{2} + g = 3\frac{g}{2}$; $s_3 = \frac{g}{2} + 2g = 5\frac{g}{2}$; $s_4 = \frac{g}{2} + 3g = 7\frac{g}{2}$ и т. д. Пути s_n относятся какъ нечетныя числа 1, 3, 5 и т. д., какъ это видно и изъ (6).

Формулы (5) даютъ, если исключить время t,

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{v^2}{2g} \\ v &= \sqrt{2gs} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

II. Движеніе снизу вверхъ. Начальная скорость v_0 не можетъ равняться нулю. Имѣемъ, см. (23) стр. 56,

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ s &= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Тѣло остановится въ то время T, для котораго $v = v_0 - gT = 0$, откуда

$$T = \frac{v_0}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Вставляя это T въ выраженіе для s, находимъ высоту H поднятія

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Высота поднятія пропорціональна квадрату начальной скорости. Достигнувъ высшей точки, тѣло начинаетъ падать. Оно возвратится въ начальную точку, употребивъ на возвратный путь время T_1, которое получится изъ формулы $H = \frac{1}{2}gT_1^2$, см. (5); отсюда $T_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$; вставляя сюда (10), получаемъ $T_1 = \frac{v_0}{g}$, т.-е. $T_1 = T$. На обратное паденіе потребуется время, равное времени подъема. Скорость v_1, которою обладаетъ тѣло въ моментъ его возвращенія въ начальную точку движенія, получается изъ (7); она равна $v_1 = \sqrt{2gH}$; вставляя (10) находимъ $v_1 = \pm v_0$. Въ данномъ случаѣ очевидно $v_1 = -v_0$. Тѣло при паденіи возвращается въ начальную точку со скоростью по абсолютной величинѣ равною начальной скорости подъема.

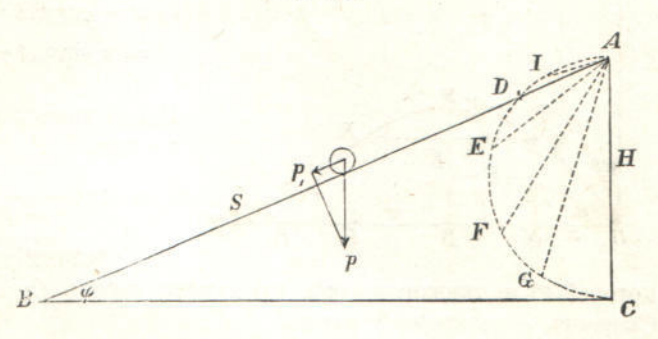
III. Движеніе по наклонной плоскости при отсутствіи тренія. Когда тѣло находится на наклонной плоскости AB (рис. 115).

составляющей уголъ φ съ горизонтальной плоскостью CB, то ускореніе g_1 его движенія будетъ вызываться слагаемою p_1 вѣса p, направленною параллельно плоскости AB. Такъ какъ ускоренія при данной массѣ пропорціональны силамъ, то мы имѣемъ $\frac{g_1}{g} = \frac{p_1}{p} = \sin\varphi$, откуда

$$g_1 = g\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Всѣ формулы (4) до (10) остаются приложимыми и здѣсь, если въ нихъ g замѣнить черезъ $g\sin\varphi$. Формула (10) даетъ въ этомъ случаѣ $H = \infty$ при $\varphi = 0$, какъ и должно быть при отсутствіи тренія и сопротивленія воздуха. Допустимъ, что тѣло начало двигаться изъ точки A безъ начальной скорости и что $AC = H$ и $AB = S$. Тѣло достигаетъ B со скоростью $v = \sqrt{2g_1S} = \sqrt{2gS\sin\varphi} = \sqrt{2gH}$. Эта скорость не зависитъ отъ наклона φ и равна скорости тѣла въ точкѣ C при свободномъ паденіи отъ A до C.

Рис. 115.

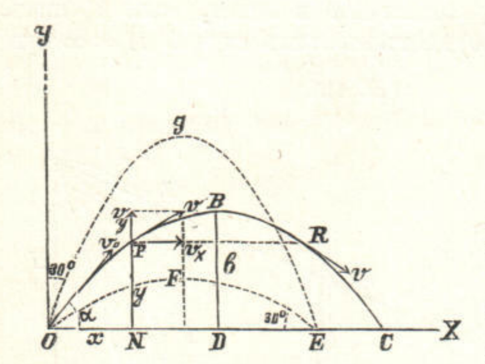


Въ данное время t тѣло пройдетъ вдоль AB путь s, равный $s = \frac{1}{2}g_1t^2 = \frac{1}{2}gt^2\sin\varphi$. Обозначивъ черезъ T время свободнаго паденія отъ A до C, имѣемъ $H = \frac{1}{2}gT^2$. Въ это же время T тѣло пройдетъ вдоль AB путь H_1, равный $H_1 = \frac{1}{2}g_1T^2 = \frac{1}{2}gT^2\sin\varphi = H\sin\varphi$. Проведя $CD \perp AB$ (на рис. 115 линія CD не проведена), имѣемъ $H_1 = AD$. Геометрическое мѣсто точекъ, до которыхъ тѣло, падая изъ данной точки безъ тренія и безъ начальной скорости по всевозможнымъ наклоннымъ плоскостямъ, доходитъ въ данное время T, есть поверхность шара, діаметръ котораго равенъ $H = \frac{1}{2}gT^2$. Пути AI, AD, AE, AF, AG, AC проходятся въ одинаковыя времена.

§ 4. Движеніе наклонно брошенныхъ тѣлъ въ пустотѣ. Нѣкоторое тѣло начинаетъ (при $t = 0$) двигаться со скоростью v_0 изъ точки O (рис. 116) по направленію Ov_0, составляющему уголъ α съ горизонтальною плоскостью OX. Требуется изслѣдовать его движеніе, которое очевидно будетъ совершаться въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ Ov_0. Проведемъ вертикальную линію OY, примемъ OX и OY за координатныя оси и разложимъ скорость v_0 на слагающія: горизонтальную $v_0\cos\alpha$ и вертикальную $v_0\sin\alpha$. Сила тяжести, придавая тѣлу вертикальное ускореніе g, будетъ мѣнять только вертикальную слагающую скорости; горизонтальная же (въ пустотѣ) останется неизмѣнною.

Тѣло будетъ двигаться по нѣкоторой кривой и въ моментъ времени t находиться въ нѣкоторой точкѣ P, координаты которой x и y, и обладать скоростью v, слагаемыя которой вдоль осей обозначимъ черезъ v_x и v_y. Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что горизонтальное движенiе есть равномѣрное со скоростью $v_0 \cos\alpha$, а движенiе вертикальное — равномѣрно перемѣнное съ начальною скоростью $v_0 \sin\alpha$. Отсюда слѣдуетъ, что

Рис. 116.



$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha \\ v_y &= v_0 \sin\alpha - gt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha \, . \, t \\ y &= v_0 \sin\alpha \, . \, t - \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Исключивъ t изъ уравненiй (13), находимъ

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Это уравненiе параболы ABC, по которой тѣло движется; она проходитъ черезъ O; ея ось BD вертикальна. Скорость v во время t равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2g\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2\right)},$$

или, см. (13),

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Эта формула показываетъ, что находясь при подъемѣ AB и при спускѣ BC на одинаковой высотѣ y, тѣло обладаетъ и одинаковой скоростью v; такъ, въ точкахъ P и R скорость одна и та же по величинѣ, но, конечно, различная по направленiю. Формулу (15) можно вывести изъ принципа сохраненiя энергiи. Въ тотъ моментъ, когда движущееся тѣло обладаетъ скоростью v, оно потеряло, отъ начала своего движенiя, кинетическую энергiю $\frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv^2$ и прiобрѣло потенцiальную энергiю $py = mgy$, гдѣ p вѣсъ тѣла. Упомянутый принципъ даетъ $\frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv^2 = mgy$, откуда непосредственно и получается (15).

Моментъ T_1 достиженiя высшей точки B (вершины параболы) мы получимъ, полагая $v_y = 0$. Формула (12) даетъ время подъема

$$T_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Подставляя T_1 вмѣсто t въ (13), находимъ высоту $DB = b$ подъема и абсциссу $a = OD$ точки B. Получается

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ b &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

При $\alpha = 90^\circ$ мы имѣемъ высоту $b = H$ вертикальнаго подъема, см. (10),

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

При $\alpha = 45^\circ$ имѣемъ $b = \frac{1}{2} H$.

Время T_2, когда тѣло возвратится къ горизонтальной плоскости OX, опредѣлится изъ условія $y = v_0 \sin\alpha . T_2 - \frac{1}{2} g T_2^2 = T_2\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g T_2\right) = 0$. Отсюда, см. (16),

$$T_2 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = 2 T_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Время спуска BC равно времени подъема AB.

Скорость въ C равна v_0, какъ видно изъ (15). Абсцисса $c = OC$ точки C, т. наз. дальность полета, получится, подставляя T_2 вмѣсто t въ выраженіе (13) для x; получается, см. (17),

$$c = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Отсюда слѣдуетъ, что $OC = 2OD$. Максимальная дальность полета c_m получается при $\sin 2\alpha = 1$, т.-е. $\alpha = 45^\circ$; она равна, см. (18),

$$c_m = \frac{v_0^2}{g} = 2H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Максимальная дальность полета равна удвоенной высотѣ вертикальнаго подъема (т.-е. когда $\alpha = 90^\circ$).

Формула (20) показываетъ, что при данной начальной скорости v_0 тѣло, выходя изъ O, можетъ попасть въ каждую точку E, лежащую на OX, при двухъ различныхъ значеніяхъ угла α, если только $OE < c_m$. Эти два значенія угла α дополняютъ другъ друга до 90°. Такъ напр. при $\alpha = 30^\circ$ получится парабола OFE, при $\alpha = 60^\circ$ — парабола OGE.

Предоставляемъ читателю доказать, что огибающая всѣхъ параболъ соотвѣтствующихъ значеніямъ угла α отъ $\alpha = 0$ до $\alpha = \pi$, есть также нѣкоторая парабола ABC (рис. 117), ось которой совпадаетъ съ осью Oy и вершина которой лежитъ надъ точкою O на разстояніи $OB = H = \frac{v_0^2}{2g}$; она пересѣкаетъ ось x-овъ въ двухъ точкахъ A и C, координаты которыхъ $OC = OA = \pm c_m = \pm 2H$. Уравненіе ея

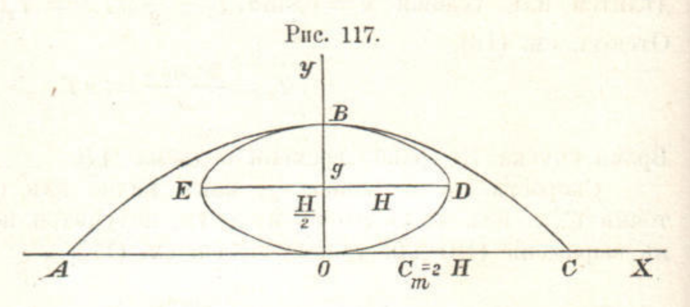
$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Далѣе легко доказать, что геометрическое мѣсто вершинъ параболъ есть эллипсъ $BDOEB$, малая ось котораго совпадаетъ съ осью Oy; онъ проходитъ черезъ точку O и черезъ точку B, лежащую надъ O на высотѣ H, т.-е. черезъ вершину параболы (22). Его малая полуось $\frac{1}{2}BO$ равна слѣд. $\frac{1}{2}H = \frac{v_0^2}{4g}$; горизонтальная большая полуось $\frac{1}{2}ED$ равна $H = \frac{v_0^2}{2g}$, такъ что $ED = OA = OC$. Его уравненіе

$$y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{v_0^2}{2g}y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

При данной начальной скорости v_0 тѣло ни при какихъ значеніяхъ угла α не достигнетъ точки, лежащей внѣ параболы ABC. Точки, лежащія внутри эллипса $BDOEB$ могутъ быть достигнуты, какъ при восходящемъ, такъ и при нисходящемъ движеніяхъ; въ каждой изъ нихъ пересѣкаются двѣ параболы. Точки, лежащія между эллипсомъ $BDOEB$ и параболою ABC могутъ быть достигнуты тѣломъ только при его нисходящемъ движеніи.

Рис. 117.



§ 5. Математическій маятникъ. Математическій маятникъ состоитъ изъ матеріальной точки, которой мы приписываемъ массу m и вѣсъ $p = mg$ и которая помѣщается на одномъ концѣ идеальнаго стержня CM (рис. 118), нерастяжимаго, негибкаго и не обладающаго массою. Другой его конецъ связанъ съ точкою C, около которой весь маятникъ можетъ вращаться. Длину маятника обозначимъ черезъ $l = CM$; его положеніе покоя есть CA.

Положимъ, что маятникъ былъ отклоненъ въ сторону на $\angle ACB = \alpha$ и затѣмъ предоставленъ самому себѣ. Подъ вліяніемъ силы тяжести онъ будетъ качаться, причемъ $AB = l\gamma$ назовемъ полуразмахомъ качанія; обозначимъ его черезъ $a = l\alpha$. Время полнаго качанія, т.-е. время отъ момента, когда маятникъ занимаетъ крайнее положеніе CB до возвращенія къ этому положенію, обозначимъ черезъ T. Впослѣдствіи мы нѣсколько измѣнимъ это обозначеніе. Найдемъ прежде всего скорость v конца маятника въ одномъ изъ промежуточныхъ положеній CM, когда его уголъ отклоненія отъ положенія равновѣсія равенъ $\angle ACM = \varphi$. Опустимъ изъ B и M перпендикуляры BF и ME на CA и положимъ $EF = h$. Живая сила $\frac{1}{2}mv^2$ маятника въ разсматриваемый моментъ должна равняться работѣ $ph = mgh$, произведенной силою тяжести при переходѣ массы m изъ B въ M. Слѣд. $v^2 = 2gh$; но $h = CF - CF = l\cos\varphi - l\cos\alpha = l(\cos\varphi - \cos\alpha)$. Отсюда получается

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Въ моментъ прохожденія маятника черезъ положеніе равновѣсія CA получаемъ максимальную скорость v_0 его конца, положивъ въ (24) $\varphi=0$,

$$v_0=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl}\ldots\ldots\quad(25)$$

Для весьма малыхъ α можно положить $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2l}$, такъ что

$$v_0=a\sqrt{\frac{g}{l}}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(26)$$

Натяженіе F нити въ моментъ, которому соотвѣтствуютъ положеніе CM и скорость v, состоитъ изъ двухъ частей: изъ слагающей вдоль нити вѣса p, равной $p\cos\varphi$ и изъ центробѣжной силы f, которая равна $\frac{mv^2}{l}$. Подставивъ (24), имѣемъ

$$f=\frac{mv^2}{l}=2mg(\cos\varphi-\cos\alpha)=2p(\cos\varphi-\cos\alpha);$$

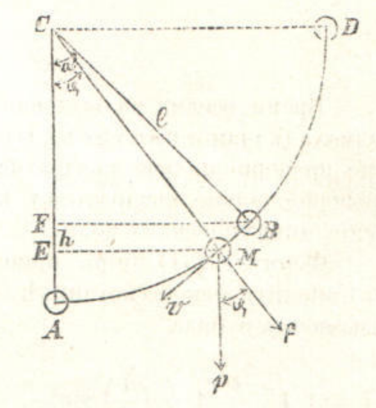
отсюда

$$F=p\cos\varphi+f=p(3\cos\varphi-2\cos\alpha)\ .\ .\quad(27)$$

Въ моментъ, когда $\varphi=0$, натяженіе дѣлается равнымъ

$$F_0=p(3-2\cos\alpha)\ .\ .\ .\ .\quad(28)$$

Рис. 118.



Если $\alpha=90^0$, т.-е. маятникъ былъ отклоненъ до положенія CD, то получаемъ $F_0=3p$, т.-е. натяженіе въ три раза больше, чѣмъ когда маятникъ въ покоѣ и на нить дѣйствуетъ только вѣсъ p.

Положимъ $\alpha=180^0$; въ моментъ, когда $\varphi=90^0$, т.-е. маятникъ находится въ положеніи CD, получаемъ изъ (28) $F=2p$; для F_0 имѣемъ на основаніи (28) $F_0=5p$.

Разсмотримъ случай весьма малыхъ колебаній. Условимся направленіе AB считать за положительное. Сила f, дѣйствующая на конецъ маятника по направленію его движенія и являющаяся причиной тангенціальнаго ускоренія въ его движеніи, равна $f=-p\sin\varphi$. Полагая $p=mg$ и считая φ за весьма малый уголъ, имѣемъ $f=-mg\varphi$. Обозначая разстояніе AM конца маятника отъ его средняго положенія чрезъ s, имѣемъ $l\varphi=s$ и слѣд.

$$f=-m\frac{g}{l}s\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(29)$$

По виду это выраженіе тожественно съ (22) стр. 117, если положить

$$c=\frac{g}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(30)$$

Отсюда слѣдуетъ, что при весьма малыхъ качаніяхъ можно, какъ первое приближеніе, принять, что конецъ маятника совершаетъ гармоническое колебательное движеніе съ амплитудою $a = AB$, но однако не по прямой линіи, но по весьма малой дугѣ окружности. Формула (18) стр. 117 даетъ $v_0 = a\sqrt{c} = a\sqrt{\frac{g}{l}}$, что согласно съ (26); далѣе формула (17) стр. 116 даетъ для времени полнаго колебанія

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Подъ временемъ качанія T маятника условимся, однако, понимать половину этой величины, т.-е. время отъ одного прохожденія черезъ положеніе покоя до слѣдующаго или время между двумя послѣдовательными остановками маятника въ крайнихъ положеніяхъ ($s = +a$ и $s = -a$). Такимъ образомъ имѣемъ

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Время весьма малыхъ качаній маятника не зависитъ ни отъ величины размаха (качанія изохронны), ни отъ массы m, находящейся на его концѣ. Оно пропорціонально квадратному корню изъ длины маятника и обратно пропорціонально квадратному корню изъ ускоренія силы тяжести (напряженія динамическаго поля).

Формула (31) лишь приближенная, какъ видно изъ нашего вывода. Въ аналитической механикѣ выводится точное выраженіе для T ввидѣ безконечнаго ряда

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right\} \ldots (32)$$

Для достаточно малыхъ α можно ограничиться первыми двумя членами суммы и положить

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

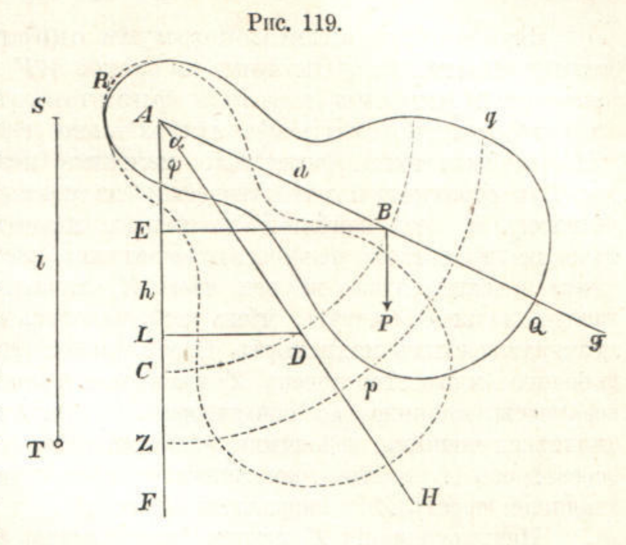
или, положивъ $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2l}$,

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{1}{16}\frac{a^2}{l^2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

§ 6. Физическій маятникъ. Физическимъ маятникомъ называется тѣло RQ (рис. 119), могущее вращаться около горизонтальной оси, не проходящей черезъ его центръ тяжести. Положимъ, что эта ось перпендикулярна къ плоскости рисунка и проходитъ черезъ точку A. Когда маятникъ находится въ положеніи покоя (не изображенномъ на рисункѣ), то его центръ тяжести C помѣщается на вертикальной прямой AF, проходящей

черезъ ось вращенія. Разстояніе центра тяжести отъ оси вращенія обозначимъ черезъ $AB = AC = a$, массу маятника черезъ M, его вѣсъ черезъ $P = Mg$. Если отклонить маятникъ на уголъ $FAG = \alpha$, причемъ центръ тяжести перейдетъ въ B и затѣмъ предоставить его самому себѣ, то онъ, при отсутствіи сопротивленія воздуха и тренія въ оси A, будетъ качаться съ постояннымъ въ обѣ стороны угловымъ размахомъ α. Опредѣлимъ его угловую скорость ω въ моментъ, когда отклоненіе равно $\varphi = \angle FAH$. Работа, произведенная силою тяжести P, приложенной къ центру тяжести, при измѣненіи отклоненія отъ α до φ, равна Ph, гдѣ $h = EL$ (прямыя BE и $DL \perp$ къ AF); отсюда работа равна $Pa(\cos\varphi - \cos\alpha)$. Пріобрѣтенная живая сила равна (стр. 90) $\frac{1}{2}K\omega^2$, гдѣ K моментъ инерціи маятника относительно оси вращенія. Равенство $Pa(\cos\varphi - \cos\alpha) = \frac{1}{2}K\omega^2$ даетъ

Рис. 119.



$$\omega = \sqrt{\frac{2Pa(\cos\varphi - \cos\alpha)}{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Въ моментъ прохожденія маятника черезъ положеніе равновѣсія ($\varphi = 0$) имѣемъ угловую скорость

$$\omega_0 = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{Pa}{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Приведенною длиною физическаго маятника называется длина $ST = l$ такого математическаго маятника, который имѣетъ одинаковое съ первымъ время качанія. Если маятникъ ST отклонить на уголъ $\alpha = \angle FAG$ и затѣмъ предоставить его самому себѣ, то для требуемаго равенства временъ качанія двухъ маятниковъ необходимо, чтобы при равныхъ отклоненіяхъ φ угловыя скорости маятниковъ физическаго (ω) и математическаго (ω_1) были равны между собою. Величина ω найдена, см. (35). Скорость v конца T математическаго маятника равна $v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}$, см. (24). Но $v = l\omega_1$, см. (42), стр. 62, слѣд.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g(\cos\varphi - \cos\alpha)}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Равенство $\omega = \omega_1$ даетъ

$$l = \frac{K}{Ma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Это весьма важная формула, опредѣляющая приведенную длину маятника. Отложимъ на прямой AF длину $AZ = l$. Точка Z называется центромъ качанія физическаго маятника. Эта точка имѣетъ очевидно слѣдующее замѣчательное свойство: еслибы исчезли всѣ матеріальныя точки физическаго маятника, исключая одной, находящейся въ Z и образующей математическій маятникъ AZ, то ея время качанія осталось бы безъ измѣненія такимъ же, какимъ оно было, когда точка Z входила въ составъ физическаго маятника. Всѣ точки физическаго маятника, лежащія ближе къ оси, чѣмъ Z, качаются медленнѣе, а точки, лежащія дальше—быстрѣе, чѣмъ онѣ качались бы, образуя нижніе концы математическихъ маятниковъ. Строго говоря, мы имѣемъ не одну, но безконечное множество точекъ Z; ихъ геометрическое мѣсто есть часть поверхности цилиндра pq, ось котораго A и радіусъ основанія l. Если ограничиться точками, лежащими въ вертикальной плоскости AF, проходящей черезъ ось A, то ихъ геометрическое мѣсто будетъ отрѣзокъ прямой, проходящей черезъ Z и параллельной оси A.

Центръ качанія Z лежитъ ниже центра тяжести, т.-е. всегда $l > a$. Дѣйствительно, пусть моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія A есть K_A, равное K въ (38) и пусть моментъ инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести C и параллельной оси A, есть K_C. На стр. 209 мы указали, что $K_A = K_C + Ma^2$. Вставляя это вмѣсто K въ (38), получаемъ

$$l = \frac{K + Ma^2}{Ma} = a + \frac{K_C}{Ma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

откуда и видно, что $l > a$.

Точка вращенія A и центръ качанія Z обладаютъ замѣчательнымъ свойствомъ сопряженности, т.-е. способностью обмѣниваться ролями: если перевернуть маятникъ и черезъ Z провести ось вращенія (параллельно прежней оси A), то A сдѣлается центромъ качанія; приведенная длина $l = AZ$, а слѣд. и время качанія останутся безъ измѣненія.

Для доказательства обозначимъ разстояніе центра качанія отъ центра тяжести черезъ $a_1 = CZ$ (рис. 119). Имѣемъ $a_1 = AZ - AC = l - a$; (39) даетъ

$$a_1 = \frac{K_C}{Ma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Перевернемъ маятникъ въ положеніе, изображенное на рис. 120; теперь ось вращенія Z, центръ тяжести C и $CZ = a_1$. Центръ качанія y находится на неизвѣстномъ разстояніи $Zy = x$; мы должны доказать, что $x = l$. Величину x мы получаемъ изъ (39), замѣняя a черезъ a_1:

$$x = a_1 + \frac{K_C}{Ma_1}.$$

Вставимъ сюда a_1 изъ (40); получаемъ

$$x = \frac{K_C}{Ma} + \frac{K_C Ma}{MK_C} = \frac{K_C}{Ma} + a,$$

или, см. (39), $x = l$, что и требовалось доказать.

Такъ какъ время качанія физическаго маятника равно времени качанія маятника математическаго, длина l котораго опредѣляется формулою (38), то мы находимъ, на основаніи (31), для времени T качанія физическаго маятника при весьма малыхъ размахахъ

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

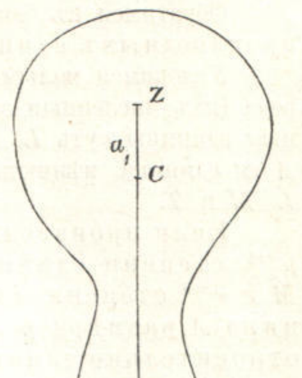


Рис. 120.

гдѣ вмѣсто Mg введенъ вѣсъ P маятника.

Выраженіе (32) даетъ намъ соотвѣтствующую точную формулу, а (33) приближенную

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Когда маятникъ качается въ воздухѣ или происходитъ треніе около его оси, то онъ совершаетъ затухающія колебательныя движенія, разсмотрѣнныя на стр. 136. Натуральный логариѳмъ отношенія двухъ послѣдовательныхъ размаховъ даетъ намъ логариѳмическій декрементъ качаній маятника, см. (78) стр. 138. Постепенное уменьшеніе угла α повлечетъ за собою и постепенное уменьшеніе времени колебанія, какъ видно изъ (42), гдѣ второй членъ въ скобкахъ всегда положительный. Это уменьшеніе времени колебанія, однако, весьма мало, когда начальный уголъ α не великъ и оно происходитъ весьма медленно, когда сопротивленіе воздуха и треніе малы, т.-е. логариѳмическій декрементъ малая величина.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Размѣръ физическихъ величинъ

§ 1. Опредѣленіе термина „размѣръ". Въ предыдущихъ главахъ этого отдѣла мы познакомились съ такъ называемыми абсолютными единицами нѣкоторыхъ физическихъ величинъ, о которыхъ упоминается въ механикѣ. Мы видѣли, что «система единицъ» строится на трехъ основныхъ единицахъ, за каковыя мы условились принимать единицы длины, массы и

времени. Принимая коеффиціенты пропорціональности въ формулахъ, связывающихъ величины, для которыхъ единицы уже выбраны, съ одною новою величиною, равными единицѣ, мы получали единицу этой новой величины и такимъ образомъ послѣдовательно строили систему абсолютныхъ производныхъ единицъ. Смотря по выбору трехъ основныхъ единицъ длины, массы и времени, можно построить безконечное множество системъ единицъ производныхъ, между которыми мы обратили особое вниманіе на систему *C. G. S.*, основанную на единицахъ: сантиметръ, граммъ и секунда и заключающей въ себѣ между прочимъ динъ и эргъ какъ единицы силы и работы.

Обратимся къ ближайшему разсмотрѣнію вопроса о зависимости производныхъ единицъ отъ единицъ основныхъ.

Условимся малыми латинскими буквами обозначать величины разнаго рода (ихъ численныя значенія), а большими буквами ихъ единицы. Основныя единицы суть L, M и T. Пусть a какая либо физическая величина, A ея единица, мѣняющаяся вмѣстѣ съ измѣненіемъ основныхъ единицъ L, M и T.

Если производная единица A мѣняется пропорціонально p-той степени единицы длины L, q-той степени единицы массы M и r-той степени единицы времени T, то говорятъ, что единица A размѣра p относительно единицы длины, размѣра q относительно единицы массы и размѣра r относительно единицы времени. Впрочемъ, для краткости весьма часто говорятъ о размѣрѣ самой физической величины, напр. о размѣрѣ работы, о размѣрѣ количества движенія и т. под., вмѣсто того, чтобы говорить о размѣрѣ единицъ этихъ величинъ.

Указанную зависимость производной единицы отъ основныхъ выражаютъ символически формулою

$$[A] = L^p M^q T^r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

которою мы и будемъ пользоваться. Иногда пишутъ

$$\mathrm{Dim} A = L^p M^q T^r,$$

гдѣ Dim. сокращеніе отъ Dimension (размѣръ). Иногда вмѣсто большихъ буквъ пишутъ и маленькія

$$[a] = l^p m^q t^r \text{ или } \mathrm{Dim} a = l^p m^q t^r.$$

Показатели p, q и r могутъ быть цѣлые и дробные, положительные и отрицательные. Такъ напр. символическая формула

$$[A] = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}}}{T^2} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}} T^{-2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

обозначаетъ, что производная единица A нѣкоторой физической величины a

мѣняется пропорціонально корню квадратному основной единицы длины L, пропорціонально степени $\frac{3}{2}$ единицы массы и обратно пропорціонально квадрату единицы времени. Если мы напр. сперва имѣли дѣло съ $C.G.S.$ единицами, а потомъ пожелали принять за основныя единицы метръ, сантиграммъ и минуту, то производная единица во-первыхъ увеличится въ 10 разъ ($\sqrt{100}$), во-вторыхъ уменьшится въ 1000 разъ ($\sqrt{100^3}$) и въ третьихъ уменьшится въ 3600 разъ (60^2), т.-е. всего уменьшится въ 360000 разъ.

Если производная единица A вовсе не зависитъ отъ которой нибудь изъ основныхъ единицъ, то мы говоримъ, что единица A нулевого размѣра относительно этой основной единицы.

Символическія равенства, подобныя (1), называются формулами размѣра соотвѣтствующихъ физическихъ величинъ.

Въ тѣсной связи съ вышеуказаннымъ способомъ символическаго обозначенія зависимости производной единицы отъ единицъ основныхъ находится особаго рода способъ писать численныя значенія самихъ величинъ. Положимъ, что нѣкоторая величина a содержитъ въ себѣ n единицъ, напр. 7. Еслибы мы просто написали $a = 7$, то осталось бы неяснымъ, какихъ единицъ содержится 7 въ величинѣ a, которую можно измѣрять безчисленнымъ множествомъ различныхъ абсолютныхъ единицъ. Такъ какъ производная единица вполнѣ опредѣляется основными единицами, то неясность исчезнетъ, если мы, рядомъ съ численнымъ значеніемъ величины, хотя бы въ скобкахъ, напишемъ названія тѣхъ трехъ основныхъ единицъ, на которыхъ основана принятая нами система единицъ. Напр. выраженіе

$$a = 7 \text{ (футъ, килогр., мин.)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ясно говоритъ, что въ величинѣ a содержатся 7 такихъ ея единицъ, которыя вытекаютъ изъ основныхъ единицъ длины, массы и времени, указанныхъ въ скобкахъ. Если напр. нѣкоторая работа $r = 10$ (сант., граммъ, сек.) единицамъ, то это проще значитъ, что $r = 10$ эргамъ.

Оказывается однако въ высшей степени удобнымъ писать названія основныхъ единицъ не просто рядомъ въ скобкахъ, но въ томъ порядкѣ и съ тѣми показателями, съ которыми эти единицы входятъ въ формулу размѣра единицы той величины, численное значеніе которой мы желаемъ написать. Полагая напр. что формула размѣра единицы A имѣетъ видъ (2), мы вмѣсто (3) напишемъ

$$a = 7 \, \frac{(\text{футъ})^{\frac{1}{2}} (\text{килогр.})^{\frac{3}{2}}}{(\text{мин.})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Такой способъ писанія очень удобенъ; мы не только видимъ, на какихъ основныхъ единицахъ была построена принятая нами система, но притомъ еще отмѣчаемъ, какъ зависитъ единица величины a отъ единицъ основныхъ. Главная выгода такого метода писанія выяснится ниже въ § 3.

§ 2. Опредѣленіе размѣра единицъ различныхъ величинъ. При выводѣ формулъ размѣра мы воспользуемся слѣдующею простою теоремою:

Если численное значеніе a одной величины равно произведенію или частному численныхъ значеній b и c двухъ другихъ величинъ. т.-е. если

$$\left.\begin{array}{l} a = bc \\ \text{или} \quad a = \dfrac{b}{c} \end{array}\right\} \quad (5)$$

и если формулы размѣра единицъ B и C величинъ b и c суть

$$\left.\begin{array}{l} [B] = M^p L^q T^r \\ [C] = M^x L^y T^z \end{array}\right\} \quad (6)$$

то формула размѣра единицы A величины a будетъ

$$\left.\begin{array}{l} [A] = M^{p+x} L^{q+y} T^{r+z} \\ \text{или} \quad [A] = M^{p-x} L^{q-y} T^{r-z} \end{array}\right\} \quad (7)$$

т.-е. символическая формула размѣра величины A составляется изъ символическихъ формулъ размѣровъ величинъ B и C такъ, какъ составляется произведеніе или частное двухъ одночленовъ, выражающихъ размѣры единицъ B и C.

Доказательство: если $a = bc$ или $a = \frac{b}{c}$, то $a = 1$, когда $b = 1$ и $c = 1$; отсюда ясно, что единица A пропорціональна B и прямо или обратно пропорціональна C. Но B мѣняется пропорціонально p-той степени отъ основной единицы M, а C пропорціонально x-той степени той же единицы M. Отсюда ясно, что при $a = bc$ единица A мѣняется пропорціонально $(p + x)$-той, при $a = \frac{b}{c}$ — пропорціонально $(p - x)$-той степени единицы M, что и выражено символически формулами (7).

Доказанная теорема, очевидно, обобщается для произвольнаго случая $a = b^n c^m$. Символически будемъ имѣть

$$[A] = [B]^n [C]^m \quad (7,a)$$

Теперь легко составить формулы размѣра для различныхъ единицъ.

Единица S поверхности пропорціональна квадрату, единица O объема — кубу единицы длины. Отсюда слѣдуетъ

$$\left.\begin{array}{l} [S] = L^2 \\ [O] = L^3 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Обѣ единицы нулевого размѣра относительно M и T.

Уголъ измѣряется отношеніемъ дуги σ къ радіусу ρ; его единица (уголъ, для котораго $\sigma = \rho$, т.-е. уголъ въ $57^0 17' 44{,}8''$, стр. 36) вовсе не зависитъ

отъ выбора основныхъ единицъ. Уголъ нулевого размѣра относительно M, L и T.

Скорость v измѣряется отношеніемъ пути къ времени; отсюда уже слѣдуетъ, на основаніи (7), что

$$[V]=\frac{L}{T}=LT^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Ясно, что единица скорости (та, при которой въ единицу времени проходится единица длины) должна быть пропорціональна единицѣ длины и обратно пропорціональна единицѣ времени. Соотвѣтственно (4) пишемъ, напр.

$$v=3\,\frac{\text{саж.}}{\text{мин.}} \text{ или } v=15\,\frac{\text{сант.}}{\text{сек.}} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Ускореніе w тангенціальное и нормальное. И то, и другое выражается отношеніемъ скорости къ времени, а потому размѣръ единицы ускоренія

$$[W]=\frac{[V]}{T}=\frac{L}{T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Для нормальнаго ускоренія мы имѣли еще выраженіе $w=\frac{v^2}{R}$ (стр. 58), гдѣ R линейная величина. Это даетъ

$$[W]=\frac{[V]^2}{L}=\frac{L^2}{T^2}\cdot\frac{1}{L}=\frac{L}{T^2} \quad \ldots \ldots \quad (11,a)$$

согласно съ (11). Мы находимъ, что абсолютная единица ускоренія пропорціональна единицѣ длины и обратно пропорціональна квадрату единицы времени. Не трудно сообразить, что дѣйствительно напр. (метръ, сек.)-единица ускоренія въ 3600 разъ больше (метръ, мин.)-единицы ускоренія. Первая единица соотвѣтствуетъ движенію, при которомъ въ 1 сек. скорость увеличивается на «метръ въ секунду»; вторая — когда въ 1 мин. скорость увеличивается только на «метръ въ минуту». Численныя значенія различныхъ ускореній напишутся напр. такъ:

$$w=4\,\frac{\text{сажень}}{(\text{часъ})^2};\quad w=16\,\frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Второе ускореніе выражено въ $C.G.S.$ единицахъ. Для g имѣемъ

$$g=981\,\frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Сила $f=mw$. Отсюда размѣръ единицы силы

$$[F]=M[W]=\frac{ML}{T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Понятно, какое значеніе имѣютъ равенства

$$\left.\begin{array}{r} f = 8\,\dfrac{\text{фунтъ. метръ}}{(\text{мин.})^2} \\ f = 75\,\dfrac{\text{грамм. сант.}}{(\text{сек.})^2} = 75\ \text{динамъ.} \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (15)$$

Здѣсь будетъ умѣстнымъ вставить два весьма важныхъ замѣчанія.

I. Слѣдуетъ до крайности остерегаться смотрѣть на символы, стоящіе въ выраженіяхъ, подобныхъ (10), (12) и (15), какъ на дѣйствительныя величины, состоящія изъ множителей и дѣлителей. Это большая, но къ сожалѣнію весьма распространенная ошибка. То, что написано рядомъ съ численнымъ значеніемъ величины, представляетъ именно символъ и ничего больше, символъ, долженствующій замѣнить названіе единицы, какъ это особенно наглядно видно изъ второго примѣра (15).

II. Всѣ члены равенства, т.-е. всѣ величины, которыя связаны знаками сложенія, вычитанія и равенства, должны быть одного размѣра. Дѣйствительно, только однородныя величины могутъ быть сравниваемы между собою, а таковыя, понятно, должны быть одинаковаго размѣра. Въ этомъ заключается удобное орудіе провѣрки формулъ.

Приведемъ примѣръ. Для времени t колебанія маятника мы имѣли формулу $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Обѣ стороны должны быть одного размѣра; лѣвая сторона имѣетъ размѣръ T; съ правой стороны размѣръ l есть L, размѣръ g есть $\frac{L}{T^2}$, см. (11); π, какъ абсолютное число, нулевого размѣра.

Вся правая сторона размѣра

$$\sqrt{\frac{L}{L/T^2}} = \sqrt{T^2} = T,$$

т.-е. такого же, какъ и лѣвая.

Если двѣ величины a и b, различныя по первоначальному опредѣленію, на основаніи какихъ-либо выводовъ оказываются численно равными, если ту и другую измѣрять въ абсолютныхъ единицахъ, такъ что $a = b$, то размѣры этихъ величинъ должны быть равны, т.-е. зависимость ихъ единицъ A и B отъ основныхъ единицъ L, M и T должна быть одинаковая. Равенство $a = b$ должно оставаться вѣрнымъ, какими бы абсолютными единицами A и B мы ихъ ни измѣряли, т.-е. каковы бы ни были основныя единицы L, M и T. Еслибы размѣры единицъ A и B не были равны, то они съ измѣненіемъ L, M и T мѣнялись бы неодинаково, а потому и численныя значенія a и b перестали бы быть равными. На основаніи формулъ (20) стр. 74 и (9) стр. 97 мы должны слѣд. ожидать, что импульсъ силы и количество движенія, живая сила и работа окажутся одинаковыхъ размѣровъ.

Равенство размѣровъ величинъ $\frac{v}{t}$ и $\frac{v^2}{l}$, которыми въ различныхъ слу-

чаяхъ выражается одна и та же величина, а именно ускореніе, см. (11) и (11,*a*), подтверждаетъ сказанное.

Продолжаемъ выводъ размѣровъ различныхъ величинъ.

Работа $r = fs$, гдѣ f есть сила и s — путь; слѣд. размѣръ единицы работы

$$[R] = [F]L = \frac{ML^2}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Понятно, что обозначаетъ

$$r = 2\,\frac{\text{килогр. (аршинъ)}^2}{(\text{часъ})^2}$$

или

$$r = 8\,\frac{\text{граммъ. (сант.)}^2}{(\text{сек.})^2} = 8 \text{ эргамъ.}$$

Живая сила $i = \frac{1}{2}mv^2$; размѣръ ея единицы J

$$[J] = M[V]^2 = \frac{ML^2}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16,a)$$

т.-е. онъ равенъ размѣру работы, какъ мы только-что и предвидѣли. Такого же размѣра и всякая другая форма энергіи, напр. теплота q:

$$[Q] = \frac{ML^2}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16,b)$$

Импульсъ силы $u = ft$, а потому

$$[U] = [F]T = \frac{ML}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Количество движенія $h = mv$; слѣд.

$$[H] = M[V] = \frac{ML}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17,a)$$

одинаково съ (17), какъ мы и ожидали.

Моментъ пары силъ $m' = fl$, гдѣ l плечо пары; очевидно

$$[M'] = \frac{ML^2}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Размѣръ тотъ же, какъ и размѣръ работы. Такъ и должно быть на основаніи (8) стр. 93, ибо уголъ нулевого размѣра.

Плотность $d = \frac{m}{o}$, гдѣ o объемъ; слѣд.

$$[D] = \frac{M}{L^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Угловая скорость $\varphi = \frac{\alpha}{t}$, гдѣ α уголъ поворота тѣла; отсюда

$$[\Phi] = \frac{1}{T} = T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Угловое ускореніе $\psi = \frac{\varphi}{t}$, слѣд.

$$[\Psi] = \frac{1}{T^2} = T^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Моментъ инерціи $k = ml^2$; слѣд.

$$[K] = ML^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Время каченія физическаго маятника равно $t = \pi \sqrt{\frac{k}{Pa}}$; размѣръ k только что найденъ. P есть сила, см. (14), a есть длина. Размѣръ правой стороны

$$\sqrt{\frac{ML^2}{\frac{ML}{T^2} \cdot L}} = T,$$

какъ и должно быть.

Если законъ всемірнаго тяготѣнія написать въ видѣ

$$f = C\frac{mm'}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

и силу f измѣрять въ абсолютныхъ единицахъ, то численное значеніе коеффиціента C будетъ зависѣть отъ основныхъ единицъ, а потому можно говорить о размѣрѣ величины C.

Формула (23) даетъ

$$[F] = [C]\frac{M^2}{L^2};$$

14) даетъ

$$[C] = \frac{L^3}{MT^2} = M^{-1}L^3T^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Если же писать законъ Ньютона, полагая $C = 1$, то сила, которую теперь для отличія обозначимъ черезъ f', будетъ равна

$$f' = \frac{mm'}{r^2}.$$

Астрономическая единица силы F' размѣра

$$[F'] = \frac{M^2}{L^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Принимая для работы r' выраженіе $f's$, гдѣ s линейная величина, получаемъ для размѣра астрономической единицы R'

$$[R'] = \frac{M^2}{L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Какъ и слѣдуетъ, потенціалъ двухъ массъ другъ на друга $\frac{mm'}{r}$ того же самаго размѣра, см. (9,a) и (10) стр. 197.

§ 3. Переходъ отъ одной системы единицъ къ другой. Задача о переходѣ отъ одной системы къ другой заключается въ слѣдующемъ: имѣется нѣкоторая физическая величина, которую мы символически обозначимъ буквою a и пусть n ея численное значеніе, когда она измѣрена абсолютною единицею, построенною на основныхъ единицахъ λ, μ, τ; требуется найти численное значеніе n_1 той же величины a, измѣренной абсолютной единицей, которая построена на другихъ основныхъ единицахъ λ_1, μ_1, τ_1. Дана зависимость между старыми и новыми основными единицами и пусть $\lambda = x\lambda_1$, $\mu = y\mu_1$, $\tau = z\tau_1$; далѣе извѣстенъ размѣръ единицы A величины a; пусть

$$[A] = L^p M^q T^r \quad \dots\dots\dots\dots \quad (27)$$

Для рѣшенія этой задачи, т. е. для опредѣленія величины n_1, должно пользоваться слѣдующими тремя манипуляціями:

1. Написать величину a по извѣстной схемѣ, см. (4), съ символомъ, составленнымъ изъ старыхъ основныхъ единицъ, см. (27):

$$a = n.\lambda^p \mu^q \tau^r \quad \dots\dots\dots\dots \quad (28)$$

2. Въ символахъ старыя основныя единицы выразить въ новыхъ:

$$a = n.(x\lambda_1)^p (y\mu_1)^q (z\tau_1)^r \quad \dots\dots\dots\dots \quad (29)$$

3. Временно смотрѣть на символъ не какъ на символъ, но какъ на сочетаніе множителей и вынести изъ него коэффиціенты, связывающіе старыя основныя единицы съ новыми:

$$a = n\, x^p y^q z^r . \lambda_1{}^p \mu_1{}^q \tau_1{}^r \quad \dots\dots\dots\dots \quad (30)$$

Рѣшеніе задачи этимъ кончено, ибо искомое новое численное значеніе n_1 и есть

$$n_1 = n\, x^p y^q z^r \quad \dots\dots\dots\dots \quad (31)$$

Рядомъ стоящее $\lambda_1{}^p \mu_1{}^q \tau_1{}^r$ опять только символъ абсолютной единицы величины a въ новой системѣ.

Такой странный способъ, повидимому противорѣчащій тому, что на стр. 224 I было сказано о символѣ, можетъ быть допущенъ, если мы докажемъ разъ навсегда, что онъ ведетъ къ вѣрному результату. Для этого вполнѣ достаточно показать, что отъ замѣны единицы длины λ новою единицей λ_1 численное значеніе n увеличивается въ x^p разъ (гдѣ p можетъ быть и отрицательное). Мы положили $\lambda = x\lambda_1$, слѣд. мы уменьшили единицу длины въ x разъ; (27) показываетъ, что вслѣдствіе этого единица A величины a уменьшается въ x^p разъ; отсюда ясно, что численное значеніе величины a увеличилось въ x^p разъ. Итакъ формула (31), полученная путемъ примѣненія вышеуказанныхъ трехъ манипуляцій, несомнѣнно вѣрна.

15*

Примѣръ: Нѣкоторая работа r имѣетъ въ системѣ (пудъ, сажень, минута) численное значеніе 100; какое будетъ ея численное значеніе въ системѣ (фунтъ, аршинъ, секунда)? Имѣемъ формулу размѣра, см. (16)

$$[R] = \frac{ML^2}{T^2}$$

Производимъ три манипуляціи, указанные выше:

1. $$r = 100\,\frac{\text{пудъ.(сажень)}^2}{(\text{мин.})^2}$$

2. $$r = 100\,\frac{(40\ \text{фунт.}).(3\ \text{аршин.})^2}{(60\ \text{сек.})^2}$$

3. $$r = \frac{100.40.9}{3600}\,\frac{(\text{фунтъ}).(\text{аршинъ})^2}{(\text{сек.})^2}$$

или, сокративъ,

$$r = 10\,\frac{\text{фунтъ. (аршинъ)}^2}{(\text{сек.})^2}.$$

Искомое новое численное значеніе работы будетъ 10. На дѣлѣ нѣтъ надобности такъ строго отдѣлять другъ отъ друга три манипуляціи. Рѣшимъ еще нѣсколько задачъ.

I. Найти численное значеніе ускоренія g силы тяжести въ системѣ футъ, фунтъ, минута), полагая сантиметръ $= 0{,}0328$ фута.

$$g = 980\,\frac{\text{сант.}}{(\text{сек.})^2} = 980\,\frac{0.0328\ \text{фута}}{\left(\frac{1}{60}\ \text{мин.}\right)^2} = 980 \times 0{,}0328 \times 3600\,\frac{\text{футъ}}{(\text{мин.})^2},$$

или

$$g = 115718\,\frac{\text{футъ}}{(\text{мин.})^2}.$$

II. Сколько $C.\ G.\ S.$ единицъ ускоренія, силы и работы содержатся въ соотвѣтствующихъ Гауссовыхъ единицахъ, въ которыхъ основныя единицы суть миллиметръ, миллиграммъ и секунда?

$$\text{Гаусс. ед. ускоренія} = 1\,\frac{\text{миллим}}{(\text{сек.})^2} = 1\,\frac{0{,}1\ \text{сант}}{(\text{сек.})^2} = 0{,}1\,\frac{\text{сант.}}{(\text{сек})^2} = 0{,}1\ C.\ G.\ S.\ \text{ед. ускоренія.}$$

$$\text{Гаусс. ед. силы} = 1\,\frac{\text{миллим. миллигр.}}{(\text{сек.})^2} = 1\,\frac{(0{,}1\,\text{сант.})(0{,}001\,\text{гр.})}{(\text{сек.})^2} = 0{,}0001\,\frac{\text{сант. граммъ}}{(\text{сек.})^2} = 0{,}0001\ \text{дина.}$$

$$\text{Гауссов. ед. работы} = 1\,\frac{\text{миллигр. (миллим.)}^2}{(\text{сек.})^2} = 1\,\frac{(0{,}001\ \text{гр.})\,(0{,}1\ \text{сант.})^2}{(\text{сек.})^2} = 0{,}00001\,\frac{\text{граммъ (сант.)}^2}{(\text{сек.})^2} = 0{,}00001\ \text{эрга.}$$

III. 2 (метръ, килограммъ, $\frac{1}{2}$ часа) единицъ работы выразить въ эргахъ.

$$2\,\frac{\text{килогр. (метръ)}^2}{\left(\frac{1}{2}\ \text{часа}\right)^2} = 2\,\frac{(1000\ \text{гр.})(100\ \text{сант.})^2}{(1800\ \text{сек.})^2} = \frac{2.1000\,(100)^2}{(1800)^2}\,\frac{\text{граммъ (сант.)}^2}{(\text{сек.})^2} = 6{,}17\,\frac{\text{граммъ (сант.)}^2}{(\text{сек.})^2} = 6{,}17\ \text{эрга.}$$

IV. Найти плотность ртути въ системѣ (метръ, килограммъ, годъ). За плотность ртути примемъ число 13.6; это ея значеніе въ *C. G. S.* системѣ (стр. 78), см. (19),

$$13{,}6\,\frac{\text{граммъ.}}{(\text{сант.})^3}=13{,}6\,\frac{0{,}001\ \text{килогр.}}{(0{,}01\ \text{метр.})^3}=\frac{13{,}6.\,0{,}001}{(0{,}01)^3}\,\frac{\text{килогр.}}{(\text{метръ})^3}=13600\,\frac{\text{килогр.}}{(\text{метръ})^3}.$$

V. Найти живую силу въ *C. G. S.* единицахъ тѣла, масса котораго равна 5-ти золотникамъ и которое движется со скоростью 2-хъ сажень въ 7 минутъ (золотникъ = 4.266 грамма, сажень = 213,36 сантим.).

Если принять за основныя единицы 2 сажени, 5 золотниковъ и 7 минутъ, то живая сила даннаго тѣла будетъ имѣть численное значеніе $\frac{1}{2}$ (стр. 89), см. (16,*a*).

$$\frac{1}{2}\,\frac{(5\ \text{золотн.})(2\ \text{саж.})^2}{(7\ \text{мин.})^2}=\frac{1}{2}\,\frac{(5.4{,}266\ \text{грамм.})(2.213{,}36\ \text{сант.})^2}{(7.60\ \text{сек.})^2}=$$
$$=\frac{5.4{,}266.4.(213{,}36)^2}{2.49.3600}\,\frac{\text{граммъ (сант.)}^2}{(\text{сек.})^2}=11{,}04\ \text{эрга}.$$

VI. Мегадинъ имѣетъ численное значеніе 100 въ системѣ (дюймъ, фунтъ, x сек.). Найти единицу времени въ этой системѣ, принимая дюймъ = 2,5 сантим. и фунтъ = 410 гр. Мегадинъ равенъ 10^6 динамъ, слѣд. по заданію имѣемъ

$$10^6\,\frac{\text{сант. граммъ}}{(\text{сек.})^2}=100\,\frac{\text{дюймъ. фунтъ}}{(x\ \text{сек.})^2}=100\,\frac{(2{,}5\ \text{сант.})\ (410\ \text{грамм.})}{(x\ \text{сек.})^2}=$$
$$=\frac{100.2{,}5.410}{x^2}\,\frac{\text{сант. граммъ}}{(\text{сек.})^2}.$$

Первое и послѣднее выраженіе даютъ

$$10^6=\frac{100.2{,}5.410}{x^2};$$

отсюда $x = 0{,}32$; искомая единица времени равна 0,32 сек.

§ 4. Абсолютныя системы единицъ, построенныя не на основныхъ единицахъ *L*, *M* и *T*. Указавъ, что систему абсолютныхъ единицъ можно построить на трехъ произвольно выбранныхъ основныхъ единицахъ, мы за таковыя постоянно принимали единицы длины (*L*), массы (*M*) и времени (*T*). Но можно было бы и единицы другихъ трехъ величинъ принять за основныя. Мы разсмотримъ вкратцѣ этотъ вопросъ, тѣмъ болѣе, что въ послѣднее время неоднократно стали пользоваться различными системами единицъ, не построенными на единицахъ *L*, *M* и *T*.

Выборъ трехъ основныхъ единицъ не можетъ быть сдѣланъ вполнѣ произвольно; эти три единицы должны быть независимы другъ отъ друга, т.-е. одна изъ нихъ не должна опредѣляться двумя другими на основаніи какой-либо изъ формулъ, въ которыхъ коеффиціентъ

пропорціональности приравнивается единицѣ, когда строится система единицъ. Такъ напр. единица массы, ускоренія и силы, или длины, силы и работы, или времени, скорости и ускоренія и т. д. не могутъ быть приняты за основныя, ибо во всѣхъ этихъ примѣрахъ одна изъ единицъ (проще всего третья) опредѣляется двумя остальными. Когда выбраны три основныя единицы, то прежде всего слѣдуетъ опредѣлить размѣры единицъ длины, массы и времени, которыя теперь уже являются единицами производными, а затѣмъ уже размѣры остальныхъ единицъ легко опредѣлятся на основаніи формулъ § 2-го.

Припоминая тѣ пропорціональности, которыя выражаются формулами размѣровъ, легко сообразить, что для выполненія только-что сказаннаго слѣдуетъ рѣшать эти формулы, какъ простыя уравненія. Это будетъ еще болѣе понятно на примѣрѣ.

З а основныя единицы приняты единицы скорости V, ускоренія W и силы F. Требуется найти размѣры другихъ единицъ. Мы имѣли формулы

$$[V]=LT^{-1};\ [W]=LT^{-2};\ [F]=MLT^{-2}.$$

Теперь V, W и F основныя, L, M и T производныя единицы, а потому тѣ-же пропорціональности, которыя существуютъ между этими шестью величинами дадутъ намъ теперь

$$[L][T]^{-1}=W;[L][T]^{-2}=W;[M][L][T]^{-2}=F.$$

Рѣшая эти равенства, какъ уравненія, относительно $[L]$, $[M]$ и $[T]$, получаемъ

$$\left.\begin{array}{l}[L]=V^2W^{-1}\\ [M]=FW^{-1}\\ [T]=VW^{-1}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Далѣе получаемъ для размѣровъ единицъ

работы . . . . $[R]=V^2FW^{-1}$
поверхности . . . . $[S]=V^4W^{-2}$
объема . . . . $[O]=V^6W^{-3}$
углового ускоренія . . . . $[\Psi]=V^{-2}W^2$
количества движенія . . . . . $[H]$
импульса силы . . . . $[U]$ $\Big\} =VFW^{-1}$
плотности . . . . $[D]=FV^{-6}W^2$
момента инерціи. . . . . . . $[K]=FV^4W^{-4}$.

Предоставимъ читателю провѣрить нижеслѣдующія формулы и вывести

недостающія: за основныя единицы приняты единицы силы F, работы R и плотности D. Получается

$$[L] = RF^{-1}$$
$$[M] = DR^3F^{-3}$$
$$[T] = D^{\frac{1}{2}}R^2F^{-\frac{5}{2}}$$
$$[W] = D^{-1}R^{-3}F^4$$
$$[H] = D^{\frac{1}{2}}R^2F^{-\frac{3}{2}}$$

и т. д.

ЛИТЕРАТУРА.

Механика составляетъ особый предметъ преподаванія въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, распадаясь на механику теоретическую и механику практическую, съ ихъ многоразличными подраздѣленіями. Здѣсь не мѣсто указывать на литературу этихъ самостоятельныхъ и обширныхъ наукъ. Изъ сочиненій, посвященныхъ спеціально элементарной механикѣ, примѣрно въ томъ объемѣ, въ которомъ она должна входить въ курсъ физики, можно указать слѣдующія:

П. П. Фанъ-деръ-Флитъ. Введеніе въ механику. Спб. 1886.

Н. Шиллеръ. Основанія физики. Ч. I. Кіевъ, 1884.

Н. Азбелевъ. Начала механики. Спб. 1892.

О. Хвольсонъ. Ученіе о движеніи и о силахъ. Спб. 1893.

W. Voigt. Elementare Mechanik. Leipzig, 1889.

J. G. Macgregor. Elementary treatise on kinematics and dynamics. London, 1887.

Antomari. Cours de mécanique, 1895.

H. Klein. Die Principien der Mechanik. Leipzig, 1872.

H. Streintz. Die physicalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig, 1883.

Cl. Maxwell. Matter and Motion (въ русскомъ переводѣ «Матерія и движеніе»).

Mach. Die Mechanik. Leipzig, 1889.

Къ главѣ III (работа и энергія).

Въ ученіи о теплотѣ будетъ приведена литература по вопросу о теплотѣ, какъ о формѣ энергіи. Здѣсь указана литература, относящаяся вообще къ ученію объ энергіи.

Rob. Mayer. Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. Ann. d. Chemie & Pharm. 1842, Bd. 42, p. 233; перепечатано въ его «Mechanik der Wärme».

H. Helmholtz. Die Erhaltung der Kraft. Berl. 1847. Wiss. Abhandl. I, p. 12; Ostwald's Klassiker. № 1.

M. Planck. Erhaltung der Energie. Leipzig, 1887.

B. Stewart. Conservation of Energy. Нѣмецкій переводъ: Erhaltung der Energie. Leipzig, 1875.

Januschke. Erhaltung der Energie. Troppau. 1884.

Г. Кребсъ. Сохраненіе энергіи (перев. съ нѣмецкаго). Кіевъ. 1880.

R. Colson. L'énergie et ses transformations. Paris, 1889.

M. Zwerger. Die lebendige Kraft und ihr Maass. München. 1885.

G. Helm. Die Lehre von der Energie. Leipzig, 1887.

E. Mach. Die Geschichte des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag, 1872.

A. Секки. Единство физическихъ силъ (перев. съ итальян.). Спб., 1872.

Къ главѣ IV (гармоническое колебательное движеніе).

Статьи, въ которыхъ разсматриваются свойства гармоническихъ колебательныхъ движеній и образованіе и распространеніе лучей, помѣщены въ книгахъ, посвященныхъ ученіямъ о звукѣ и о свѣтѣ.

Интерференція колебаній и лучей:

Thomas Joung. Philosoph. Transactions. 1802, p. 12 и p. 393. (On the theory of light and colours).

Fresnel. Oeuvres compl. I, p. 32, 51 и др.

Принципъ Гюйгенса:

Huygens. Traité de la lumière. Leyden. 1690. Ostwald's Classiker. № 20.

Fresnel. Oeuvres. I, p. 365.

Принципъ Допплера:

Doppler. Ueber das farbige Licht der Doppelsterne. Prag. 1842.

Дальнѣйшая литература въ Т. III.

Къ главѣ IX (размѣръ физич. величинъ и ученіе объ единицахъ).

D. Everett. Units and physical constants. London. 1879.

D. Everett'a Единицы и физ. постоянныя (перев.). Спб. 1888.

O. Хвольсонъ. Объ абсолютныхъ единицахъ. Спб. 1887.

Schoentjes. Les grandeurs électriques et leurs unités. Paris. 1884.

H. Herwig. Physicalische Begriffe und absolute Maasse. Leipzig. 1880.

Blavier. Les grandeurs électriques. Paris. 1881.

Serpieri. (Перев. съ итальянск.). Die absoluten Maasse. Leipzig. 1885.

A. Czógler. Dimensionen und absolute Maasse. Leipzig. 1889.

O. Хвольсонъ. О метрической системѣ мѣръ и вѣсовъ. Спб. 1884.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

НѢКОТОРЫЕ ИЗМѢРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И СПОСОБЫ ИЗМѢРЕНІЯ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Общія замѣчанія о производствѣ физическихъ измѣреній.

§ 1. **Измѣренія абсолютныя и относительныя.** Мы видѣли (стр. 3), что наблюденіе и опытъ даютъ намъ возможность расширить наши познанія о происходящихъ въ природѣ явленіяхъ; они ведутъ къ открытію новыхъ явленій, къ подробному ихъ изученію и къ выясненію закономѣрныхъ связей, господствующихъ между ними. Задача, для разрѣшенія которой мы производимъ наблюденіе или опытъ, такимъ образомъ двоякая: она можетъ касаться или качественной, или количественной стороны явленія. Чисто качественныя наблюденія и опыты производятся однако сравнительно весьма рѣдко и почти всегда къ нимъ болѣе или менѣе тѣсно присоединяется изслѣдованіе количественное, имѣющее напр. цѣлью выяснить ближайшія условія, при которыхъ возникаетъ или обнаруживается замѣченная качественная сторона явленія, или тѣ данныя, которыми эта качественная сторона точнѣе опредѣляется. Закономѣрныя связи, какъ было разъяснено въ § 7, стр. 16, открываются изученіемъ количественной стороны явленій, путемъ измѣренія разнаго рода величинъ, играющихъ роль въ условіяхъ возникновенія или въ ближайшей характеристикѣ разныхъ сторонъ явленія.

Измѣренія различныхъ величинъ играютъ, такимъ образомъ, наиболѣе выдающуюся роль при физическихъ изысканіяхъ и способамъ этихъ измѣреній посвящены многочисленныя спеціальныя сочиненія, къ которымъ и слѣдуетъ обратиться лицамъ, впервые приступающимъ къ точнымъ физическимъ измѣреніямъ, требующимъ не только знанія, но и умѣнья. По-

слѣднее пріобрѣтается только во время самого производства измѣренія, и никакія книги не могутъ содержать въ себѣ указанія на всѣ тѣ обстоятельства, которыя долженъ имѣть въ виду производящій измѣреніе.

Добросовѣстность, терпѣніе и трудолюбіе—вотъ девизъ всякаго, производящаго физическія измѣренія, которое должно быть произведено кромѣ того съ величайшею осторожностью въ томъ широкомъ значеніи слова, которое, можетъ быть, точнѣе опредѣляется терминомъ осмотрительность. Не только требуется осторожность обыкновенная, безъ которой можно и приборъ испортить и въ нѣкоторыхъ случаяхъ себѣ или другимъ вредъ причинить; требуется и осмотрительность при выборѣ метода, при установкѣ приборовъ и, въ особенности, при попыткѣ вывести какое-либо заключеніе на основаніи добытыхъ результатовъ измѣреній.

Въ этомъ отдѣлѣ мы не можемъ входить въ тѣ подробности, которыя даются въ спеціальныхъ сочиненіяхъ, посвященныхъ физическимъ измѣреніямъ; мы ограничимся немногими общими указаніями основного характера, которыми должно руководиться, производя измѣренія; далѣе мы разсмотримъ важный вопросъ о вычисленіи результатовъ наблюденій. Затѣмъ мы познакомимся съ немногими вспомогательными приборами и съ нѣкоторыми изъ наиболѣе важныхъ методовъ измѣренія длины, угловъ, объемовъ, массъ, силъ и времени. Отдѣльно мы разберемъ методы опредѣленія ускоренія g силы тяжести и средней плотности земного шара.

На стр. 12 было сказано, что измѣрить физическую величину значитъ опредѣлить, сколько разъ въ ней содержится величина того же рода, выбранная за единицу.

Принято отличать измѣренія абсолютныя и относительныя. Измѣренія абсолютныя даютъ численное значеніе измѣряемой величины въ точно установленныхъ и намъ вполнѣ извѣстныхъ единицахъ, напр. длину въ метрахъ, силу въ динахъ или граммахъ, количество тепла въ калоріяхъ и т. д. Относительныя измѣренія бываютъ трехъ родовъ:

1. Для измѣряемой величины получается численное значеніе въ «произвольныхъ единицахъ», какъ принято говорить, т.-е. въ единицахъ, величина которыхъ зависитъ отъ случайныхъ качествъ прибора, служащаго для измѣреній, отъ его установки и т. д. и отношеніе которыхъ къ единицѣ общепринятой намъ почти неизвѣстно. Такого рода измѣренія могутъ дать вполнѣ точныя свѣдѣнія объ отношеніи двухъ совмѣстно измѣряемыхъ величинъ, объ относительномъ измѣненіи одной величины и т. д. Численное значеніе a, получаемое при такомъ измѣреніи величины, пропорціонально численному значенію b, которое дало бы измѣреніе абсолютное. Коэффиціентъ пропорціональности C въ формулѣ

$$b = Ca \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

называется коэффиціентомъ приведенія. Онъ, вообще, различенъ для различныхъ приборовъ одного и того же рода, вслѣдствіе ихъ неполной тожественности. Коэффиціентъ C въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ быть опредѣленъ путемъ послѣдовательнаго, или, если это возможно,

даже одновременнаго измѣренія какой либо величины двумя методами, изъ которыхъ одинъ даетъ ея численное значеніе b въ единицахъ опредѣленныхъ и извѣстныхъ, а другой ея же численное значеніе a въ единицахъ «произвольныхъ». Разъ коеффиціентъ приведенія C опредѣленъ на основаніи формулы (1), мы можемъ уже далѣе, пользуясь той же формулой, постоянно «приводить» результаты измѣреній, дающихъ числа a, къ «абсолютной» мѣрѣ b. Опредѣленіе коеффиціента C должно быть повторяемо отъ времени до времени, такъ какъ незамѣтныя измѣненія въ приборѣ въ его установкѣ или во внѣшнихъ вліяніяхъ могутъ имѣть слѣдствіемъ измѣнененіе той «произвольной» единицы, въ которой приборъ даетъ численное значеніе a. Дѣло особенно усложняется, когда эта единица зависитъ отъ внѣшнихъ причинъ, напр. отъ температуры.

2. Относительное измѣреніе сводится къ простому опредѣленію отношенія двухъ величинъ x и y, изъ которыхъ одну, напр. x, можно разсматривать какъ играющую роль «произвольной единицы». Если возможно произвести абсолютное измѣреніе величины x, и если мы увѣрены, что эта величина не измѣнилась въ промежутокъ времени между этимъ измѣреніемъ и ея сравненіемъ съ величиною y, то и для этой послѣдней получается мѣра абсолютная.

3. Къ разряду относительныхъ измѣреній можно причислить измѣренія вариаціонныя, при производствѣ которыхъ опредѣляется не сама величина, но лишь ея измѣненія въ зависимости отъ времени, температуры или другихъ факторовъ, отъ которыхъ она зависитъ. Если варіаціонныя измѣренія сопровождаются отъ времени до времени измѣреніями абсолютными, то и для всѣхъ промежуточныхъ моментовъ, когда были опредѣлены варіаціи величины, становится извѣстною ея абсолютная мѣра.

§ 2. Эталоны и измѣрительные приборы. Тѣло, для котораго одна изъ физическихъ величинъ, характеризующихъ его, извѣстна со всею достижимою точностью, называется эталономъ этой величины, если оно можетъ служить для ея сравненія съ другими величинами того же рода. Такъ напр. стержень, длина котораго въ метрахъ съ точностью извѣстна, или проволока, электрическое сопротивленіе которой въ единицахъ сопротивленія (омахъ) опредѣлено со всевозможною тщательностью, могутъ соотвѣтственно служить эталонами при измѣреніи длины или сопротивленія какого-либо другого тѣла. Обыкновенно стараются, чтобы «величина эталона» по возможности ближе подходила или къ единицѣ, или къ простому ея кратному или подраздѣленію. Такъ эталонъ длины обыкновенно имѣетъ длину, равную цѣлой единицѣ длины или ея кратному или простой ея части $\left(\text{напр. } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}\right)$; эталонъ сопротивленія обыкновенно обладаетъ сопротивленіемъ, равнымъ цѣлой единицѣ сопротивленія или простой ея части и т. д.

Для производства измѣреній служатъ особые инструменты, весьма разнообразные, смотря во-первыхъ по роду величины, для измѣренія которой они должны служить, во-вторыхъ по спеціальному методу измѣренія и, наконецъ, въ третьихъ по тѣмъ мастерскимъ, въ которыхъ они строятся

и которыя вводятъ въ нихъ различныя особенности, касающіяся деталей конструкціи, расположенія частей и т. д. Съ теченіемъ времени въ нихъ вводятся «улучшенія», не всегда впрочемъ заслуживающія этого названія.

Измѣрительные приборы естественно дѣлятся на группы, соотвѣтствующія различнымъ измѣряемымъ величинамъ.

Смотря по роду измѣренія, для котораго они назначены, отличаютъ и приборы «абсолютные», «относительные» и «variаціонные».

Относительно названій измѣрительныхъ приборовъ замѣтимъ, что многія оканчиваются однимъ изъ слоговъ «—скопъ», «—метръ» и «—графъ».

Инструменты, названія которыхъ оканчиваются слогомъ «—скопъ», строго говоря, могутъ и не быть отнесены къ измѣрительнымъ приборамъ, хотя они иногда играютъ важную роль при производствѣ измѣреній, особенно по «нулевому методу», о которомъ будетъ сказано ниже. Эти приборы не даютъ возможности непосредственно измѣрить какую либо величину; они только показываютъ, какого знака данная величина, а также равна или не равна эта величина нулю, точнѣе говоря, превышаетъ ли она нѣкоторое минимальное значеніе, которое еще обнаруживается «—скопомъ» (электроскопъ, гальваноскопъ). Сюда же относятся приборы, служащіе только для разсматриванія чего-либо; они или никакого отношенія къ измѣреніямъ не имѣютъ (микроскопъ, телескопъ, отдѣльно взятыя) или, какъ части, входятъ въ составъ измѣрительныхъ приборовъ.

Приборы «—метры» суть измѣрительные приборы, служащіе для болѣе или менѣе непосредственнаго опредѣленія числового значенія измѣряемой величины (электрометръ, барометръ, спектрометръ, гальванометръ, гигрометръ, калориметръ и т. д.).

Приборы, названія которыхъ оканчиваются слогомъ «—графъ», составляютъ особую группу «самопишущихъ» приборовъ, непрерывно или черезъ опредѣленные, бóльшею частью равные промежутки времени отмѣчающіе мѣру той или другой величины. Большинство этихъ приборовъ (но не всѣ) суть приборы варіаціонные: они отмѣчаютъ, насколько данная величина измѣнилась съ теченіемъ времени сравнительно съ ея значеніемъ въ нѣкоторый начальный моментъ (барографъ, магнетографъ, термографъ и т. д.). Но напр. анемографъ, непосредственно отмѣчающій азимутъ направленія и силу (скорость) вѣтра, очевидно уже не принадлежитъ къ приборамъ варіаціоннымъ.

§ 3. Манипуляціи при измѣреніяхъ. Всякое измѣреніе физической величины распадается на рядъ манипуляцій, совокупность которыхъ приводитъ къ тѣмъ даннымъ, изъ которыхъ непосредственно, или путемъ различныхъ комбинацій и вычисленій получается искомое численное значеніе измѣряемой величины.

Нѣтъ никакой возможности дать перечень тѣхъ манипуляцій, съ которыми приходится имѣть дѣло при производствѣ физическихъ измѣреній; объ нихъ слѣдуетъ прочесть въ вышеупомянутыхъ спеціальныхъ сочиненіяхъ. Впрочемъ и они не могутъ замѣнить личнаго опыта, самостоятельнаго производства измѣреній, которое одно только можетъ дѣйствительно научить дѣлу.

Ограничиваемся немногими, но основными указаніями.

При огромномъ большинствѣ физическихъ измѣреній мы имѣемъ дѣло съ тремя послѣдовательными манипуляціями: съ установкой, наблюденіемъ и отчетомъ.

I. Установка заключается въ правильномъ помѣщеніи и размѣщеніи приборовъ съ соблюденіемъ внутреннихъ и внѣшнихъ условій, опредѣляемыхъ, какъ свойствами самихъ приборовъ, такъ и особенностями тѣхъ явленій, которыя наблюдаются. Очень многіе приборы должны быть установлены такъ, чтобы нѣкоторая плоскость, въ нихъ содержащаяся, была горизонтальна. Такая установка весьма часто достигается помощью уровней (см. ниже) вращеніемъ винтовыхъ ножекъ прибора. Далѣе, приборъ вообще долженъ быть установленъ такъ, чтобы возможно и удобно было производить съ нимъ измѣренія, чтобы опредѣленныя его части были обращены въ надлежащую сторону. Къ внѣшнимъ условіямъ, къ которымъ необходимо отнестись съ величайшею осмотрительностью, могутъ относиться: прочность установки прибора, который не долженъ подвергаться сотрясеніямъ или напр. постепеннымъ измѣненіямъ упомянутаго горизонтальнаго положенія; это достигается установкой прибора на кронштейнахъ, прикрѣпленныхъ къ стѣнѣ или на каменныхъ столбахъ, стоящихъ на крѣпкихъ сводахъ или имѣющихъ отдѣльный фундаментъ. Далѣе сюда относится вліяніе окружающей обстановки: возможность воздушныхъ теченій, измѣненій температуры (близость печи, наблюдателя, окна), влажности (вліяющей напр. на длину коконовыхъ нитей) и т. д.; дѣйствіе приборовъ другъ на друга; вліяніе сосѣдняго желѣза или проводниковъ, по которымъ текутъ электрическіе токи (на приборы магнитные) и т. д. Установка должна сопровождаться самымъ тщательнымъ изслѣдованіемъ всѣхъ внѣшнихъ условій, могущихъ вліять на показанія прибора; эти условія должны быть устранены или величина ихъ вліянія должна быть принята въ расчетъ.

II. Наблюденіе при весьма многихъ измѣреніяхъ заключается въ такомъ постепенномъ измѣненіи части прибора или положенія внѣшняго предмета, которымъ достигается какой либо опредѣленный результатъ, причемъ моментъ его достиженія опредѣляется въ большинствѣ случаевъ наблюденіемъ глазами, но иногда и по слуху или осязаніемъ (см. ниже сферометръ). Такого рода наблюденіе иногда также называютъ «установкой» той или другой части такъ, чтобы былъ достигнутъ опредѣленный результатъ. Манипуляція при этомъ должна быть возможна, но отсюда не слѣдуетъ, чтобы всякій ее могъ исполнить съ перваго раза. Умѣнье производить ее иногда достигается лишь долгимъ упражненіемъ, а точныя наблюденія, т.-е. возможно близкое улавливаніе именно того момента, когда достигается опредѣленный результатъ, можетъ произвести только «искусный» наблюдатель.

Перемѣщеніе части прибора или внѣшняго предмета въ очень многихъ случаяхъ производится вращеніемъ головки винта и лишь рѣдко передвиженіемъ отъ руки (нѣкоторые фотометры). При этомъ весьма часто оказывается возможнымъ произвести установку съ двухъ противопо-

ложныхъ сторонъ и сдѣлавъ ее два раза, сперва съ одной, потомъ съ другой стороны, достигнуть болѣе точнаго результата. Весьма большое вниманіе слѣдуетъ обратить на т. наз. мертвый ходъ винта: если винтъ сперва былъ вращаемъ въ одну сторону, причемъ перемѣщалась какая-либо часть прибора и если затѣмъ начать вращать винтъ въ другую сторону, то подвижная часть прибора, на которую онъ дѣйствуетъ, не тотчасъ начинаетъ имъ увлекаться, такъ что величина вращенія винта не можетъ служить мѣрою передвиженія этой части прибора. Экспериментаторъ долженъ рѣшить, какимъ способомъ, въ каждомъ данномъ случаѣ, исключить вредное вліяніе мертваго хода: или дѣлая при каждомъ измѣреніи два наблюденія съ двухъ противоположныхъ сторонъ, т.-е. вращая сперва винтъ въ одну, а при слѣдующемъ наблюденіи въ противоположную сторону, или производя рядъ послѣдовательныхъ измѣреній, вращая головку винта постоянно въ одну и ту же сторону.

Выше было неопредѣленно сказано, что передвиженіе части прибора производится до тѣхъ поръ, пока на глазъ, на слухъ или на ощупь не окажется достигнутымъ нѣкоторый опредѣленный результатъ. Этотъ результатъ по своему характеру можетъ быть весьма различенъ; наиболѣе часто онъ заключается въ томъ, что двѣ наблюдаемыя величины, экстенсивныя (напр. длина, уголъ) или интенсивныя (напр. сила звука, степень освѣщенія), количественно должны сдѣлаться равными. Сюда можно отнести и случай, когда должна быть достигнута одинаковая окраска двухъ поверхностей, одинаковая высота двухъ звуковъ и тому подобныя равенства качественныя.

Мы не въ состояніи уловить момента, когда двѣ величины, наблюдаемыя нами, находятся въ опредѣленномъ отношеніи другъ къ другу, напр. одна въ два раза интенсивнѣе другой; зато вопросъ о достигнутомъ равенствѣ или неравенствѣ при навыкѣ рѣшается съ большою точностью.

При весьма многихъ методахъ измѣренія приходится наблюдать моментъ исчезновенія опредѣленнаго явленія; такіе методы мы назовемъ нулевыми. Они особенно цѣнны, ибо судить о присутствіи или отсутствіи впечатлѣнія на органы чувствъ мы можемъ еще точнѣе, чѣмъ о равенствѣ двухъ впечатлѣній. Впрочемъ тутъ нельзя провести рѣзкой границы, ибо иногда самое исчезновеніе явленія сводится для насъ къ тому, что два ощущенія дѣлаются равными, напр. когда на свѣтломъ фонѣ наблюдается пятно или полоса (фотометры) и требуется уловить моментъ, когда они исчезаютъ, т.-е. когда яркость мѣста, ими занимаемаго, дѣлается равной яркости окружающаго фона.

При весьма многихъ измѣреніяхъ приходится доводить до возможно полнаго совпаденія двѣ точки, черту и точку или двѣ черты, подводя одну изъ нихъ, подвижную, къ другой, неподвижной. И здѣсь требуется навыкъ, ибо «точка» и «черта» въ сущности представляютъ малый кружокъ и узкую полосу; совпадать должны геометрическія ихъ средины.

«Наблюденіе», въ смыслѣ точной установки части прибора, которое мы здѣсь привели, какъ вторую изъ трехъ главныхъ манипуляцій, при нѣкоторыхъ измѣреніяхъ совершенно отсутствуетъ и замѣняется простою ма-

нипуляцiей, вызывающей въ самомъ приборѣ какое-либо передвиженіе или вообще измѣненіе. Такъ, напр. замыканіе тока вызываетъ вращеніе магнита гальванометра, подогрѣваніе (при измѣреніяхъ коэффиціента расширенія, точки плавленія и кипѣнія и т. д.) вызываетъ перемѣщеніе ртути термометра и т. д.

III. Отчетъ бываетъ двоякій: длины и времени.

Отчетъ длины дѣлается на шкалѣ, расположенной вдоль прямой или вдоль окружности круга; требуется опредѣлить числовое значеніе шкалы, соотвѣтствующее опредѣленной ея точкѣ. Если эта точка приходится между двумя цѣлыми дѣленіями шкалы, то доли дѣленія опредѣляются по глазомѣру.

Отчетъ времени дѣлается: 1) по слуху помощью счетчика, отбивающаго секунды или полусекунды, причемъ требуется опредѣлить моментъ, когда происходитъ наблюдаемое явленіе и 2) помощью особыхъ приборовъ, называемыхъ хронографами (см. ниже) и дающихъ возможность отчетъ времени вполнѣ замѣнить отчетомъ длины.

§ 4. Нѣкоторыя подробности, относящіяся вообще до производства физическихъ измѣреній. Указавъ на установку, наблюденіе и отсчетъ, какъ на главныя манипуляціи, на которыя распадается всякое физическое измѣреніе, прибавимъ еще небольшое число общихъ указаній, которыя могутъ быть полезны для начинающихъ.

1. Искусство производить хорошія, т. е. точныя измѣренія съ даннымъ приборомъ, заключается въ умѣніи достигнуть крайнихъ предѣловъ того, что этотъ приборъ можетъ дать. Для грубыхъ, приблизительныхъ измѣреній, которыми часто довольствуются въ техникѣ (особенно въ электротехникѣ), могутъ служить простые приборы, настолько удобные, что манипулировать съ ними научается всякій, иногда въ нѣсколько минутъ. Совсѣмъ другое, когда рѣчь идетъ о научномъ изслѣдованіи при условіи достиженія крайнихъ возможныхъ предѣловъ точности. Здѣсь требуется тщательное изученіе свойствъ прибора, та осмотрительность и тотъ навыкъ, о которыхъ было сказано выше. Искусный наблюдатель и съ плохимъ приборомъ достигнетъ лучшихъ результатовъ, чѣмъ неискусный съ приборомъ хорошимъ, усовершенствованнымъ.

2. Гдѣ только возможно, слѣдуетъ каждое измѣреніе повторять много разъ сряду. Подчеркиваемъ это для юныхъ читателей, которые, какъ оказывается, въ началѣ весьма склонны ограничиваться однимъ единичнымъ измѣреніемъ.

Не слѣдуетъ забывать, что обыкновенно приходится затрачивать много времени и труда, чтобы добиться результата перваго измѣренія, между тѣмъ какъ слѣдующія, повторенныя измѣренія требуютъ все меньшаго и меньшаго времени и труда.

3. Когда измѣряется вліяніе какого-либо дѣйствія A на нѣкоторую величину B (напр. вліяніе измѣненія температуры на электрическое сопротивленіе проволоки), то слѣдуетъ или чередовать измѣренія этой величины B, когда имѣется и когда не имѣется дѣйствія A, или, по крайней мѣрѣ, начавъ съ измѣренія B безъ дѣйствія A и сдѣлавъ рядъ

измѣреній при наличности этого дѣйствія, непремѣнно вновь возвратиться къ начальному состоянію, т.-е. произвести опять измѣреніе величины B безъ дѣйствія A. Этимъ мы убѣждаемся, что во время нашей работы не произошло измѣненій въ самомъ приборѣ или во внѣшней обстановкѣ, могущихъ имѣть вліяніе на его показанія. Если обнаружилось такое измѣненіе и оно не велико, то слѣдуетъ его принять во вниманіе, допуская, что оно происходило постепенно, пропорціонально времени, истекшему отъ перваго измѣренія.

4. Никогда не слѣдуетъ забывать записывать въ началѣ ряда измѣреній, что́ и какимъ методомъ измѣряется; далѣе мѣсто наблюденія и время, т.-е. годъ, мѣсяцъ, число и часъ, а при каждомъ отдѣльномъ измѣреніи минуту и даже дробь, если это нужно, минуты или секунды. Почти всегда приходится записывать и температуру. Другія величины (давленіе и влажность воздуха, магнитное склоненіе и т. д.) отмѣчаются, если они могутъ имѣть вліяніе на результатъ измѣренія.

5. Числовыя данныя, получаемыя при непосредственныхъ отсчетахъ, лишь въ рѣдкихъ случаяхъ непосредственно равны тѣмъ числовымъ значеніямъ измѣряемыхъ величинъ, которыя мы желаемъ опредѣлить. Почти всегда искомая величина получается путемъ вычисленій, на основаніи опредѣленныхъ формулъ, въ которыя должны быть «вставлены» результаты отсчетовъ. Слѣдуетъ принять за правило не накоплять множества измѣреній, не вычисливъ таковыхъ, ибо результаты вычисленій весьма часто могутъ дать важныя указанія касательно недостатковъ метода, внѣшнихъ вліяній и т. д. Самыя вычисленія, представляющія нерѣдко трудъ, гораздо болѣе кропотливый, продолжительный и, во всякомъ случаѣ, скучный, чѣмъ производство измѣреній, слѣдуетъ располагать такъ, чтобы ихъ легко можно было и обозрѣть и провѣрить. Пособіемъ могутъ служить вычислительныя машины и разныя таблицы, какъ напр. таблицы Барлова (Barlow, квадраты, кубы, квадратные и кубичные корни и обратные величины цѣлыхъ чиселъ) и Крелля (Crelle, Rechentafeln, таблицы умноженія чиселъ).

6. Избранный методъ измѣренія слѣдуетъ предварительно подвергнуть теоретическому изслѣдованію для опредѣленія условій наибольшей его чувствительности, которая будетъ достигнута, когда весьма малое измѣненіе измѣряемой величины вызоветъ возможно бо́льшее измѣненіе отчета. Общія правила здѣсь даны быть не могутъ, кромѣ развѣ слѣдующаго: когда мы желаемъ измѣрить малую варіацію Δx величины x, вызванную какою-либо внѣшнею причиною (напр. измѣненіе Δx сопротивленія x части цѣпи при ея нагрѣваніи или измѣненіе Δx силы свѣта x подъ вліяніемъ магнитныхъ силъ, см. магнитное вращеніе плоскости поляризаціи), то слѣдуетъ стремиться къ тому, чтобы начальное x было по возможности мало или даже равно нулю, или чтобы сама величина x не вліяла на отчетъ, который всецѣло долженъ зависѣть только отъ Δx. Когда сопротивленіе x цѣпи весьма велико, то малое, по абсолютной величинѣ, его измѣненіе Δx не вызоветъ замѣтныхъ измѣ-

неній въ силѣ тока, а слѣд. и въ показаніяхъ инструмента (гальванометра); та же величина Δx вызоветъ большое измѣненіе этихъ показаній, когда послѣднія отъ x вовсе не зависятъ. Малое измѣненіе Δx силы яркаго освѣщенія остается незамѣтнымъ; та же самая по абсолютной величинѣ Δx сила освѣщенія, возникающая на темномъ фонѣ, весьма замѣтна.

Здѣсь играетъ большую роль психофизическій законъ Фехнера, гласящій, что одинаковыя относительныя измѣненія величины внѣшней причины, производящія раздраженіе въ одномъ изъ нашихъ органовъ чувствъ, вызываютъ одинаковыя абсолютныя измѣненія ощущенія.

7. Всякій теоретически установленный методъ измѣренія представляетъ нѣчто отвлеченное или, если можно такъ выразиться, идеальное. При примѣненіи метода на практикѣ почти всегда оказывается наличность цѣлаго ряда обстоятельствъ, вліяющихъ на окончательный отчетъ и тѣмъ самымъ мѣняющихъ теоретическую формулу, которая должна намъ дать искомое численное значеніе измѣряемой величины. Принимая во вниманіе эти обстоятельства, мы должны ввести въ наши вычисленія поправки, чтобы получить истинное значеніе измѣряемой величины.

Одна изъ главныхъ заботъ лица, производящаго измѣренія и должна заключаться въ отысканіи всѣхъ тѣхъ побочныхъ обстоятельствъ, которыя могутъ вліять на результатъ измѣренія, и въ опредѣленіи соотвѣтствующихъ поправокъ.

Вычисляя эти поправки и стремясь тѣмъ самымъ къ полученію возможно точнаго результата, слѣдуетъ поступать весьма осмотрительно, чтобы не впасть въ одну часто замѣчаемую ошибку. Дѣло въ томъ, что различныя обстоятельства могутъ имѣть весьма неодинаковое вліяніе на результатъ измѣренія: однѣ поправки могутъ выражаться въ цѣлыхъ процентахъ, другія въ десятыхъ, сотыхъ или тысячныхъ доляхъ процента. Слѣдуетъ весьма остерегаться безцѣльнаго введенія малыхъ поправокъ, когда не приняты во вниманіе поправки, сравнительно гораздо бо́льшія. Наблюдая качанія коромысла вѣсовъ, можно при взвѣшиваніи вводить поправки, представляющія 0,001% (и меньше) опредѣляемаго вѣса; но это безцѣльно и составляетъ сущій самообманъ, если въ то же время не ввести напр. поправки на потерю вѣса тѣла въ воздухѣ, могущую превысить 0,1%.

8. Слѣдуетъ отличать абсолютную и относительную точность окончательнаго результата измѣренія, представляющагося въ видѣ нѣкотораго числа, положимъ, съ десятичными дробями. Та и другая «точность» опредѣляется тою долею полученнаго числа, за достовѣрность которой мы считаемъ возможнымъ поручиться. Если напр. вѣсъ тѣла оказался равнымъ 125,0463 грамма и мы можемъ поручиться за то, что предпослѣдняя цыфра должна быть 6 (т.-е. что вѣсъ больше, чѣмъ 125,0455 грамма и меньше, чѣмъ 125,0465 грамма), то абсолютная точность взвѣшиванія составляетъ одинъ миллиграммъ, относительная же точность равна 0,00001. Когда точность мало или совсѣмъ не зависитъ отъ размѣровъ измѣряемой величины (уголъ, разность температуръ, иногда длина и время), то говорятъ только объ абсолютной точности («до 0,1″ дуги», «до 0,01° C.», «до 0,001 мм.», «до

0,01 сек.»). Въ огромномъ же большинствѣ случаевъ, говоря о точности результата измѣренія, подразумѣваютъ точность относительную. Она опредѣляется порядкомъ той цыфры полученнаго числа, считаемой слѣва направо, за которую можно поручиться; при этомъ нули, стоящіе слѣва, не считаются, если полученное число представляется въ видѣ малой десятичной дроби, иногда вслѣдствіе случайнаго выбора единицъ измѣренія. Первая цифра, не равная нулю, называется въ этомъ случаѣ первою значущею цыфрою, и отъ нея ведется счетъ достовѣрныхъ цыфръ. Если напр. измѣренная величина оказалась равною 0,0016843 и мы можемъ поручиться за вѣрность цыфры 8, то это не значитъ, что точность равна 0,00001. Мы должны сказать, что величина измѣрена «съ точностью до третьей значущей цыфры» или до 0,01. Указаніе на «значущую цыфру», впрочемъ, не особенно строго: еслибы измѣренное число было 0,0096843 и мы могли бы поручиться за вѣрность цыфры 8, то это была бы точность почти до 0,001.

Слѣдуетъ помнить, что между точностью отдѣльныхъ измѣреній, на которыя распадается опредѣленіе численнаго значенія нѣкоторой величины, и точностью этого послѣдняго опредѣленія можетъ быть большая разница. Если напр. при измѣреніи нѣкоторой величины y (коеффиціентъ крученія, см. отдѣлъ шестой) приходится попутно опредѣлять радіусъ x проволоки, приблизительно равный 0,4 мм. и если величина y пропорціональна x^4, то даже при крайней достижимой абсолютной точности измѣренія x до 0,001 мм., можетъ получиться ошибка въ 1% въ численномъ значеніи величины y. Правила дифференціальнаго исчисленія даютъ возможность безъ особаго труда разобраться въ подобныхъ вопросахъ. Если мы имѣемъ вообще $y=f(x)$, гдѣ x непосредственно измѣряется, а y вычисляется по извѣстной формулѣ, то возможная погрѣшность Δx при измѣреніи x влечетъ за собою относительную ошибку Δy въ опредѣленіи y, которую можно съ достаточною точностью выразить приближеннымъ равенствомъ:

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}=\Delta \lg f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

9. Многократное повтореніе одного и того же измѣренія однимъ лицомъ и безъ измѣненія обстановки и метода всегда оставляетъ сомнѣніе относительно возможности постоянно повторяющихся погрѣшностей, источниками которыхъ могутъ служить неисправность прибора, неправильная его установка, постороннія внѣшнія вліянія и, наконецъ, субъективныя ошибки наблюдателя. Вотъ почему варіированіе метода измѣренія есть одинъ изъ главныхъ способовъ достиженія точныхъ результатовъ. Это варіированіе можетъ касаться деталей измѣренія или всего его метода.

Варіировать детали слѣдуетъ непремѣнно, гдѣ только тому представляется возможность, руководясь главнымъ образомъ такими соображеніями: Положимъ, что есть поводъ допустить, что какая либо причина A имѣетъ вліяніе на результатъ измѣренія, но что величина этого вліянія не поддается точному опредѣленію. Въ такомъ случаѣ слѣ-

дуетъ постараться произвести измѣреніе два раза, варіируя его такъ, чтобы вліяніе причины A имѣло при этихъ двухъ измѣреніяхъ противоположныя направленія, т.-е. при одномъ увеличивало, при второмъ уменьшало бы численный результатъ. Взявъ среднее изъ результатовъ, мы этимъ «исключаемъ вліяніе причины A», хотя, конечно, и не вполнѣ, ибо два противоположныхъ вліянія могутъ и не быть строго равными.

Гдѣ окажется возможнымъ, надо стараться производить измѣренія величины по существенно различнымъ методамъ, которые должны дать согласные между собою результаты.

§ 5. Приближенное вычисленіе результатовъ измѣреній. При вычисленіи результатовъ измѣреній слѣдуетъ помнить, что они могутъ обладать лишь нѣкоторою опредѣленною степенью точности, о которой самъ наблюдатель имѣетъ всегда болѣе или менѣе опредѣленное представленіе. Поэтому при самомъ выполненіи вычисленій можно допускать упрощенія, вводя тѣмъ самымъ сознательно нѣкоторыя погрѣшности, которыя однако достовѣрно меньше тѣхъ неточностей, которыя во всякомъ случаѣ должны оставаться въ окончательномъ результатѣ. Такія упрощенія или, какъ говорятъ, приближенныя вычисленія особенно удобны, когда какія-либо изъ величинъ, входящихъ въ формулы, завѣдомо столь малы, что квадратами ихъ можно пренебречь. Вотъ нѣсколько примѣровъ упрощеній, допустимыхъ при вычисленіи результатовъ физическихъ измѣреній. Пусть α, β, γ весьма малыя величины, тогда можно положить:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots = 1+\alpha+\beta+\gamma+\ldots$$

$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha$; напр. $(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha$; $\sqrt{1+\alpha} = (1+\alpha)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\alpha$.

$\frac{1}{1+\alpha} = (1+\alpha)^{-1} = 1-\alpha$; $\frac{1}{1-\alpha} = 1+\alpha$; $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} = (1+\alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\alpha$.

$\frac{1}{(1+\alpha)^m} = (1+\alpha)^{-m} = 1-m\alpha$.

$\sin\alpha = \alpha$; $\cos\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$; $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.

Точнѣе можно принять: $\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$; $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$.

$\sin(x \pm \alpha) = \sin x \pm \alpha\cos x$; $\cos(x \mp \alpha) = \cos x \pm \alpha\sin x$.

Если $x_1 - x_2 = \alpha$ весьма малая величина, то можно положить

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

ибо

$$\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1(x_1-\alpha)} = x_1\sqrt{1-\frac{\alpha}{x_1}} = x_1\left(1-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x_1}\right) = \frac{2x_1-\alpha}{2} =$$
$$= \frac{x_1+(x_1-\alpha)}{2} = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

§ 6. Вычисленіе наиболѣе вѣроятнаго результата ряда опредѣленій одной величины. Положимъ, что мы произвели n опредѣленій одной величины и получили n чиселъ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_i \ldots x_n$. Еслибы наши опредѣленія были абсолютно точны, то всѣ эти числа равнялись бы

между собою и были бы равны истинному значенію x измѣряемой величины. Неизбѣжныя погрѣшности или ошибки наблюденій уклоняютъ результаты измѣреній отъ такого идеальнаго равенства.

Погрѣшности бываютъ двоякаго рода: систематическія и случайныя.

Систематическія погрѣшности происходятъ отъ недостатковъ метода, внѣшнихъ причинъ, вліяющихъ постоянно въ одномъ направленіи, и отъ личныхъ свойствъ наблюдателя, нерѣдко склоннаго при установкахъ и отчетахъ дѣлать ошибку преимущественно въ одномъ направленіи, напр. постоянно опаздывать при улавливаніи момента, когда происходитъ наблюдаемое явленіе. Систематическія ошибки, вліяя болѣе или менѣе одинаково на всѣ числа x_i, очевидно не могутъ быть уменьшены какими бы то ни было вычисленіями, произведенными надъ этими числами. Онѣ могутъ быть исключены только непосредственнымъ ихъ отыскиваніемъ, для чего не могутъ быть даны никакія правила. Замѣна одного метода измѣренія совершенно другимъ нерѣдко даетъ цѣнныя указанія въ этомъ направленіи.

Случайныя погрѣшности происходятъ отъ случайныхъ измѣненій въ установкѣ и ошибокъ при производствѣ наблюденій и отчетовъ, и отъ такихъ внѣшнихъ причинъ, которыя, часто мѣняясь, вліяютъ на результатъ измѣренія то въ одну, то въ другую сторону. Вѣроятность получить, вслѣдствіе случайныхъ погрѣшностей, въ результатѣ слишкомъ большое или слишкомъ малое число одинаковая и потому среднее ариѳметическое x_0 изъ полученныхъ чиселъ x_i представляется наиболѣе вѣроятнымъ. Итакъ

$$x_0 = \frac{\Sigma x_i}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

слѣдуетъ принять за наиболѣе вѣроятное числовое значеніе измѣренной величины. Въ теоріи вѣроятностей дается строгое доказательство этого положенія. Вычитая наблюденныя числа x_i изъ средняго x_0, получаемъ т. наз. отклоненія δ_i отдѣльныхъ наблюденій отъ средняго значенія. Ихъ алгебраическая сумма очевидно равна нулю. Составимъ выраженіе

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Въ теоріи вѣроятностей доказывается слѣдующій рядъ соотношеній:

1. Средняя погрѣшность f каждаго отдѣльнаго наблюденія равна

$$f = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

2. Средняя погрѣшность F результата, т.-е. ариѳметическаго средняго x_0, равна

$$F = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

3. Вѣроятная погрѣшность φ отдѣльнаго наблюденія и вѣроятная погрѣшность Φ результата получаются отъ умноженія средней погрѣшности на число 0,6745 или приблизительно на $\frac{2}{3}$. Итакъ

$$\varphi = \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{S}{n-1}} \text{ или } \varphi = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{S}{n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\Phi = \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} \text{ или } \Phi = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Для искомой величины x находимъ окончательно

$$x = x_0 \pm \Phi,$$

т.-е.

$$x = \frac{\Sigma x_i}{n} \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma \delta_i^2}{n(n-1)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Приведемъ примѣръ (изъ книги Terquem et Damien, Introduction à la physique éxperimentale). Нѣкоторый уголъ x былъ измѣренъ $n = 10$ разъ, причемъ получены были слѣдующія его значенія x_i:

x_i	Отклоненія δ_i	δ_i^2
20°,666	− 0,0023	0,00000529
20,740	− 0,0763	0,00582169
20,701	− 0,0373	0,00139139
20,616	+ 0,0477	0,00227529
20,641	+ 0,0227	0,00051529
20,700	− 0,0363	0,00131769
20,658	+ 0,0057	0,00003249
20,616	+ 0,0477	0,00227529
20,658	+ 0,0057	0,00003249
20,641	+ 0,0227	0,00051529
Сумма 206,637		$S = \sum \delta_i^2 = 0{,}01418220$

Среднее $x_0 = 20°,6637$ или $x_0 = 20°39'49''$

$$f = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{S}{9}} = \pm \sqrt{0{,}00157580} = \pm 0°{,}0397 = \pm 2'23 .$$

$$F = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{S}{90}} = \pm 0°{,}01256 = \pm 45''.$$

$$\varphi = \frac{2}{3} f = \pm 0°{,}0261 = \pm 1'34''.$$

$$\Phi = \frac{2}{3} F = \pm 0°{,}00837 = \pm 30''.$$

Окончательно $x = 20°39'49'' \pm 30''$.

Когда численное значеніе величины было опредѣлено нѣсколькими рядами наблюденій, произведенными по различнымъ методамъ, при различной обстановкѣ или, наконецъ, различными наблюдателями, то числовые результаты этихъ рядовъ наблюденіи, вообще говоря, будутъ заслуживать различной степени довѣрія. Было бы неправильно, еслибъ мы окончательно остановились на ариѳметическомъ среднемъ чиселъ x_i, полученныхъ въ отдѣльныхъ рядахъ, ибо этимъ мы бы признали, что всѣ они имѣютъ

одинаковое значеніе. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ каждому изъ результатовъ приписать особый вѣсъ; это число, характеризующее значеніе или степень достовѣрности результата каждаго ряда наблюденіи.

При выводѣ окончательнаго результата x слѣдуетъ каждое изъ чиселъ x_i помножить на его вѣсъ p_i и затѣмъ взять среднее, раздѣливъ на сумму вѣсовъ.

Такимъ образомъ

$$x = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Во многихъ случаяхъ приходится опредѣлять вѣсъ по личному усмотрѣнію. Нерѣдко онъ вычисляется изъ самихъ наблюденій, а именно вѣсъ результата ряда наблюденій обратно пропорціоналенъ квадрату его вѣроятной погрѣшности Ф, см. (8).

Положимъ, что рядъ опредѣленій широты мѣста λ далъ

$$\lambda_1 = 49^0 16' 13'' \pm 5''.$$

Другой рядъ, полученный другимъ приборомъ или другимъ наблюдателемъ далъ

$$\lambda_2 = 49^0 16' 10'' \pm 3''.$$

Вѣса относятся какъ 9 : 25, а потому

$$\lambda = \frac{9\lambda_1 + 25\lambda_2}{9 + 25} = 49^0 16' + \frac{9.13'' + 25.10''}{34} = 49^0 16' 10'',8.$$

§ 7. Вычисленіе наиболѣе вѣроятныхъ значеній нѣсколькихъ величинъ. Способъ наименьшихъ квадратовъ. Подробное изложеніе такъ называемаго способа наименьшихъ квадратовъ слѣдуетъ искать въ спеціальныхъ сочиненіяхъ по теоріи вѣроятностей. Здѣсь мы должны ограничиться краткимъ указаніемъ на значеніе и сущность этого способа.

Мы видѣли (стр. 6), что закономѣрная связь между явленіями, которую мы ищемъ, выражается опредѣленными алгебраическими связями между численными значеніями различныхъ величинъ.

Положимъ, что нѣкоторая величина v есть функція величинъ $x, y, z \ldots$, такъ что можно написать $v = F\,(x, y, z \ldots)$.

Въ функцію F войдутъ, кромѣ $x, y, z \ldots$ еще различные числовые «параметры» $a, b, c \ldots$, напр. коэффиціенты, показатели степеней, основанія перемѣнныхъ степеней и т. д. Поэтому мы вообще напишемъ

$$v = F(x, y, z, \ldots . a, b, c, \ldots) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Въ огромномъ большинствѣ случаевъ отыскиваютъ связь лишь между двумя величинами v и x, и тогда мы, вмѣсто (11), имѣемъ

$$v = F(x, a, b, c, \ldots) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Видъ функціи F можетъ быть или выведенный теоретически или онъ взятъ наугадъ, или наконецъ это функція эмпирическая (стр. 23). Во всѣхъ трехъ случаяхъ мы ставимъ вопросъ о томъ, можно ли опредѣлить постоянныя a, b, $c\ldots$ такъ, чтобы наблюденныя значенія величинъ v, x, y, $z,\ldots$ или только v и x удовлетворяли выведенной, угаданной или эмпирически принятой функціи F. Въ послѣднемъ случаѣ эмпирической связи при двухъ величинахъ v и x весьма часто придаютъ видъ

$$v = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Численныя значенія величинъ v, x, y, $z\ldots$ или только v и x получаются изъ наблюденій; численныя же значенія параметровъ a, b, $c\ldots$ требуется опредѣлить такъ, чтобы послѣ подстановки ихъ въ (11), (12) или (13) получилась алгебраическая зависимость, съ которою опытомъ найденныя численныя значенія оказались бы по возможности согласными. Такимъ образомъ напр. въ (13) мы имѣемъ изъ опытовъ рядъ сопряженныхъ значеній величинъ v и x; на v, x, x^2, $x^3\ldots$ въ (13) слѣдуетъ поэтому смотрѣть какъ на извѣстные намъ коеффиціенты, на a, b, c, $d\ldots$ какъ на искомыя неизвѣстныя.

Если число наблюденій, т.-е. число извѣстныхъ сопряженныхъ значеній величинъ v и x равно числу неизвѣстныхъ параметровъ a, b, $c\ldots$, то эти послѣдніе опредѣляются однозначущимъ образомъ и ни о какой провѣркѣ параметровъ выведенной или эмпирической функціи не можетъ быть и рѣчи.

Положимъ напр. что v и x связаны формулою

$$v = a + bx + cx^2.$$

Если измѣренія даютъ всего три пары сопряженныхъ значеній величинъ v и x, а именно v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3, то три уравненія вида

$$v_i = a + bx_i + cx_i^2,$$

гдѣ $i = 1, 2, 3$, послужатъ для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ a, b и c. Точно также при

$$v = a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x + d\sin 4x,$$

четыре пары сопряженныхъ значеній величинъ x и v послужатъ для опредѣленія четырехъ параметровъ a, b, c и d.

Совсѣмъ другое будетъ, когда число n наблюденій больше числа m неизвѣстныхъ параметровъ, напр. когда мы имѣемъ 20 наблюденій при 3-хъ параметрахъ. Тогда имѣются n уравненій (напр. 20) съ m неизвѣстными (напр. 3). Еслибы допущенная связь между наблюденными величинами выражала истинную ихъ закономѣрную связь и еслибы измѣренія были абсолютно точны, то m параметровъ, опредѣленные изъ какихъ либо m уравненій, удовлетворяли бы и остальнымъ $n - m$ уравненіямъ. Но наблюденія не безъ погрѣшностей и допущенная связь, особенно если она эмпирическая.

лишь приближенно выражаетъ закономѣрную зависимость между величинами, а потому мы для параметровъ получимъ не вполнѣ одинаковыя значенія, если различно будемъ выбирать группы въ m уравненій изъ имѣющихся n уравненій. Спрашивается, на какихъ значеніяхъ параметровъ мы должны остановиться, какія ихъ численныя значенія наиболѣе вѣроятны?

Теорія вѣроятностей даетъ на этотъ вопросъ такой отвѣтъ: слѣдуетъ выбрать такія значенія параметровъ, для которыхъ сумма квадратовъ уклоненій наблюденныхъ значеній функціи F отъ вычисленныхъ есть наименьшая. Итакъ величина

$$S = \sum \left\{ v_i - F(x_i, a, b, c \ldots) \right\}^2 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

въ которой v_i и x_i сопряженныя значенія величинъ v и x, найденныя изъ наблюденій, должна имѣть наименьшее значеніе при искомыхъ значеніяхъ параметровъ $a, b, c \ldots$.

Правила дифференціальнаго исчисленія показываютъ, что условіе минимума величины S будетъ удовлетворено, когда

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \text{ и т. д.} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Получается столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ параметровъ; остается рѣшить эти уравненія.

Предположимъ, что мы имѣемъ связь вида

$$v = ax + by + cz \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

(гдѣ въ частномъ случаѣ можетъ быть $y = x^2$, $z = x^3$ или $x = 1$, $z = y^2$) и что наблюденія дали n значеній величинъ v, x, y, z. Требуется найти наиболѣе вѣроятныя значенія коеффиціентомъ a, b, c. Вышеуказанный «способъ наименьшихъ квадратовъ» даетъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum \left\{ v_i - ax_i - by_i - cz_i \right\}^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \sum \left\{ v_i - ax_i - by_i - cz_i \right\}^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial c} \sum \left\{ v_i - ax_i - by_i - cz_i \right\}^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Здѣсь всѣ v_i, x_i, y_i и z_i суть величины извѣстныя. Первое изъ ур. (17) даетъ

$$\sum \left\{ v_i - ax_i - by_i - cz_i \right\} x_i = 0$$

или

$$\sum v_i x_i = a \sum x_i^2 + b \sum x_i y_i + c \sum x_i z_i$$

аналогично

$$\left.\begin{aligned} \sum v_i y_i = a \sum x_i y_i + b \sum y_i^2 + c \sum y_i z_i \\ \sum v_i z_i = a \sum x_i z_i + b \sum y_i z_i + c \sum z_i^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

Эти три уравненія и послужатъ для опредѣленія трехъ параметровъ a, b и c. Легко обобщить этотъ выводъ для случая бо́льшаго числа искомыхъ параметровъ.

Приведемъ примѣръ. Величины v и x связаны уравненіемъ

$$v = ax + bx^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Изъ наблюденій были получены слѣдующія численныя значенія

x	v	x	v
0,33	2,51	2,60	8,81
1,04	5,23	3,14	9,10
1,32	6,12	3,82	8,26
2,06	7,97	4,13	8,04

Сравнивая (19) съ (16), мы видимъ, что $y = x^2$, $z = 0$ и потому (18) даетъ два уравненія

$$\left.\begin{aligned} \sum v_i x_i &= a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 \\ \sum v_i x_i^2 &= a \sum x_i^3 + b \sum x_i^4 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Для вычисленія этихъ суммъ пользуются таблицами квадратовъ и кубовъ цѣлыхъ чиселъ и весьма полезною формулою

$$pq = \frac{(p+q)^2 - p^2 - q^2}{2},$$

откуда

$$\sum pq = \frac{\Sigma(p+q)^2 - \Sigma p^2 - \Sigma q^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Послѣдняя формула даетъ возможность вычисленіе суммы произведеній свести къ вычисленію суммъ квадратовъ. Въ нашемъ случаѣ: $\sum v_i x_i = 147{,}01$; $\sum x_i^2 = 55{,}446$; $\sum x_i^3 = 186{,}92$; $\sum x_i^4 = 669{,}00$ и $\sum v_i x_i^2 = 457{,}33$. Подставивъ эти числа въ (20), получаемъ $a = 5{,}9735$ и $b = -0.9851$; поэтому искомая зависимость будетъ

$$v = 5{,}9735x - 0{,}9851x^2.$$

Если въ полученное такимъ путемъ выраженіе для $F(x, y, z \ldots)$ подставить числа x_i, y_i, $z_i \ldots$, то получатся числа v_i' «вычисленныя», отличающіяся отъ чиселъ v_i «наблюденныхъ». Уклоненія обозначимъ черезъ $\delta_i = v_i' - v_i$. Средняя ошибка f результата равна, какъ доказывается въ теоріи вѣроятностей,

$$f = \frac{\Sigma \delta_i^2}{n - m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

гдѣ n число уравненій, m число параметровъ. Въ нашемъ примѣрѣ $\sum \delta_i^2 = 0{,}529$, $n = 8$, $m = 2$, слѣд. $f = \frac{0{,}529}{6} = 0{,}088$.

Когда функція F, см. (11), не имѣетъ вида (16), такъ что искомые параметры $a, b, c, \ldots$ не входятъ въ нее, какъ линейные коеффиціенты при извѣстныхъ величинахъ $x, y, z \ldots$, то вычисляютъ сперва изъ m уравненій приближенныя значенія $a_0, b_0, c_0 \ldots$ искомыхъ величинъ.

Полагая затѣмъ $a = a_0 + \alpha$, $b = b_0 + \beta$, $c = c_0 + \gamma, \ldots$, имѣемъ

$$v = F(x, y, z, \ldots, a_0 + \alpha, b_0 + \beta, c_0 + \gamma, \ldots).$$

Такъ какъ α, β, γ величины малыя, то можемъ положить

$$v = F(x, y, z, \ldots a_0, b_0, c_0 \ldots) + \frac{\partial F}{\partial a}\alpha + \frac{\partial F}{\partial b}\beta + \frac{\partial F}{\partial c}\gamma + \ldots$$

Вводя обозначенія

$$v - F(x, y, z, \ldots, a_0, b_0, c_0 \ldots) = v'$$
$$\frac{\partial F}{\partial a} = x', \quad \frac{\partial F}{\partial b} = y', \quad \frac{\partial F}{\partial c} = z' \ldots$$

имѣемъ

$$v' = \alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \ldots,$$

гдѣ величины $v', x', y', z', \ldots$ извѣстны; остается опредѣлить числа $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ по тому же методу, который далъ намъ величины $a, b, c \ldots$ въ ур. 16.

ЛИТЕРАТУРА.

Спеціальныя сочиненія, посвященныя производству опытовъ, измѣреній и вообще работъ въ физическихъ лабораторіяхъ:

Кольраушъ. Руководство къ практикѣ физическихъ измѣреній Спб. 1891 (перев. съ нѣмецкаго).

Wiedemann und Ebert. Physikalisches Practicum. Braunschweig.

Ostwald. Hand- und Hülfsbuch zur Ausführung physiko-chemischer Messungen. Leipzig.

O. Lehmann. Physikalische Technik.

L. Kuelp. Die Schule des Physikers.

Glazebrook and Shaw. Practical physics.

B. Stewart and H. Gee. Lessons in elementary practical physics.

A. Witz. Cours de manipulations de physique.

Terquem et Damien. Introduction à la physique éxperimentale.

В. В. Лермантовъ. Объясненіе практическихъ работъ по физикѣ. Спб. 1893—1895. (литогр.).

Frick. Physikalische Technik. 6-te Aufl. v. Otto Lehmann. Braunschweig.

W. Pscheidl. Einleitung in die practische Physik.

А. Степановъ. Руководство для практическихъ занятій по физикѣ.

Bunsen. Gasometrische Methoden.

Weinhold. Physikalische Demonstrationen.

G. Hopkins. Experimental Science. London.

Сочиненія, посвященныя спеціально электрическимъ измѣреніямъ будутъ указаны въ части IV.

Вопросъ объ ошибкахъ наблюденій, о вычисленіи результатовъ наблюденій и о способѣ наименьшихъ квадратовъ излагается въ сочиненіяхъ по теоріи вѣроятностей.

Но существуютъ и нѣкоторыя книги, болѣе спеціально посвященныя этому вопросу. Укажемъ на слѣдующія:

Airy. On the algebraical and numerical theory of errors of observations. Cambridge. 1861.

Bienaymé. Probabilité des erreurs (Journ. de Liouville, 1 série t. 17).

Gauss. Theoria combinationis observationum errorum minimis obnoxiae.

Bruno. Calcul des erreurs. Paris. 1869.

Weinstein. Handbuch der physicalischen Maassbestimmungen, 2 части, Berlin. 1886—1892.

M. Merriman. Method of least squares. London. 1877.

G. Hagen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Berlin. 1867.

J. Bertrand. Calcul des probabilités. Paris. 1868.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Нѣкоторые вспомогательные приборы.

§ 1. Дѣлительная машина линейная. На стр. 239 было упомянуто, что отчеты длины дѣлаются на шкалахъ (масштабахъ) прямыхъ (линейныхъ) или круговыхъ. Для нанесенія дѣленій на этихъ шкалахъ соотвѣтственно употребляются дѣлительныя машины линейныя и круговыя. Линейныя дѣлительныя машины бываютъ обыкновенныя и копирующія. Первыя служатъ для нанесенія опредѣленныхъ, заданныхъ дѣленій; вторыя — для перенесенія (копированія) дѣленій съ готоваго масштаба на новый, изготовляемый.

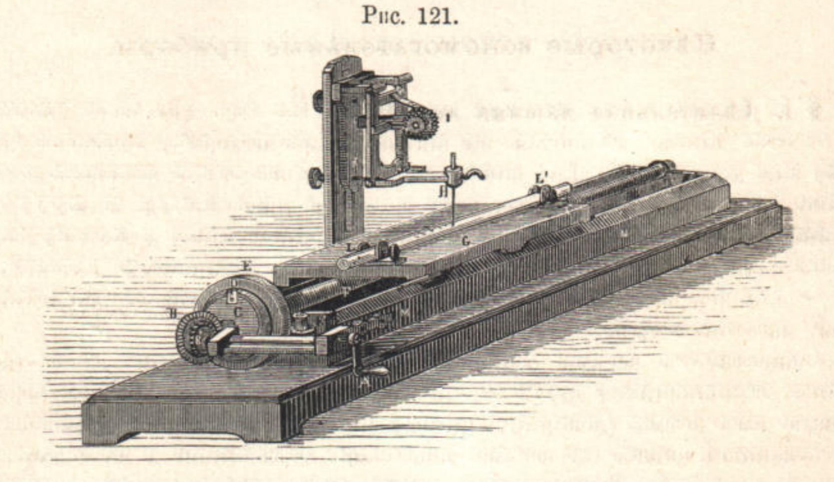
Существуетъ весьма большое число разновидностей дѣлительныхъ машинъ, отличающихся другъ отъ друга устройствомъ деталей. Важнѣйшую и общую имъ всѣмъ (некопирующимъ) часть представляетъ горизонтально расположенный винтъ съ весьма тщательно отдѣланной и возможно однообразной нарѣзкой. Концы этого винта снабжены круговой нарѣзкой и лежатъ въ соотвѣтствующихъ гнѣздахъ (см. рис. 122 *NN*, съ правой стороны), вслѣдствіе чего винтъ при вращеніи около своей оси не имѣетъ поступательнаго движенія. Винтъ проходитъ черезъ гайку, прикрѣпленную къ горизонтальной площадкѣ, находящейся надъ винтомъ; при вращеніи винта гайка, а вмѣстѣ съ нею и площадка, получаютъ поступательное движеніе, величина котораго была бы строго пропорціональна углу поворота винта, еслибы нарѣзка на немъ была абсолютно правильная. Особыя приспособленія даютъ возможность поворачивать винтъ каждый разъ на одинъ и тотъ же уголъ и тѣмъ перемѣщать площадку на одну и ту же линейную величину. Рядомъ съ площадкой установленъ рѣзецъ, дающій возможность проводить черты на стержнѣ, прикрѣпленномъ къ площадкѣ параллельно оси винта и перемѣщающемся съ нею въ сторону при вращеніи винта. Во многихъ приборахъ, наоборотъ, рѣзецъ перемѣщается вмѣстѣ съ площадкой, а стержень неподвижно закрѣпленъ рядомъ съ нею, параллельно оси винта.

Въ деталяхъ различныя машины отличаются главнымъ образомъ тѣми

приспособленіями, которыми достигается поворотъ винта послѣдовательно на одинъ и тотъ же уголъ, и устройствомъ рѣзца, долженствующаго проводить черточки и притомъ, въ большинствѣ случаевъ, не одинаковой длины, ибо, какъ всѣмъ извѣстно, на масштабахъ обыкновенно каждую пятую и десятую черты дѣлаютъ болѣе длинными; иногда-же попеременно идутъ черты средней длины и наиболѣе короткія (напр. при дѣленіи на полумиллиметры) или въ иномъ опредѣленномъ порядкѣ чередуются черты различной длины. Поворотъ винта на данный уголъ и возможность проведенія черточекъ надлежащей длины должны получаться автоматически, такъ, чтобы все вниманіе наносящаго дѣленія могло сосредоточиться на ножѣ или остріи рѣзца, на томъ, чтобы черточки выходили, какъ слѣдуетъ, равномѣрно и ясно.

На рис. 121 представлена довольно простая дѣлительная машина. Здѣсь видны винтъ F, площадка G, на ней стержень LL' и рядомъ съ ней

Рис. 121.

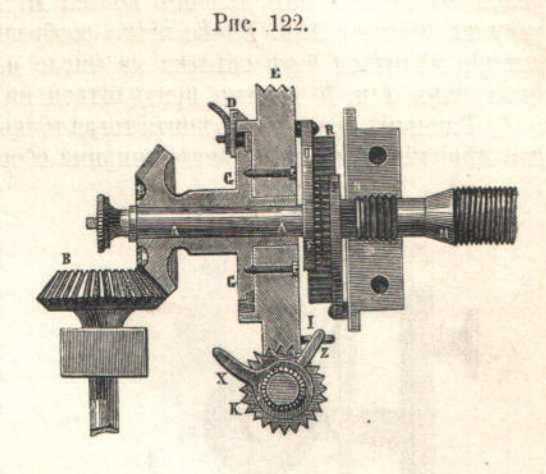


рѣзецъ, снабженный остріемъ H. Часть $ECBB'$, приводимая въ движеніе рукояткою A и служащая для автоматическаго поворотъ винта на данный уголъ, отдѣльно изображена на черт. 122, а рѣзецъ на черт. 123.

Вращеніе ручки A передается посредствомъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ конусообразныхъ зубчатыхъ колесъ BB (черт. 122) части BGE свободно насаженной на продолженную ось AA винта NM, на которую кромѣ того наглухо насажено зубчатое колесо R, при вращеніи котораго вращается слѣд. и винтъ. Въ зубцы колеса R упирается пружина UF, расположенная такимъ образомъ, что при вращеніи части BGE по часовой стрѣлкѣ (если смотрѣть слѣва) конецъ F этой пружины свободно перескакиваетъ по зубцамъ, такъ что ось AAM остается неподвижною; пружина $У$, прикрѣпленная къ чугунной рамѣ (MM на черт. 121), поддерживающей винтъ, мѣшаетъ при этомъ пружинѣ UF увлекать за собою колесо R. При обратномъ вращеніи рукоятки, а слѣд. и части BGE конецъ F пружины упирается въ одинъ изъ зубчиковъ колеса R, которое вмѣстѣ съ винтомъ M поворачивается такъ, какъ еслибы часть BGE была наглухо

насажена на ось AA. Для того, чтобы поворачиваніе рукоятки A, а слѣд. и винта, всегда происходило на одинъ и тотъ же заданный уголъ, имѣется узкій цилиндръ E, снабженный винтовою нарѣзкою, съ которой сцѣплено зубчатое колесо K, и двумя выступами I и D, изъ которыхъ послѣдній можетъ быть закрѣпленъ въ любой точкѣ окружности круга GG, такъ что угловое разстояніе выступовъ I и D можетъ быть сдѣлано какимъ угодно. На ось колеса K насажены еще два выступа Z и X, которые также могутъ быть закрѣплены въ любомъ другъ отъ друга угловомъ разстояніи. Легко понять, что при вращеніи системы BGE на 360^0 колесо K поворачивается на одинъ зубецъ. Вращеніе системы BGE, а слѣд. и рукоятки A (черт. 121) обратно часовой стрѣлкѣ (если смотрѣть слѣва, черт. 122) задерживается, когда выступъ I ударитъ въ выступъ Z; вращеніе въ обратную сторону останавливается, когда D дойдетъ до X.

Рис. 122.



Теперь легко понять, какимъ образомъ получить повторенныя вращенія винта на данный уголъ и, какъ слѣдствіе, поступательныя движенія площадки GG (черт. 121) на заданную линейную величину. Положимъ, что ширина винтового хода равна 1 мм. и что требуется на стержнѣ нанести дѣленія въ $\frac{1}{n}$-тую долю миллиметра. Тогда устанавливаютъ выступъ D такъ, чтобы его угловое разстояніе отъ выступа I равнялось $\frac{1}{n}$-той части окружности; въ то же время закрѣпляютъ выступы Z и X такимъ образомъ, чтобы I и D съ ними встрѣчались при поворотахъ системы BGE въ ту или другую сторону на $\frac{360}{n}$ градусовъ. Если напр. дѣленія масштаба должны равняться $0,1 - 0,25 - 0,5$ или 1 мм., то угловыя разстоянія I и D соотвѣтственно должны равняться 36^0, 90^0, 180^0 и 360^0 или 0^0 (т. е. I и D должны быть расположены другъ противъ друга). Если дѣленія масштаба должны быть больше одного миллиметра и напр. равняться 1,5 или 5 мм., то выступъ X слѣдуетъ перемѣстить въ сторону такъ, чтобы D могъ одинъ или, во второмъ случаѣ, четыре раза свободно пройти мимо колеса K и только при второмъ или, соотвѣтственно, пятомъ оборотѣ удариться въ выступъ X, который вмѣстѣ съ колесомъ K медленно поворачивается въ ту или другую сторону. Понятно, что въ первомъ случаѣ угловое разстояніе выступовъ I и D должно равняться 180^0, а во второмъ 0^0.

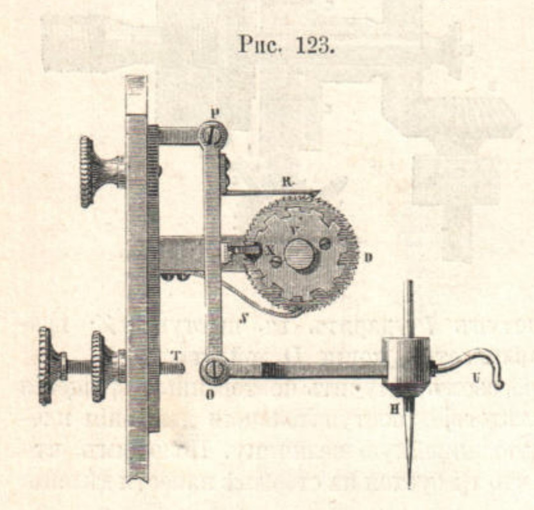
Вращая рукоятку попеременно въ ту и другую стороны до взаимнаго соприкосновенія двухъ выступовъ I и Z или D и X, мы при вращеніи влѣво (обратно часовой стрѣлкѣ) оставляемъ винтъ неподвижнымъ; при

вращеніи направо поварачиваемъ винтъ на опредѣленный уголъ и перемѣщаемъ площадку на заданную линейную величину.

Чтобы вращеніе колеса *R* и винта начинались одновременно съ вращеніемъ части *BGE*, необходимо, чтобы конецъ пружины *UF* плотно упирался въ одинъ изъ зубцовъ колеса *R*, когда положеніе частей соотвѣтствуетъ чертежу 122. Далѣе легко сообразить, что число зубцовъ колеса *R* должно дѣлиться безъ остатка на число *n*, т.-е., что на угловое разстояніе выступовъ *I* и *X* должно приходиться на колесѣ *R* цѣлое число зубцовъ.

Равнымъ вращеніемъ винта тогда только будутъ соотвѣтствовать равныя перемѣщенія площадки, когда ширина оборотовъ винта на всемъ протяженіи винта одна и та же. На дѣлѣ этого не бываетъ и потому нарѣзка винта дѣлительной машины должна быть подвергнута тщательному изслѣдованію; не слѣдуетъ также забывать о вліяніи температуры на ширину винтовой нарѣзки.

Рис. 123.

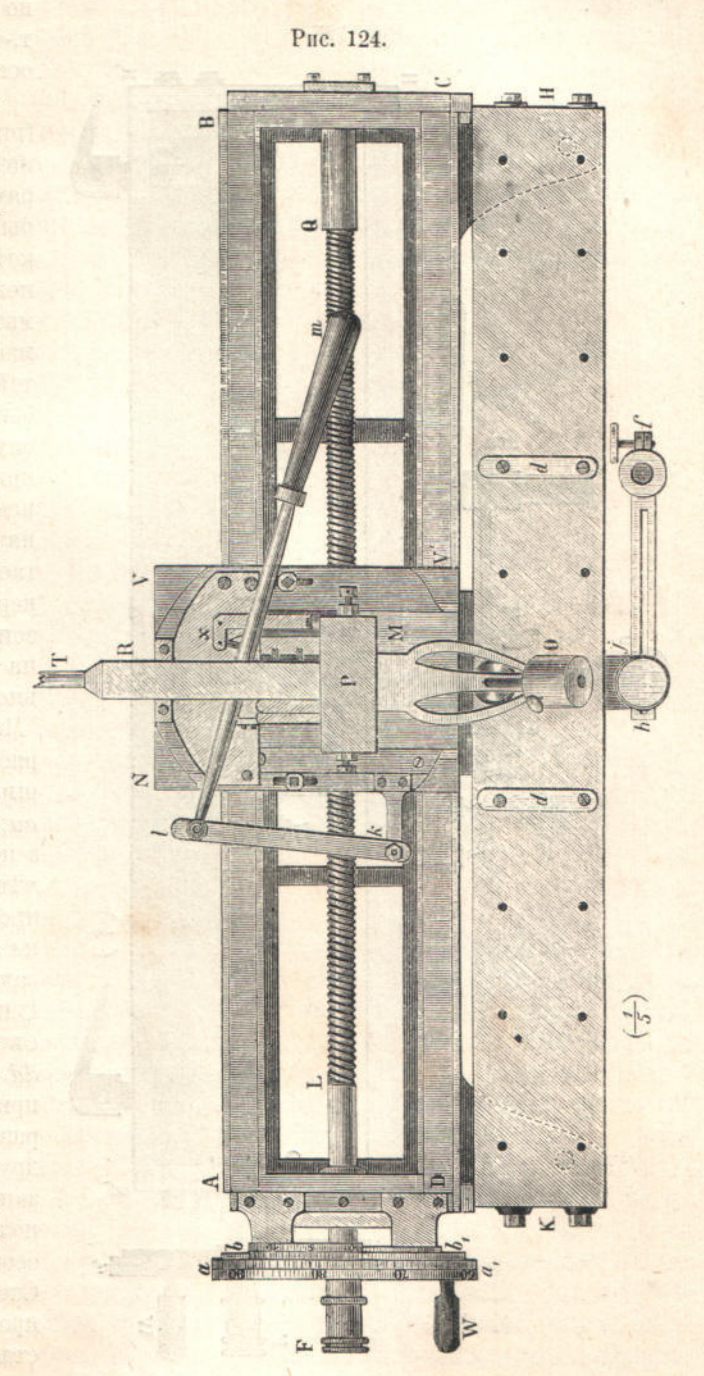


На рис. 123 изображенъ сравнительно весьма простой рѣзецъ, снабженный ножомъ *H*, который прикрѣпленъ къ рамкѣ *POH*, имѣющей въ *P* и *O* шарниры. Два зубчатыхъ колеса *D* и *V*, надѣтыя на общую ось, расположены такъ, что выступъ *X* находится въ плоскости меньшаго колеса *V*. На рис. 121 лучше видны рамка *PO* и вообще расположеніе частей рѣзца, изображеннаго на рис. 123 сбоку.

Черточки проводятся слѣдующимъ образомъ: поднявъ ножъ *H* за крючекъ *U*, перемѣщаютъ его направо до тѣхъ поръ, пока выступъ *X* не упрется въ край колеса *V*, опускаютъ ножъ на поверхность стержня, на которомъ желаютъ нарѣзать шкалу и отодвигаютъ его назадъ до тѣхъ поръ, пока нижняя часть *O* рамки (см. рис. 123 и 121) не упрется въ винтъ *T*, предварительно установленный надлежащимъ образомъ. Для полученія въ опредѣленномъ порядкѣ черточекъ различной длины служатъ впадины, соотвѣтственно распредѣленныя вдоль края колеса *V*, и пружина *R*, поворачивающая колесо *D*, а вмѣстѣ съ нимъ и колесо *V* на одинъ зубецъ перваго каждый разъ, когда ножъ и рамка перемѣщаются налѣво (въ смыслѣ чертежа 123), т. е. когда проводится черта. Выступъ *X* попеременно будетъ упираться на внѣшній край колеса *V* или входить въ одну изъ болѣе или менѣе глубокихъ впадинъ, вслѣдствіе чего черточки и будутъ выходить различной длины. Распредѣленіе и глубина впадинъ легко опредѣляются въ зависимости отъ того, въ какомъ порядкѣ должны чередоваться черточки и на какой уголъ поворачиваются колеса *D* и *V* при каждомъ перемѣщеніи рамки *PO*.

Переходимъ къ краткому описанію болѣе точной дѣлительной машины петербургскаго механика Брауэра; описаніе и рисунки заимствуемъ изъ курса физики проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскаго. Машина Брауэра изображена (въ $^1/_5$ ея величины) на черт. 124 въ планѣ, а на черт. 125 сбоку, если смотрѣть со сторонъ *KH* (на рис. 124). На черт. 126 изображенъ отдѣльно рѣзецъ и на черт. 127 одна его часть. На всѣхъ 4-хъ чертежахъ одинакія буквы соотвѣтствуютъ однѣмъ и тѣмъ же частямъ машины. Приводимое нами описаніе имѣетъ въ виду всѣ 4 чертежа, на которыхъ и слѣдуетъ отыскивать приводимыя буквы.

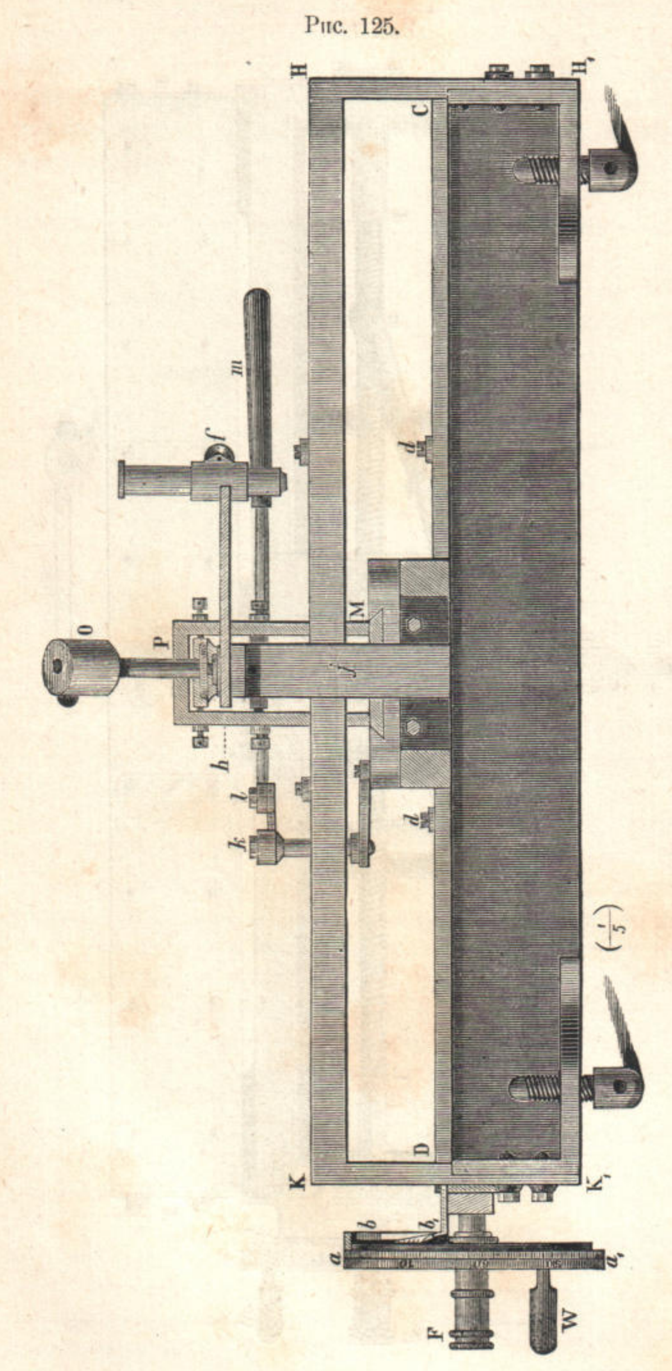
Рис. 124.



На рис. 124 виденъ винтъ *LQ*, на продолженную ось котораго насажена головка aa_1, раздѣленная на 100 частей; ноніусъ (см. ниже: Глава III, § 2) *b* даетъ возможность измѣрить уголъ поворота винта, производимаго рукояткою *W*, съ точностью до 0,001 окружности. Винтъ проходитъ черезъ гайку, прикрѣпленную къ салазкамъ *NVV'*, скользящимъ по верхнему краю рамы *ABCD*. На салазкахъ помѣщенъ рѣзецъ, который такимъ

образомъ перемѣщается параллельно винту, при его вращеніи. Между салазками находится пластинка *M* (рис. 126), которая можетъ имѣть движеніе по направленію длины, т.-е. перпендикулярно къ оси винта.

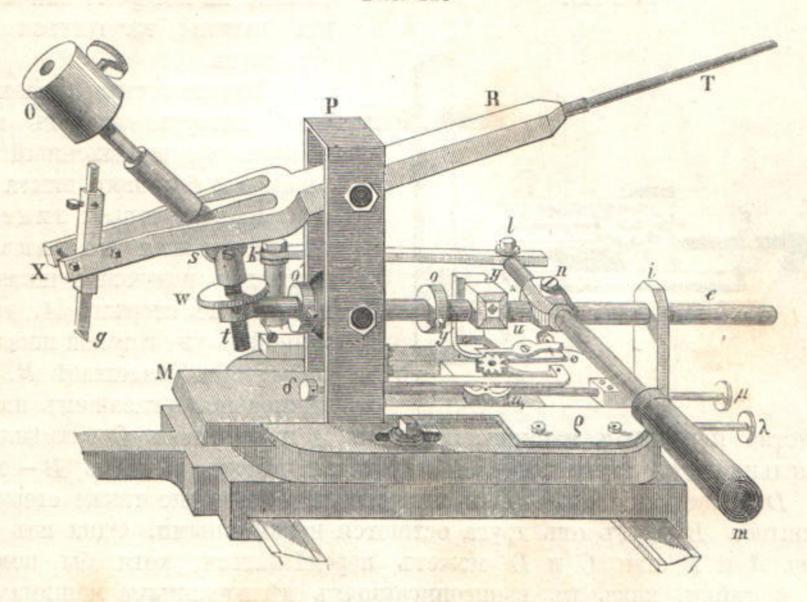
Рис. 125.



Устройство рѣзца (рис. 126 и 127) слѣдующее: Къ *M* придѣлана рама *P*, поддерживающая рычагъ *TRX*, къ концу котораго прикрѣпленъ ножъ *g*. Этотъ ножъ автоматически приподнимается, перемѣщается къ той точкѣ, гдѣ должно быть начало черточки, опускается внизъ до соприкосновенія острія съ поверхностью стержня, на которомъ предполагается начертить шкалу, перемѣщается въ горизонтальномъ направленіи на длину черточки и вновь приподнимается. Манипуляція повторяется, когда надлежащимъ вращеніемъ головки aa_1 (рис. 125) весь рѣзецъ передвинутъ до того мѣста, гдѣ должна быть проведена вторая черта на стержнѣ, неподвижно закрѣпленномъ на чугунномъ столикѣ *KH* съ помощью пластинокъ *dd*, которыя могутъ быть привинчены къ *KH* въ различныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ. Указанныя движенія ножа *g* получаются при помощи особыхъ частей машины. Стержень *e*, свободно проходящій черезъ подставку *i* и черезъ ша-

рикъ, находящійся внутри рамки P, приводится въ движеніе при помощи стержня kl, прикрѣпленнаго къ неподвижному столбику k и рычага lm, который скрѣпленъ съ нимъ въ n и который оканчивается рукояткою m. Двѣ круглыя пластинки o и o', ударяясь объ упомянутый шарикъ, ограничиваютъ скольженіе стержня e, который при помощи колесика s производитъ поднятіе или опусканіе ножа g. Если продолжать движеніе рукоятки m послѣ того, какъ o или o' коснулись шарика, то вся пластинка M приходитъ въ движеніе, а вмѣстѣ съ нею рама P и ножъ g. Такимъ образомъ получается перемѣщеніе опущеннаго рѣзца направо (это положеніе изображено на рис. 126), причемъ проводится черта, и обратное перемѣщеніе ножа, когда онъ приподнятъ. Для полученія черточекъ желаемой длины служатъ винты δ и μ (послѣдній не изображенъ на рис. 127), проходящіе черезъ части π и φ, составляющія одно цѣлое съ пластинкою ρ, которая прикрѣплена къ салазкамъ. Эти винты ограничиваютъ положеніемъ своихъ концовъ движеніе пластинки M въ салазкахъ, упираясь въ колесо u_1, вращающееся вмѣстѣ съ храповымъ колесомъ u около оси, вдѣланной въ пластинку M. Зацѣпка β, прикрѣпленный помощью изогнутой части yy къ стержню e, заставляетъ колесо u, снабженное всего десятью зубцами, повернуться на одинъ зубецъ, причемъ на одинаковый уголъ (36^0) поварачивается и колесо u_1. Это послѣднее снабжено двумя діаметрально противоположными выемками, глубина которыхъ можетъ быть регулирована винтиками (хорошо видно на рис. 127), помѣщенными на днѣ впадинъ. Черезъ каждыя четыре движенія взадъ и впередъ винтъ δ входитъ въ одну изъ впадинъ, вслѣдствіе чего пятая и десятая черты получаются длиннѣе и притомъ, обыкновенно, десятая длиннѣе пятой. Вращая

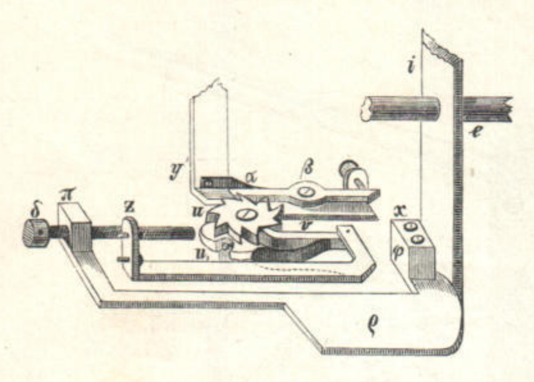
Рис. 126.



два упомянутыхъ винтика, можно вполнѣ уничтожить дѣйствіе выемокъ, если требуется, чтобы всѣ черточки имѣли одинаковую длину.

Для опредѣленія величины хода винта, т. е. перемѣщенія рѣзца при одномъ его полномъ оборотѣ, а также для изслѣдованія самого винта, помѣщаютъ на столикѣ *KH* (рис. 124) вѣрный масштабъ, наводятъ микроскопъ *f* (рис. 124 и 125), прикрѣпленный къ салазкамъ, на одну изъ его черточекъ и вращаютъ головку aa_1 винта до тѣхъ поръ, пока микроскопъ не передвинется на извѣстное число дѣленій масштаба. Искомый ходъ винта и будетъ равняться этому числу, дѣленному на число произведенныхъ оборотовъ винта. Затѣмъ уже легко опредѣлить тотъ уголъ, на который слѣдуетъ поворачивать головку aa_1 винта послѣ каждаго проведенія черточки, если дано разстояніе, на которомъ эти послѣднія должны находиться другъ отъ друга.

Рис. 127.



Мы не останавливаемся на роли, которую играетъ второй ноніусъ b_1, помѣщенный у головки aa_1 большого винта *LQ*.

Копирующая линейная дѣлительная машина служитъ для полученія шкалы на нѣкоторомъ стержнѣ *A*, тожественной съ уже готовой шкалой на образцовомъ масштабѣ *B*. Ограничиваемся указаніемъ на идею устройства подобныхъ машинъ. Стержень *A* и масштабъ *B* закрѣпляются параллельно другъ другу; надъ *A* находится рѣзецъ *C*, надъ *B* — микроскопъ *D*. Разстояніе рѣзца *C* и микроскопа *D* и точно также стержня *A* и масштаба *B* другъ отъ друга остаются неизмѣнными. Одна изъ двухъ системъ *A* и *B* или *C* и *D* можетъ перемѣщаться, хотя бы помощью винта и гайки, какъ въ вышеописанныхъ дѣлительныхъ машинахъ, по направленію длины стержня *A* и масштаба *B*. Копированіе производится слѣдующимъ образомъ. Перемѣщая подвижную систему, подводятъ одно изъ дѣленій масштаба подъ микроскопъ (т. е. заставляютъ его совпасть съ нитью, которая видна въ серединѣ поля зрѣнія микроскопа) и рѣзцомъ проводятъ черту по стержню *A*. Затѣмъ подводятъ сосѣднее съ первымъ дѣленіе масштаба подъ микроскопъ, опять проводятъ черту и повторяютъ то же самое съ такимъ числомъ дѣленій масштаба, сколько желаютъ нанести дѣленій на стержнѣ. Легко понять, что всякая обыкновенная дѣлительная машина, снабженная микроскопомъ, можетъ служить машиною копирующей, если рядомъ со стержнемъ, на которомъ должны быть нанесены дѣленія, можетъ быть закрѣпленъ образцовый масштабъ.

§ 2. Дѣлительная машина круговая. Она служитъ для нанесенія дѣленій на кругахъ, играющихъ наиболѣе важную роль въ приборахъ, въ которыхъ приходится измѣрять уголъ вращенія какой-либо ихъ части. Круго-

вая дѣлительная машина есть машина копировальная: она служитъ для перенесенія на данный кругъ тѣхъ дѣленій, которыя уже имѣются на готовомъ, горизонтально расположенномъ образцовомъ кругѣ, составляющемъ самую существенную и цѣнную ея часть.

Рис. 128.

Идея устройства дѣлительной круговой машины можетъ быть понята изъ схематическаго чертежа 128. Образцовый кругъ AA, насаженный на ось B и снабженный вдоль края зубцами, приводится во вращеніе при помощи безконечнаго винта E, головка C котораго имѣетъ дѣленія. Надъ дѣленіями круга AA помѣщается одинъ или нѣсколько микроскоповъ FF. Кругъ QQ, на который желаютъ перенести дѣленія круга AA закрѣпляется надъ послѣднимъ, концентрически съ нимъ, на общей оси B. Рѣзецъ R перемѣщается вдоль салазокъ, составляющихъ какъ бы мостъ MN, перекинутый черезъ кругъ AA, или расположенныхъ сбоку отъ него по направленію его радіуса. Смотря по величинѣ радіуса круга QQ, закрѣпляютъ рѣзецъ на такомъ мѣстѣ этихъ салазокъ, чтобъ остріе a ножа приходилось надъ тѣмъ мѣстомъ этого круга QQ, гдѣ желаютъ получить дѣленія. Вращая головку C винта E, подводятъ послѣдовательно одно дѣленіе круга AA за другимъ подъ микроскопъ F, и каждый разъ проводятъ ножомъ a черту по поверхности круга QQ, вращающагося вмѣстѣ съ кругомъ AA. Рѣзецъ и здѣсь устроенъ такъ, чтобы ножъ автоматически поднимался, опускался и проводилъ въ желаемой послѣдовательности черты различной длины.

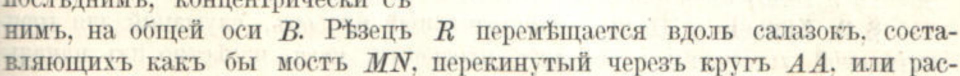
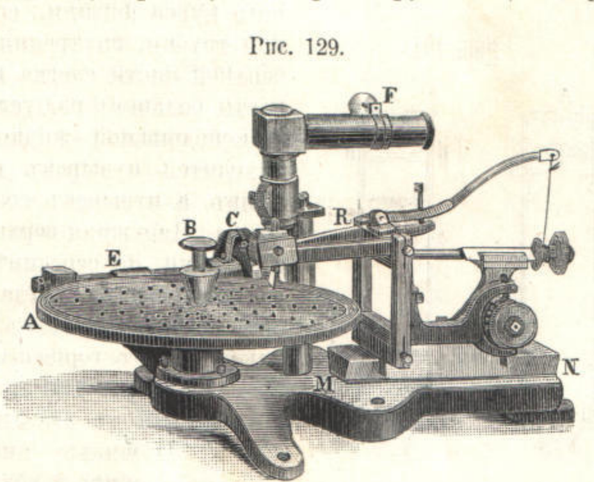


Рис. 129.

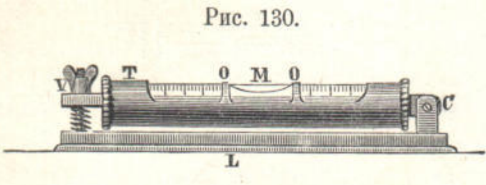


Если пользоваться дѣленіями головки C винта E, то можно, не прибѣгая къ микроскопамъ F, наносить на кругѣ QQ равноотстоящія дѣленія. Этимъ пользуются, когда не требуется большой точности или когда нано-

сятся дѣленія, которыя не должны непремѣнно соотвѣтствовать опредѣленнымъ, напередъ заданнымъ угловымъ величинамъ.

На черт. 129 изображена одна изъ круговыхъ дѣлительныхъ машинъ; буквы поставлены соотвѣтственно схемѣ на черт. 128. Кругъ QQ схемы здѣсь не изображенъ. Ясно видны образцовый кругъ A, безконечный винтъ E съ головкой C, снабженной ноніусомъ, часть B, служащая для закрѣпленія второго круга (QQ схемы) на общую съ кругомъ A ось, микроскопъ F (въ данномъ случаѣ ломанный) и рѣзецъ R, ножъ котораго можно установить на произвольномъ разстояніи отъ оси, перемѣщая рѣзецъ вдоль салазокъ MN, расположенныхъ здѣсь сбоку, а не въ видѣ моста. Спеціальное устройство рѣзца не разсматриваемъ. Кругъ A раздѣленъ на шестыя доли градуса; его діаметръ 25 см.

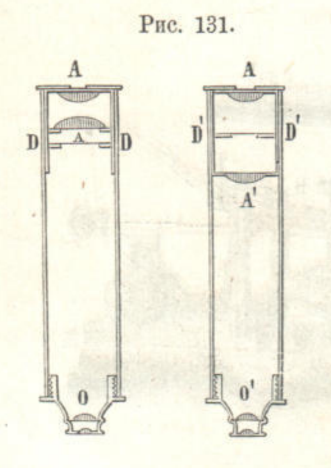
Рис. 130.



Въ 1893 г. была построена въ Вашингтонѣ круговая дѣлительная машина, производящая дѣленіе круговъ вполнѣ автоматически. Полное дѣленіе окружности на 360×12 частей (такъ что одно дѣленіе соотвѣтствуетъ 5 мин.) оканчивается втеченіе 8 часовъ.

§ 3. Уровень. Этотъ вспомогательный приборъ, служащій для горизонтальной установки какой-либо плоскости, какъ извѣстно изъ начальнаго курса физики, состоитъ изъ горизонтальной трубки, внутренняя поверхность которой въ верхней части слегка изогнута по дугѣ окружности большого радіуса. Трубка почти наполнена легкоподвижной жидкостью; кромѣ того въ ней находится пузырекъ газа; обыкновенно берутъ эфиръ, а пузырекъ состоитъ изъ паровъ того же эфира. Наружная верхняя поверхность снабжена дѣленіями, на серединѣ которыхъ и устанавливается пузырекъ, когда ось трубки горизонтальна; онъ перемѣщается въ сторону, когда эта ось наклонена къ горизонту.

Рис. 131.



На черт. 130 изображенъ уровень, прикрѣпленный къ пластинкѣ L; пузырекъ виденъ въ M. Помощью винта V слѣдуетъ прежде всего установить трубку такъ, чтобы пузырекъ M находился между точками OO, когда нижняя поверхность L строго горизонтальна. Манипуляціи, коими это достигается, мы, какъ и всѣ подобныя, опускаемъ.

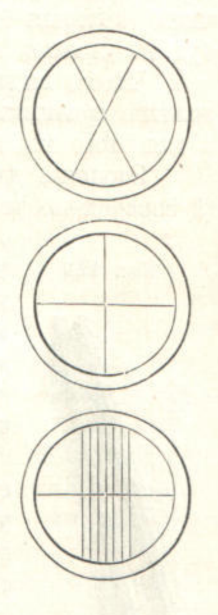
Данная плоскость горизонтальна, когда въ двухъ уровняхъ, расположенныхъ на ней въ направленіяхъ взаимно перпендикулярныхъ, пузырьки устанавливаются въ серединѣ. Можно пользоваться и однимъ уровнемъ, послѣдовательно наблюдаемымъ въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ положеніяхъ.

Существуютъ круглые уровни, нижняя поверхность крышки которыхъ есть малая часть поверхности сферы большого радiуса. Горизонтальность поверхности, на которой помѣщенъ такой уровень, обнаруживается тѣмъ, что пузырекъ устанавливается въ серединѣ крышки, отмѣченной маленькимъ кружкомъ. Эти уровни менѣе чувствительны, чѣмъ цилиндрическiе.

Необходимо имѣть въ виду, что размѣры пузырька въ значительной степени мѣняются въ зависимости отъ температуры.

§ 4. Лупа, микроскопъ и зрительная труба. Для детальнаго разсматриванiя мелкихъ дѣленiй или другихъ малыхъ предметовъ приспособляютъ ко многимъ приборамъ удобоподвижныя лупы или микроскопы; хорошее освѣщенiе разсматриваемаго объекта играетъ при этомъ весьма важную роль. Для разсматриванiя болѣе удаленныхъ предметовъ употребляютъ зрительныя трубы; онѣ, равно какъ и микроскопы, даютъ вообще изображенiя обратныя.

Рис. 132.



Какъ извѣстно, микроскопы и зрительныя трубы содержатъ двѣ системы стеколъ, предметную (объективъ) и глазную (окуляръ). Предметная система даетъ обратное дѣйствительное изображенiе въ фокальной плоскости, лежащей отъ нея дальше главнаго фокуса. Это изображенiе и разсматривается при помощи окуляра, играющаго роль простой или сложной лупы, дающей увеличенное, мнимое изображенiе. Въ фокальной плоскости, которая въ зрительныхъ трубахъ всегда близка къ главному фокусу предметной системы, помѣщаютъ весьма тонкiя нити (проволоки или паутина), которыя и видны въ полѣ зрѣнiя одновременно съ разсматриваемымъ предметомъ. На рис. 131 изображены, въ продольномъ разрѣзѣ два микроскопа. O и O' предметная, болѣе или менѣе сложная система стеколъ, которая въ лѣвомъ чертежѣ даетъ изображенiе предмета въ фокальной плоскости DD, содержащей нити. Глазная система состоитъ изъ двухъ плосковыпуклыхъ стеколъ, обращенныхъ выпуклостями другъ къ другу и составляющихъ т. наз. окуляръ Рамздена. На правомъ чертежѣ изображенъ окуляръ Гюйгенса: два плосковыпуклыхъ стекла обращены оба плоскими сторонами къ глазу наблюдателя. Фокальная плоскость $D'D'$ и нити расположены между стеклами, такъ что, строго говоря, внутреннее стекло A' слѣдовало бы считать за часть предметной системы.

На рис. 132 изображены кольца, которыя помѣщаются въ фокальныхъ плоскостяхъ микроскоповъ и зрительныхъ трубъ, съ натянутыми на нихъ системами нитей, различно расположенныхъ, смотря по цѣлямъ, для которыхъ назначенъ приборъ.

Подробности объ устройствѣ зрительныхъ трубъ будутъ изложены во второмъ томѣ.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

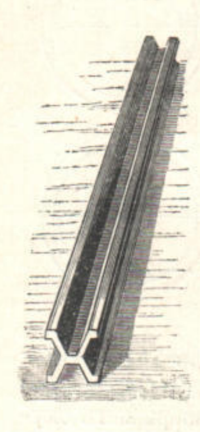
Измѣреніе линейныхъ размѣровъ тѣлъ.

§ 1. Эталоны длины. Въ предыдущей главѣ мы разсмотрѣли небольшое число приборовъ, которые не могутъ быть непосредственно причислены къ измѣрительнымъ приборамъ, но которые играютъ важную роль или при изготовленіи послѣднихъ, или какъ ихъ составныя части. Въ остальныхъ главахъ этого отдѣла мы разсмотримъ способы измѣренія нѣкоторыхъ величинъ, уже упомянутыхъ на стр. 234; какъ измѣряются остальныя величины, которыя будутъ встрѣчаться въ дальнѣйшихъ частяхъ нашего курса, будетъ указано въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ.

Чтобы имѣть возможность производить точныя измѣренія длины, мы должны сравнить шкалы нашихъ приборовъ со шкалою завѣдомо вѣрною, а для этого мы должны имѣть точные эталоны длины.

Эталоны длины бываютъ двухъ родовъ: 1) эталоны концевые (à bout), мало точные, въ которыхъ длина опредѣляется разстояніемъ при опредѣленной температурѣ двухъ параллельныхъ касательныхъ плоскостей, проведенныхъ, перпендикулярно къ оси эталона, къ слабо закругленнымъ его концамъ; 2) эталоны нарѣзные (à trait), въ которыхъ представляемая ими длина равна разстоянію при опредѣленной температурѣ двухъ черточекъ, проведенныхъ на ихъ поверхности перпендикулярно къ ихъ длинѣ.

Рис. 133.



Точнѣйшіе эталоны метра изготовляются въ настоящее время въ Международномъ бюро мѣръ и вѣсовъ, учрежденномъ на общія средства всѣхъ цивилизованныхъ государствъ вблизи Парижа. Эти эталоны дѣлаются изъ сплава 90% платины и 10% иридія, плотность котораго 21,53; ихъ форма изображена на рис. 133. Поперечное сѣченіе, похожее на букву X, принято въ виду того, что при такой формѣ эталонъ наименѣе подверженъ гнутію. Крайнія черточки нарѣзаны на горизонтальной поверхности полоски, составляющей дно верхней впадины, на разстояніяхъ въ 1 см. отъ концовъ; эта поверхность проходитъ черезъ центръ тяжести эталона. Первичнымъ прототипомъ метра служитъ эталонъ, изготовленный въ 1799 г. (на немъ начертаны слова «pour tous les temps, pour tous les peuples»). Международной коммиссіей была сперва изготовлена копія съ этого эталона и затѣмъ уже съ нея скопированы тѣ первые 31 эталонъ, которые въ 1891 г. по жребію были распредѣлены между государствами, участвовавшими въ устройствѣ Международнаго бюро мѣръ и вѣсовъ. Россія получила при этомъ два эталона, а именно метры № 11 и № 28.

Метръ № 11 хранится при Академіи Наукъ; его длина

$$1 \text{ метръ} - 0{,}5\mu + [8{,}650t + 0{,}00100t^2]\mu,$$

гдѣ μ знакъ микрона, т.-е 0,001 мм., и t температура по Цельзіусу. Метръ № 28 находится въ Главной Палатѣ мѣръ и вѣсовъ; его длина

$$1 \text{ метръ} + 0{,}5\mu + [8{,}650t + 0{,}00100t^2]\mu.$$

Благодаря странной случайности оказывается такимъ образомъ, что среднее изъ длинъ этихъ двухъ метровъ при 0^0 какъ разъ равняется одному метру.

Истинная длина метра, нынѣ принятаго за единицу длины, опредѣляется совокупностью эталоновъ, распредѣленныхъ въ 1891 г. между государствами, служащихъ каждый въ своемъ государствѣ основнымъ прототипомъ единицы длины и не отличающихся между собою на величины, замѣтныя при современномъ развитіи техники и способовъ измѣреній, если, конечно, принять во вниманіе поправки, подобныя вышеприведеннымъ и данныя для каждаго изъ эталоновъ.

Guillaume (J. de phys. 1894 p. 218) предлагаетъ устраивать эталоны второго разряда (болѣе дешевые) изъ никкеля.

Для сравненія между собою различныхъ эталоновъ длины служитъ приборъ, называемый компараторомъ. Идея, на которой основано его устройство, будетъ указана ниже въ § 4.

Неоднократно поднимался вопросъ о возможности потери или постепеннаго измѣненія нынѣ установленной единицы длины, вслѣдствіе какихъ либо великихъ катастрофъ или вслѣдствіе постепенной порчи эталоновъ. Желательно было найти возможность съ точностью вновь возстановить длину метра, еслибы она была утеряна. Американскій ученый Michelson указалъ на такую возможность, основанную на опредѣленіи отношенія метра къ такой длинѣ, которая могла бы быть получена на основаніи наблюденій опредѣленнаго явленія, зависящаго только отъ основныхъ свойствъ матеріи или эфира. Такимъ явленіемъ представляется распространеніе свѣтовыхъ колебаній черезъ воздухъ, находящійся при опредѣленной температурѣ и при опредѣленномъ давленіи.

Мы неоднократно упоминали, что свѣтъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ гармоническое колебательное движеніе, которое распространяется въ особой средѣ, называемой эфиромъ. Разноцвѣтные лучи отличаются другъ отъ друга періодомъ колебанія и лучу каждаго даннаго цвѣта (преломляемости) соотвѣтствуетъ опредѣленная длина волны λ. По мысли Michelson'a слѣдуетъ принять длину волны опредѣленнаго луча при строго формулированныхъ условіяхъ какъ бы за первичную единицу длины и разъ навсегда опредѣлить ея отношеніе къ метру. Для этой цѣли Michelson выбралъ три луча, красный, зеленый и голубой, испускаемые накаленными парами кадмія. Michelson нашелъ, что въ воздухѣ при 15^0 С. и давленіи въ 0,76 метра

для луча краснаго . . . . . 1 метръ $= 1553163{,}6\ \lambda_1$.
для луча зеленаго. . . . . . 1 метръ $= 1966249{,}7\ \lambda_2$.
для луча голубого . . . . . 1 метръ $= 2083372{,}1\ \lambda_3$.

гдѣ λ_1, λ_2 и λ_3 длины волнъ трехъ выбранныхъ лучей.

Отсюда

$$\lambda_1 = 0{,}64384722\,\mu$$
$$\lambda_2 = 0{,}50858240\,\mu$$
$$\lambda_3 = 0{,}47999107\,\mu,$$

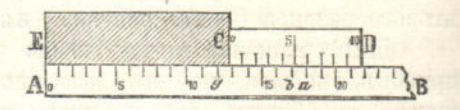
гдѣ $\mu = 0{,}001$ мм.

(Michelson, Traveaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures, t. XI; Journ. de phys. (3) 3 p. 5, 1894).

§ 2. Ноніусъ. Этотъ приборъ служитъ для отчета десятыхъ долей дѣленій на масштабахъ. Онъ представляетъ маленькую линейку, скользящую вдоль масштаба и снабженную десятью дѣленіями, общая длина которыхъ равна девяти (рис. 134) или одиннадцати (рис. 136) дѣленіямъ масштаба. Въ обоихъ случаяхъ одно дѣленіе ноніуса отличается отъ одного дѣленія масштаба на 0,1 послѣдняго. Въ первомъ случаѣ дѣленія ноніуса

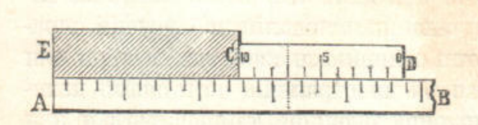
Рис. 134.

Рис. 135.



должны идти въ ту же сторону, какъ и дѣленія масштаба (рис. 134 и 135); во второмъ случаѣ дѣленія ноніуса идутъ въ противоположную сторону (рис. 136). На рис. 135 показано, какъ помощью ноніуса CD измѣряется длина EC на масштабѣ AB съ точностью до 0,1 дѣленія послѣдняго. Когда ноніусъ придвинутъ къ EC, то седьмое его дѣленіе совпадаетъ съ однимъ изъ дѣленій масштаба. Шестое дѣленіе ноніуса отстоитъ на 0,1 отъ ближайшаго дѣленія масштаба; пятое на 0,2, четвертое на 0,3 и т. д. Легко понять, что длина $EC = 12{,}7$ дѣленіямъ масштаба; такую же длину имѣетъ EC и на рис. 136.

Рис. 136.



У насъ употребляютъ почти исключитегьно ноніусы перваго рода и отчитывается та точка шкалы, противъ которой находится нулевая черта ноніуса. Цѣлыя дѣленія шкалы отчитываются непосредственно, а число десятыхъ долей дѣленія опредѣляется номеромъ той черты ноніуса, которая совпадаетъ съ чертою масштаба.

§ 3. Микрометры. Подъ этимъ названіемъ подразумѣваются приборы или приспособленія къ частямъ приборовъ, служащія для измѣренія линейныхъ размѣровъ весьма малыхъ тѣлъ.

Для измѣренія тѣлъ микроскопическихъ примѣняютъ иногда такой способъ. Въ фокальной плоскости объектива микроскопа, гдѣ могутъ находиться нити (стр. 261), помѣщаютъ тонкую стеклянную пластинку, на которой начерчены дѣленія ввидѣ параллельныхъ, довольно длинныхъ, равноотстоящихъ другъ отъ друга черточекъ, см. рис. 137 и 138; положимъ, что такихъ дѣленій n въ 1 мм. Черезъ окуляръ мы видимъ одновременно эти

дѣленія и изображеніе измѣряемаго предмета, полученное объективомъ, см. рис. 138. Такимъ образомъ непосредственно опредѣляются размѣры этого изображенія. Истинный размѣръ предмета въ k разъ меньше, если k увеличеніе, произведенное объективомъ. Чтобы опредѣлить k, разсматриваютъ

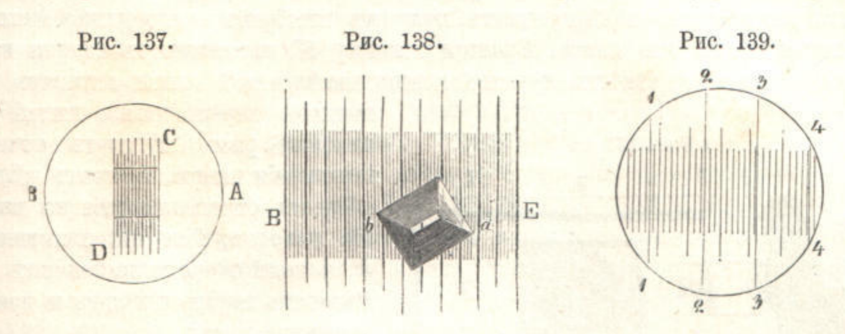
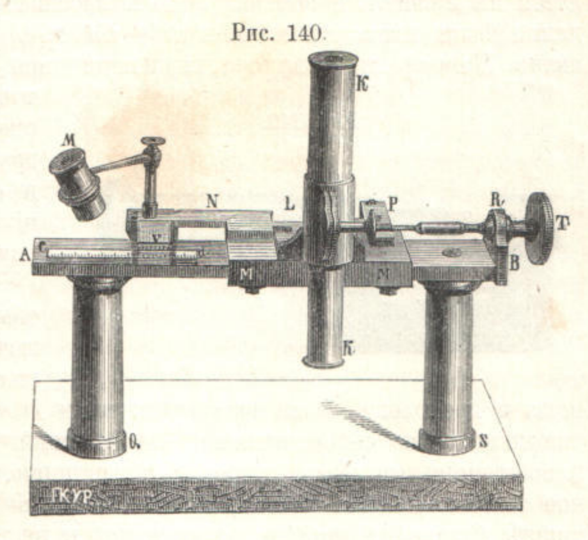


Рис. 137. Рис. 138. Рис. 139.

въ микроскопъ другую, настолько мелкую вспомогательную шкалу, чтобы въ полѣ зрѣнія были видны нѣсколько ея черточекъ; положимъ, что такихъ дѣленій m въ 1 мм. На рис. 139 изображено поле зрѣнія съ двумя одновременно видимыми шкалами, причемъ 1-1—2-2—3-3 суть дѣленія вспомогательной шкалы. Опредѣляютъ какое число дѣленій одной шкалы покрывается опредѣленнымъ числомъ другой, а отсюда сколько дѣленій окулярной шкалы (положимъ p) равны одному дѣленію изображенія вспомогательной шкалы, кажущаяся величина котораго равна $\frac{k}{m}$ мм. Равенство $\frac{k}{m} = \frac{p}{n}$ даетъ намъ искомое число k.

Рис. 140.

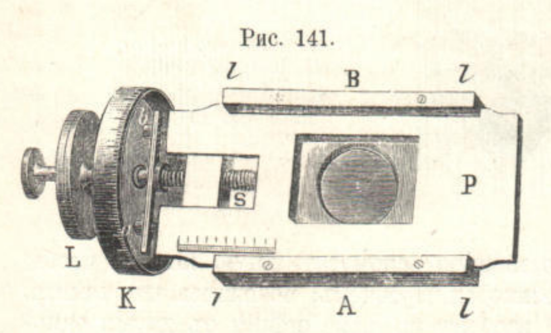


Существуетъ множество микрометровъ, въ которыхъ измѣреніе основано на опредѣленіи числа оборотовъ винта, снабженнаго весьма мелкой и правильной нарѣзкой и вращающагося въ соотвѣтствующей гайкѣ; такой винтъ называется микрометреннымъ. Части оборота винта отчитываются на его головкѣ, снабженной дѣленіями и неподвижнымъ указателемъ, или, иногда, ноніусомъ. Величиной вращенія винта и вызваннаго имъ поступательнаго движенія самаго винта или какой-либо части прибора, опредѣляются искомые размѣры тѣлъ.

На рис. 141 изображенъ микрометръ, могущій также служить для измѣренія линейныхъ размѣровъ малыхъ тѣлъ, помощью микроскопа, окуляръ котораго снабженъ нитями. Къ столику микроскопа придѣлана рамка

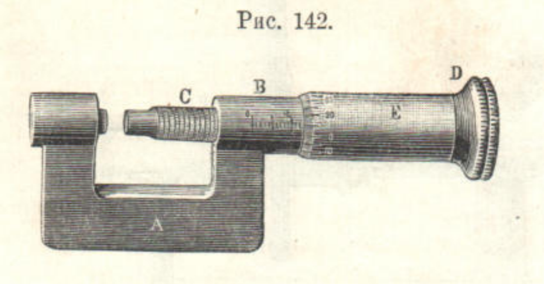
AB, связанная съ брускомъ *S*, въ которомъ вырѣзана гайка винта. Головка *K* скрѣпляется въ произвольномъ положеніи съ винтомъ при помощи кружка *L*. При вращеніи винта передвигается пластинка *P*, снабженная круглымъ отверстіемъ, которое прикрыто стеклышкомъ; на это стеклышко кладется разсматриваемый предметъ, причемъ измѣряемая его длина должна быть параллельна оси винта. Вращая головку *K*, заставляютъ сперва изображеніе одного, а затѣмъ другого конца измѣряемой линіи совпасть съ точкою пересѣченія нитей и каждый разъ дѣлаютъ отчетъ положенія винта, причемъ цѣлые обороты отчитываются на шкалѣ, находящейся на пластинкѣ *P*, а доли оборота на головкѣ *K*. Разность двухъ отчетовъ и даетъ искомую длину.

Рис. 141.



На рис. 140 изображенъ простой микрометръ; на столикѣ *AB* находится масштабъ *Cd*, параллельно которому перемѣщается часть *MM*, поддерживающая микроскопъ *KK* и ноніусъ *V*, для отчета котораго служитъ лупа *M*. Перемѣщеніе микроскопа производится вращеніемъ винтовой головки *T*. Предметъ кладется на нижнюю пластинку подъ микроскопъ *KK* такъ, чтобы измѣряемая длина была параллельна масштабу *Cd*, т.-е. направленію движенія микроскопа. Наводя нить окуляра, перпендикулярную къ этому направленію или точку пересѣченія двухъ нитей сперва на одинъ, а потомъ на другой конецъ измѣряемой длины и отсчитывая каждый разъ ноніусъ *V*, находимъ по разности двухъ отчетовъ эту длину.

Рис. 142.



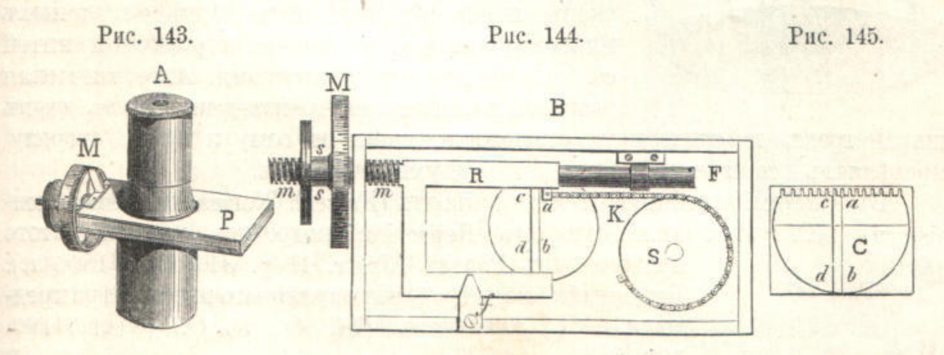
Къ микрометрамъ относятъ обыкновенно и приборъ, изображенный на рис. 142, и служащій для измѣренія толщины пластинокъ и проволокъ. Если вращать головку *D*, то трубка *E* и винтъ *C* получаютъ поступательное движеніе. Измѣряемый предметъ помѣщается между *C* и выступомъ съ лѣвой стороны; винтъ приводятъ сперва въ непосредственное соприкосновеніе съ выступомъ, причемъ дѣлается первый отчетъ на шкалѣ *B*, раздѣленной на миллиметры и на трубкѣ *E*, окружность которой раздѣлена на 100 частей. Когда лѣвый конецъ винта *C* упирается въ выступъ или въ измѣряемый предметъ, то дальнѣйшее вращеніе головки *D*, не плотно соединенной съ винтомъ, не увеличиваетъ степени нажатія винта на выступъ или тѣло.

§ 4. Окулярный микрометръ. Этотъ важный измѣрительный приборъ придѣлывается къ окуляру микроскоповъ и зрительныхъ трубъ. Онъ помѣщается въ плоской коробкѣ *P* (рис. 143), окружающей окулярную

трубку *A*. Снаружи видна головка *M* микрометреннаго винта, служащаго для перемѣщенія одной или нѣсколькихъ нитей окуляра параллельно самимъ себѣ. Внутреннее устройство микрометра показано на рис. 144. Ось *mF* винта проходитъ черезъ стѣнку коробки и черезъ кольцо и при вращеніи не имѣетъ поступательнаго движенія. Винтъ проходитъ черезъ гайку, къ которой прикрѣплена рамка *Rf*, а къ этой рамкѣ нить *cd*. Нарѣзки гайки прижимаются къ нарѣзкамъ винта при помощи цѣпочки *K* и пружины, находящейся внутри барабана *S*. Этимъ уменьшается мертвый ходъ винта. Дно коробки *B* снабжено круглымъ отверстіемъ; двѣ взаимно перпендикулярныя неподвижныя нити, изъ которыхъ на рис. 144 изображена только одна *ab*, а на отдѣльномъ рис. 145 показаны обѣ, расположены по діаметрамъ отверстія; ихъ точка пересѣченія должна лежать на оси прибора.

Если вращать головку *M* винта, то гайка, а съ нею и рамка *Rf* и нить *cd* перемѣщаются по направленію оси винта. Чтобы измѣрить длину какой либо линіи необходимо, чтобы ея изображеніе цѣликомъ было видно

Рис. 143. Рис. 144. Рис. 145.

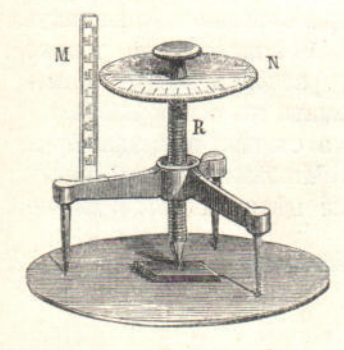


въ полѣ зрѣнія трубы и было расположено перпендикулярно къ нити *cd*. Вращая головку *M*, доводятъ нить *cd* сперва до одного, а затѣмъ до другого конца изображенія измѣряемой длины; разность отчетовъ даетъ намъ число оборотовъ винта, соотвѣтствующее длинѣ изображенія предмета. Чтобы узнать истинную длину линіи, слѣдуетъ опредѣлить т. наз. значеніе одного оборота винта, зависящее между прочимъ отъ разстоянія предмета отъ зрительной трубы, т.-е. истинную длину предмета, изображеніе котораго имѣетъ длину, равную перемѣщенію нити *cd* при одномъ оборотѣ винта. Для опредѣленія этой величины слѣдуетъ помѣстить точный масштабъ на мѣсто измѣряемаго предмета или параллельно ему, такъ чтобы изображенія по крайней мѣрѣ двухъ его черточекъ были видны въ полѣ зрѣнія и чтобы они были параллельны нити *cd*, которую заставляютъ совпасть сперва съ одной, а затѣмъ съ остальными видимыми черточками. Зная истинное значеніе дѣленій масштаба и опредѣливъ число оборотовъ винта, соотвѣтствующихъ перемѣщенію нити *cd* на одно его дѣленіе, мы уже легко получимъ ту длину на масштабѣ, которая соотвѣтствуетъ одному обороту винта.

На стр. 263 было упомянуто о компараторахъ, служащихъ для сравненія двухъ эталоновъ длины. Теперь не трудно будетъ понять идею

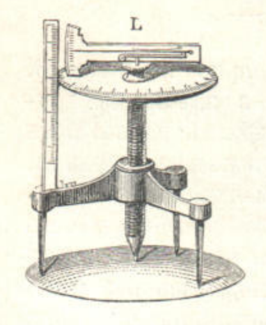
ихъ устройства. Компараторъ Brunner'а, которымъ пользуются въ Международномъ бюро мѣръ и вѣсовъ, имѣетъ слѣдующее устройство. Два микроскопа, снабженныхъ окулярными микрометрами, установлены вертикально, на разстояніи примѣрно одного метра другъ отъ друга. Каждый изъ нихъ прикрѣпленъ сбоку къ отдѣльному, весьма крѣпкому и неподвижному столбу со стороны, обращенной къ другому столбу. Подъ микроскопами находится длинный ящикъ, въ который рядомъ помѣщаются сравниваемые эталоны и который можетъ быть передвигаемъ по направленію, перпендикулярному къ его длинѣ, т.-е. къ вертикальной плоскости, проходящей черезъ оси микроскоповъ. Сперва подводятъ одинъ эталонъ подъ микроскопы и наводятъ пересѣченія нитей на конечныя черточки; затѣмъ передвигаютъ ящикъ, подводятъ другой эталонъ подъ микроскопы и передвигаютъ нити двухъ окулярныхъ микрометровъ до совпаденія пересѣченій нитей съ его конечными черточками. Алгебраическая разность перемѣщеній, произведенныхъ въ двухъ микрометрахъ и считаемыхъ положительными въ одну и ту же сторону, опредѣляетъ искомую разность длинъ двухъ эталоновъ.

Рис. 146.



Въ Берлинѣ коммиссія мѣръ и вѣсовъ (Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission) пользуется компараторомъ Repsold'а; подробное описаніе этого прибора далъ Pensky (Jnstr. 15 p. 313, 353, 1895 г.). Видоизмѣненіе устройства окулярнаго микрометра предложилъ Д. Дьяконовъ (Ж. Ф. Х. О., 18 стр. 120, 1886 г.).

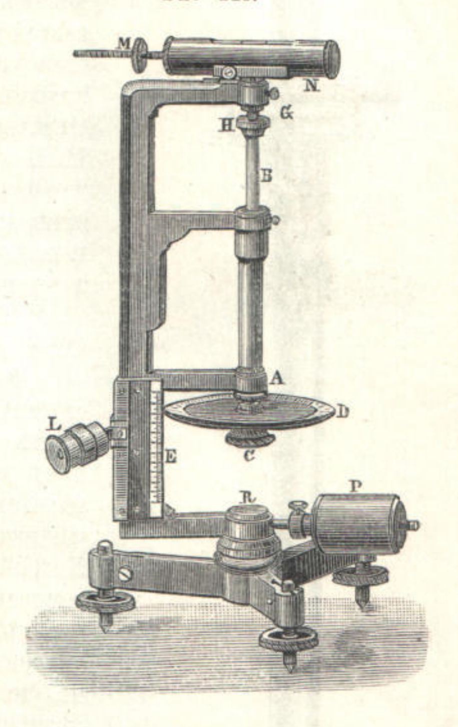
Рис. 147.



§ 5. Сферометръ. Этотъ приборъ служитъ для измѣренія толщины пластинокъ, а также для изслѣдованія неровностей на плоской поверхности и для измѣренія радіуса сферическихъ поверхностей, напр. оптическихъ стеколъ. Простой сферометръ, изображенный на рис. 146, состоитъ изъ треножника, въ серединѣ котораго находится гайка микрометреннаго винта *R*, снабженнаго головкой *N*. На окружности головки имѣется дѣленіе; обыкновенно окружность раздѣлена на 500 частей. При полномъ оборотѣ винта онъ перемѣщается на 1 мм. Шкала *M* служитъ для счета полныхъ оборотовъ. Опуская головку винта, стараются установить его въ положеніи, при которомъ нижнее его остріе какъ разъ касается поверхности пластинки, на которую поставленъ приборъ. Дѣлается это ощупью: когда остріе винта находится выше пластинки, то при легкихъ передвиженіяхъ прибора рукою, держащей головку *N*, онъ весь скользитъ по поверхности; если же остріе винта слишкомъ выдвинуто, то весь приборъ легко вращается около винта, какъ около оси, или даже качается около острія вслѣдствіе того, что одна изъ трехъ ножекъ оказывается нѣсколько приподнятою. Полезно ставить

сферометръ на резонаторный ящикъ камертона; тогда мелкія качанія прибора около средняго винта легче замѣчаются. Слѣдуетъ научиться улавливать моментъ соприкосновенія винта съ плоскостью. Для опредѣленія толщины какого либо предмета доводятъ винтъ сперва до прикосновенія съ плоскостью, на которой сферометръ установленъ, и дѣлаютъ отчетъ на шкалѣ *M* и на головкѣ *N* въ точкѣ, противъ которой находится вертикальное ребро шкалы *M*. Затѣмъ поднимаютъ винтъ, кладутъ подъ него измѣряемое тѣло, опускаютъ винтъ до соприкосновенія съ поверхностью этого тѣла и дѣлаютъ второй отчетъ. Разность двухъ отчетовъ опредѣляетъ искомую толщину предмета.

Рис. 148.

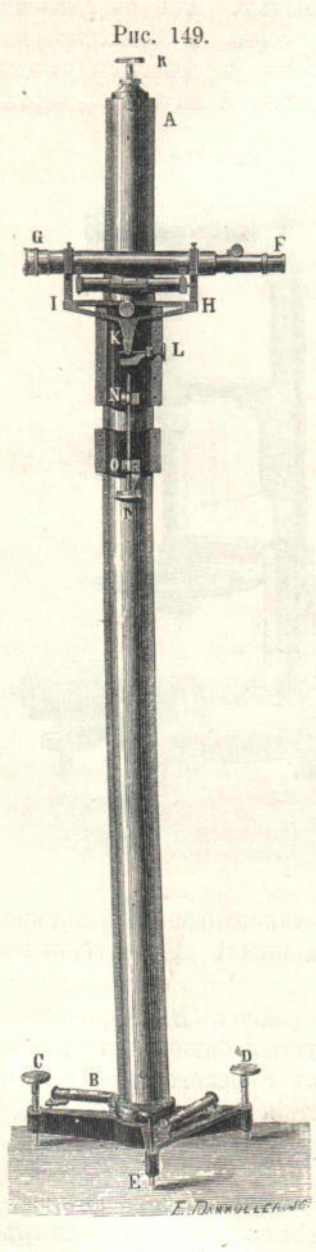


Точность измѣреній сферометромъ зависитъ отъ точности, съ которою отмѣчается моментъ, когда остріе винта касается поверхности, находящейся подъ нимъ. На рис. 147 изображенъ сферометръ Perreaux, въ которомъ моментъ соприкосновенія опредѣляется не ощупью, но отмѣчается самимъ приборомъ. Черезъ пробуравленную ось винта проходитъ штифтъ; нижній его конецъ нѣсколько выходитъ наружу, верхній упирается въ систему двухъ чувствительныхъ рычаговъ *L*. Штифтъ держится внутри винта вслѣдствіе легкаго тренія объ стѣнки канала. Когда винтъ опускается, то вмѣстѣ съ нимъ опускается штифтъ и остріе второго рычага остается неподвижнымъ. Но какъ только нижній конецъ штифта коснется поверхности тѣла, онъ останавливается и затѣмъ остріе рычага начинаетъ двигаться по маленькой шкалѣ при малѣйшемъ вращеніи винта далѣе въ ту же сторону.

Сферометромъ пользуются для опредѣленія радіуса R сферической поверхности, ограничивающей выпуклыя или вогнутыя оптическія стекла. Для этого опредѣляютъ высоту h мениска, радіусъ r основанія котораго равенъ радіусу окружности, проходящей черезъ острія трехъ ножекъ сферометра. Тогда $R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$. Для указанной цѣли болѣе удобны сферометры, основаніе которыхъ составляетъ тонкостѣнный круглый цилиндръ, радіусъ r котораго извѣстенъ (см. Czapski, Instr. 7, 1887, p. 297). Abbe построилъ сферометръ для опредѣленія радіуса R кривизны стеколъ, въ которомъ стекло с в е р х у накладывается на горизонтальный круглый край тонкостѣннаго цилиндра. Вертикальный стержень, перемѣщающійся вдоль оси этого цилиндра с н и з у подводится до поверхности стекла (см. Pulfrich, Instr. 12, p. 312, 1892).

На рис. 148 изображенъ весьма чувствительный сферометръ Вильда. Головка *D* микрометреннаго винта, расположена противъ шкалы *E*; отчетъ дѣлается при помощи микроскопа *L*. Винтъ оканчивается наверху маленькою площадкою *H*. на которую кладется тѣло, толщину котораго требуется измѣрить. Черезъ кольцо, находящееся надъ *H*, свободно проходитъ штифтикъ, нижній конецъ котораго имѣетъ форму клина; верхній, закругленный конецъ упирается въ чувствительный уровень, свободно вращающійся около оси, находящейся нѣсколько налѣво отъ штифтика. Отчеты производятся сперва безъ измѣряемаго тѣла, а потомъ, когда это тѣло находится на площадкѣ *H*, въ тѣ моменты, когда штифтикъ приводитъ уровень въ горизонтальное положеніе, т.-е. когда пузырекъ уровня находится въ среднемъ положеніи.

Рис. 149.



Весьма чувствительный сферометръ построилъ Common, см. Nature (англійскій) 48 р. 396, 1893 г.

§ 6. Катетометръ. Этотъ важный приборъ служитъ для измѣренія вертикальнаго разстоянія двухъ точекъ. Отличаютъ катетометры съ одной и съ двумя трубами. На рис. 149 изображенъ катетометръ съ одной трубой, а на рис. 150 труба и ближайшія къ ней части въ бóльшемъ масштабѣ. Устройство прибора слѣдующее. На чугунномъ основаніи, стоящемъ на трехъ винтовыхъ ножкахъ *CDE*, укрѣпленъ желѣзный круглый столбъ, который находится внутри столба, изображеннаго на рисункѣ. При помощи двухъ уровней *B* желѣзный столбъ устанавливается приблизительно вертикально. На него надѣтъ мѣдный цилиндръ, упирающійся внизу на расширенную часть столба; сверху онъ оканчивается конусомъ, черезъ который проходитъ винтъ *R*, упирающійся въ углубленіе, выточенное въ верхнемъ основаніи желѣзнаго цилиндра. Это даетъ возможность вращать мѣдный цилиндръ вокругъ желѣзнаго столба; для закрѣпленія его въ опредѣленномъ положеніи служитъ винтъ, не изображенный на рисункѣ. На мѣдномъ цилиндрѣ находятся двѣ линейки *AA* и *SS* (рис. 150); на одной изъ нихъ начерчены дѣленія, обыкновенно миллиметры. Подвижная часть, съ которой связана зрительная труба *GF*, состоитъ изъ двухъ колецъ *PN* и *O*, обхватывающихъ мѣдный цилиндръ. Они могутъ быть передвинуты къ произвольному мѣсту цилиндра и закрѣплены на немъ. Если закрѣпить только

кольцо O, то вращеніемъ головки M микрометреннаго винта, проходящаго черезъ гайку N (въ гнѣздѣ O онъ только вращается), можно произвести медленное опусканіе или подниманіе кольца PN, а вмѣстѣ съ нимъ и трубы GF. Вращеніе этой трубы около оси P производится винтомъ L, проходящимъ черезъ гайку, расположенную на концѣ выступа K. Уровень IH расположенъ подъ зрительною трубою; въ окулярѣ трубы натянуты перекрестныя нити.

Рис. 150.

Прежде чѣмъ пользоваться катетометромъ, слѣдуетъ произвести правильную его установку. Ограничиваемся перечнемъ условій, которымъ эта установка должна удовлетворять и весьма краткимъ указаніемъ на то, какъ выполнить эти условія.

1. Оптическая ось трубы, проходящая черезъ точку пересѣченія нитей, должна совпадать съ его геометрической осью. Это будетъ достигнуто, когда нити будутъ установлены такъ, чтобы изображеніе какой либо точки предмета, наблюдаемой черезъ трубу, не сходило съ пересѣченія нитей при вращеніи трубы около ея оси.

2. Ось уровня должна быть параллельна оси трубы, т.-е. пузырекъ долженъ занимать среднее положеніе, когда ось трубы горизонтальна. Для этого дѣйствуютъ винтомъ L и винтомъ, находящимся при уровнѣ со стороны I, до тѣхъ поръ, пока при перекладываніи трубы вмѣстѣ съ уровнемъ такъ, чтобы окуляръ и объективъ обмѣнялись своими положеніями, пузырекъ не останется въ среднемъ положеніи.

3. Ось катетометра должна быть строго вертикальна и слѣд. перпендикулярна къ оси трубы и уровня. Это достигается вращеніемъ винта L и винтовыхъ ножекъ CDE (рис. 149) до тѣхъ поръ, пока при четырехъ положеніяхъ мѣднаго цилиндра, получающихся поворачиваніемъ его на 90°, пузырекъ уровня не останется въ своемъ среднемъ положеніи.

Чтобъ измѣрить вертикальное разстояніе двухъ точекъ, т.-е. опредѣ-

лить, на сколько одна изъ двухъ точекъ, которыя могутъ и не лежать въ одной вертикальной линіи, выше другой, устанавливаютъ зрительную трубу на такой высотѣ, чтобъ сперва изображеніе первой точки совпадало съ точкою пересѣченія нитей. Затѣмъ дѣлаютъ отчетъ на шкалѣ катетометра, пользуясь ноніусомъ, соединеннымъ съ кольцомъ PN. То же самое повторяютъ послѣ того, какъ изображеніе второй точки было приведено въ совпаденіе съ точкою пересѣченія нитей; при этомъ приходится поднять или опустить трубу и кромѣ того мѣдный цилиндръ повернуть около вертикальной оси, если обѣ точки не находятся на одной вертикальной линіи. Разность полученныхъ двухъ отчетовъ и даетъ намъ искомое вертикальное разстояніе точекъ.

Существуютъ катетометры съ двумя трубами, снабженными каждая окулярнымъ микрометромъ, въ которомъ подвижная нить должна быть горизонтальна.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Измѣреніе угловъ.

§ 1. Верньеръ. Для измѣренія угловъ служатъ вообще приборы, снабженные кругами съ дѣленіями, нанесенными круговою дѣлительною машиною (стр. 259). Приборы устроены такъ, чтобы искомый уголъ могъ измѣряться угломъ между двумя радіусами этого круга и чтобы онъ опредѣлялся разностью двухъ отчетовъ, произведенныхъ на дѣленіяхъ круга. Для отчета служитъ черта, находящаяся рядомъ съ дѣленіями на другой пластинкѣ. Возможны два случая: 1) кругъ неподвиженъ, а пластинка съ чертою вращается около центра круга; ея перемѣщеніе вдоль окружности круга и опредѣляетъ измѣряемый уголъ; 2) пластинка съ чертою неподвижна, вращается весь кругъ съ дѣленіями. Иногда пластинка замѣняется цѣлымъ кругомъ, охватывающимъ кругъ съ дѣленіями или находящимся внутри его, если дѣленія нанесены на плоской поверхности кольца. Въ этомъ случаѣ вмѣсто одной черточки употребляютъ двѣ, расположенныя на концахъ діаметра круга или четыре, находящіяся на угловомъ разстояніи въ 90° другъ отъ друга. Этимъ уменьшается погрѣшность наблюденій, могущая произойти отъ неправильной центрировки круговъ.

Для достиженія большей точности измѣренія, а именно для отчета десятыхъ долей дѣленій, служатъ вспомогательные масштабы, аналогичные ноніусамъ (стр. 264); ихъ называютъ верньерами. Они отличаются отъ ноніусовъ во-первыхъ тѣмъ, что дѣленія нанесены по дугѣ круга, а не по прямой, и во-вторыхъ тѣмъ, что число дѣленій, вообще говоря, не равно 10.

Дѣло въ томъ, что круговыя дѣленія устраиваются чрезвычайно разнообразно; цѣлые градусы дѣлятся напр. на 2, 3, 4, 6, 12 равныхъ частей. Поэтому и значеніе одного дѣленія верньера для отчета, т.-е. разность угла его дѣленія и дѣленія основной шкалы, могутъ быть

весьма различны. Чтобы въ каждомъ данномъ случаѣ разобраться, слѣдуетъ сперва посмотрѣть, чему равно одно дѣленіе шкалы (положимъ p^0) и затѣмъ, какое число $(n-1)$ дѣленій шкалы равно n дѣленіямъ верньера. Въ такомъ случаѣ при отчетѣ каждое дѣленіе верньера соотвѣтствуетъ угловой величинѣ $\alpha^0 = \left(\frac{p}{n}\right)^0$. Вотъ нѣсколько примѣровъ:

1. Дѣленія шкалы суть полуградусы (30′); верньеръ содержитъ 30 дѣленій, которыя равны 29 дѣленіямъ шкалы. При отчетѣ, т.-е. опредѣленіи того мѣста, гдѣ находится нулевая черта верньера, непосредственно отчитываются полуградусы. Каждое изъ дѣленій верньера отъ нулеваго до

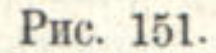
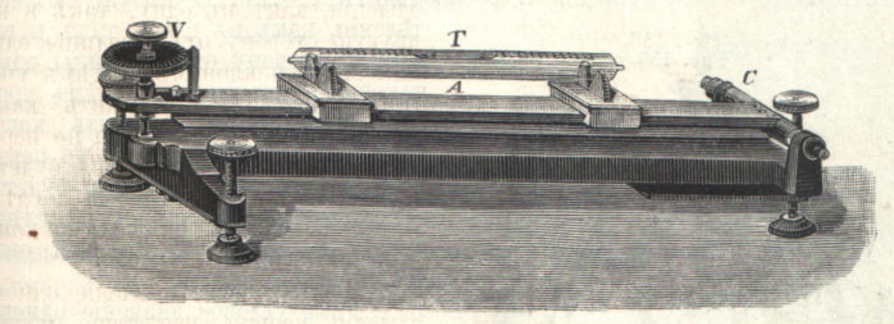


Рис. 151.



того, которое совпадаетъ съ однимъ изъ дѣленій шкалы, соотвѣтствуетъ при отчетѣ величинѣ $\alpha = 1'$.

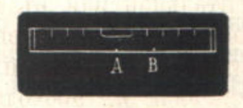
2. Градусы раздѣлены на три части (по 20′) и 20 дѣленій верньера равны 19 дѣленіямъ шкалы; и здѣсь $\alpha = 1'$.

3. Градусы раздѣлены на четыре части (по 15′) и 45 дѣленій верньера равны 44 дѣленіямъ шкалы; $\alpha = \frac{1'}{3} = 20''$. Въ этомъ случаѣ каждая третья черта верньера дѣлается длиннѣе другихъ: она соотвѣтствуетъ минутамъ.

4. Градусы раздѣлены на 12 частей, по 5′ каждая; 60 дѣленій верньера равны 59 дѣленіямъ шкалы; $\alpha = 5''$. На верньерѣ выдѣляется каждая четвертая черта.

§ 2. Уровень. Правильно устроенный уровень, вертикальное продольное сѣченіе котораго представляется съ внутренней стороны дугою круга большого радіуса, можетъ служить какъ угломѣрный снарядъ, если разъ навсегда опредѣлено угловое значеніе (т. наз. цѣна) одного дѣленія, т.-е. уголъ, на который должна быть наклонена ось уровня, чтобы пузырекъ (его край) перемѣстился на одно дѣленіе. Для опредѣленія этой величины служитъ приборъ, изображенный на рис. 151. Чугунная плита, имѣющая форму буквы T, стоитъ на трехъ винтовыхъ ножкахъ. Полоса A, на которую кладется изслѣдуемый уровень T, вращается около оси C; черезъ другой ея конецъ проходитъ микрометренный винтъ V, полные обороты котораго отчиты-

Рис. 152.



ваются на рядомъ стоящей шкалѣ, а дроби по дѣленіямъ, начертаннымъ на его головкѣ. Зная величину a винтового хода и разстояніе l отъ точки опоры винта до оси C, мы получаемъ уголъ φ, на который наклонится ось уровня, если винтъ повернуть на n оборотовъ, по формулѣ

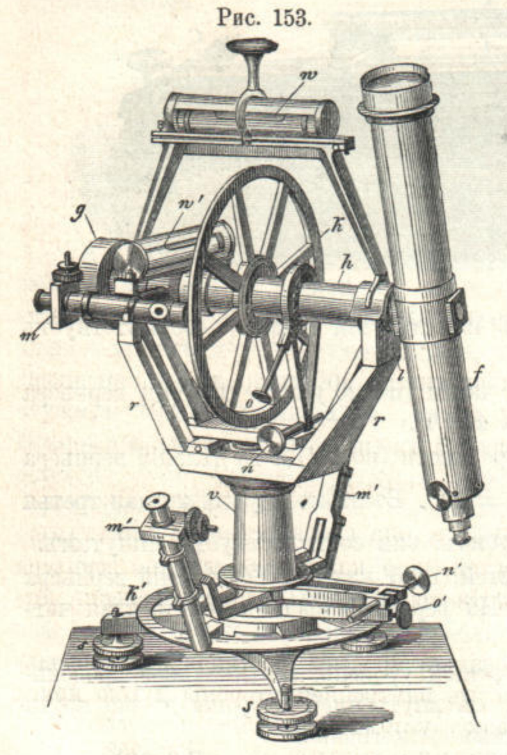
$$\sin\varphi = \frac{na}{l},$$

или, въ секундахъ

$$\varphi'' = \frac{na}{l \sin 1''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Такимъ образомъ можно опредѣлить угловое значеніе одного дѣленія и изслѣдовать самый уровень, т.-е. опредѣлить, соотвѣтствуютъ ли всѣ его дѣленія, какъ въ одну, такъ и въ другую сторону отъ середины, одинаковымъ наклонамъ. Затѣмъ уровень уже можетъ служить какъ угломѣрный снарядъ, ибо по перемѣщенію пузырька можно будетъ судить о наклонѣ его оси, а слѣд. и той плоскости, на которой онъ установленъ.

Рис. 153.



Разъ угловое значеніе одного дѣленія уровня извѣстно, можно имъ пользоваться и для измѣренія малыхъ линейныхъ величинъ, напр. выпуклостей или вообще неровностей на плоскости. Положимъ, что перемѣщеніе пузырька указываетъ на наклонъ φ'' его оси и что разстояніе двухъ точекъ A и B (рис. 152) его основанія равно l; тогда формула $x = l\varphi \sin 1''$ даетъ намъ линейную мѣру возвышенія одной изъ точекъ A или B надъ другой.

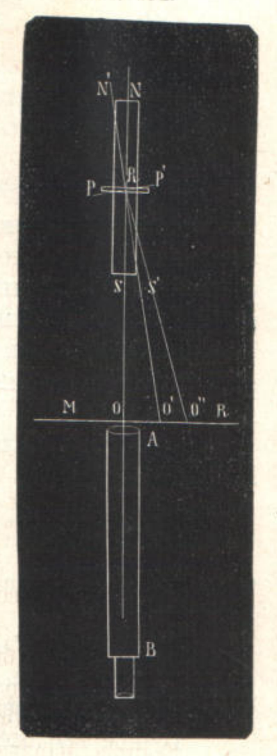
§ 3. Теодолитъ. Этотъ приборъ, служащій для измѣренія угловъ, расположенныхъ въ горизонтальной или въ вертикальной плоскости, т.-е. разности двухъ азимутовъ или двухъ высотъ, изображенъ на рис. 153. Онъ состоитъ изъ слѣдующихъ частей: Зрительная труба f вращается около горизонтальной оси h, проходящей черезъ центръ вертикальнаго круга k (круга высотъ). Вся эта система вращается около вертикальной оси прибора, проходящей черезъ центръ горизонтальнаго круга k' (азимутальный кругъ). На кругѣ k отчитываютъ разности высотъ, на кругѣ k' разности азимутовъ при помощи микроскоповъ m и m'. Противовѣсъ g имѣетъ цѣлью перенести центръ

тяжести прибора на его ось. Эта ось устанавливается вертикально при помощи трехъ винтовыхъ ножекъ s и уровней w и w'. Въ нѣкоторыхъ приборахъ особая труба, прикрѣпленная къ нижней части, даетъ возможность убѣждаться въ неподвижности прибора во время измѣренія.

Къ приборамъ, служащимъ для измѣренія угловъ, принадлежитъ и секстантъ, который мы, однако, здѣсь не будемъ описывать.

§ 4. Способъ зеркала и шкалы. Этотъ способъ, служащій для измѣренія небольшихъ угловъ, на которые повертываются (обыкновенно около вертикальной, рѣдко около горизонтальной оси) подвижныя части въ нѣкоторыхъ приборахъ, былъ предложенъ Poggendorff'омъ въ 1826 году. Онъ примѣняется напр. для измѣренія отклоненій магнитовъ, горизонтально подвѣшенныхъ на тонкихъ нитяхъ, также металлическихъ стрѣлокъ въ нѣкоторыхъ электрометрахъ и т. д.

Рис. 154.



Способомъ зеркала и шкалы можно пользоваться двояко—субъективно и объективно.

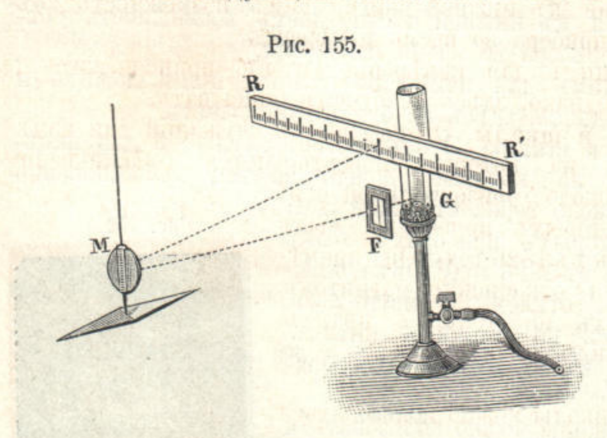
У насъ наиболѣе часто пользуются субъективнымъ методомъ, который болѣе извѣстенъ подъ названіемъ способа трубы и шкалы. Онъ разъясняется рисункомъ 154, въ которомъ показано распредѣленіе частей, если смотрѣть сверху. Къ тѣлу NS (напр., магниту), вращающемуся около вертикальной оси, проходящей черезъ точку R, прикрѣплено зеркальце P; AB зрительная труба; MR горизонтальная шкала (черточки вертикальны), установленная выше или ниже трубы такимъ образомъ, чтобы нормаль къ зеркалу проходила посерединѣ между трубою и шкалою. Наблюдатель видитъ сперва въ трубу дѣленіе O. Когда тѣло NS повернется на уголъ α въ положеніе $N'S'$ и съ нимъ зеркальце въ положеніе P', то въ ось трубы попадетъ отраженный отъ P' лучъ $O''R$, который, падая на него, составлялъ съ нормалью RO' къ зеркальцу уголъ $O''RO'$, равный углу $O'RO$ т.-е. равный α. Наблюдателю покажется, что шкала ушла въ сторону; въ серединѣ поля зрѣнія онъ увидитъ вмѣсто дѣленія O дѣленіе O''. Непосредственно отчитывается длина $s = OO''$ по дѣленіямъ шкалы. Зная разстояніе d отъ шкалы до зеркальца, которое должно быть взято отъ 2 до 4 метровъ, получаемъ искомый уголъ поворота α по формулѣ

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{s}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Этимъ способомъ можно замѣтить и измѣрить весьма малыя вращенія тѣла, снабженнаго зеркальцемъ. При $d = 4$ метрамъ можно еще замѣтить вращеніе $\alpha = 2''$; ему будетъ соотвѣтствовать $s = 0{,}1$ мм., величина вполнѣ замѣтная, если труба въ достаточной степени увеличиваетъ.

Объективный способъ наблюденія помощью зеркала и шкалы заключается въ слѣдующемъ. Нѣсколько выше или ниже шкалы RR' (рис. 155) устанавливается узкая вертикальная щель F, а за нею источникъ свѣта G, газовая горѣлка или лампа. Помощью зеркальца M получаютъ рѣзкое изображеніе щели на шкалѣ; для этого можно зеркальцу дать нѣсколько вогнутую поверхность или помѣстить на линіи FM двояковыпуклое стекло въ такомъ положеніи, чтобы изображеніе щели, какъ свѣтящагося предмета, послѣ отраженія помѣщался бы какъ разъ на шкалѣ RR'. При вращеніи зеркальца M на уголъ α увидимъ, что изображеніе щели будетъ перемѣщаться вдоль шкалы. Весьма часто натягивается посреди щели нить, параллельная ея краямъ, и измѣряется перемѣщеніе изображенія этой нити.

Рис. 155.



Формула (2) и здѣсь остается приложимою: s число дѣленій шкалы, на которыя передвинулось изображеніе щели, d разстояніе отъ зеркальца до шкалы.

При очень малыхъ углахъ α можно тангенсъ замѣнить дугою и положить

$$\alpha = \frac{s}{2d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

т.-е. число s дѣленій шкалы можно принять за мѣру искомаго угла α.

Формула (3) была бы и для большихъ α строго вѣрна, еслибы шкала была начерчена не на прямой полосѣ, но на полосѣ, изогнутой въ дугу круга, центръ котораго находился бы на поверхности зеркальца.

Точное выраженіе для α имѣетъ видъ

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{s}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{d} - \frac{1}{3}\,\frac{s^3}{d^3} + \frac{1}{5}\,\frac{s^5}{d^5} - \ldots\right).$$

Для α не $>4^0$ можно ограничиться двумя членами и написать

$$\alpha = \frac{s}{2d}\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{s^2}{d^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Чтобы выразить α въ градусахъ или минутахъ или секундахъ, слѣдуетъ умножить правую сторону на $\frac{180^0}{\pi}$, такъ что получается

$$\alpha = K\left(\frac{s}{d} - \frac{1}{3}\,\frac{s^3}{d^3}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

гдѣ

$$K = \frac{180^0}{2\pi} = 28^0,648 = 1718',88 = 103132'',8.$$

При точныхъ измѣреніяхъ слѣдуетъ вводить поправки, вызванныя не строгою перпендикулярностью шкалы къ прямой, соединяющей начальную точку счета дѣленій съ срединою зеркальца, или боковымъ отклоненіемъ лучей въ стеклянныхъ пластинкахъ, помѣщаемыхъ передъ зеркальцемъ, напр. когда весь приборъ окруженъ металлическими или иными стѣнками для предохраненія подвижныхъ частей отъ движеній воздуха (см. Wood, Wied. Ann. 56 p. 171 интересный методъ наблюденія крутильныхъ качаній).

В. В. Лермантовъ (Ж. Ф. Х. О. 22 р. 261, 1890) изслѣдовалъ точность вышеизложеннаго объективнаго метода опредѣленія угловъ.

§ 5. Измѣреніе двугранныхъ угловъ. Гоніометры. Для измѣренія двугранныхъ угловъ, составляемыхъ плоскими поверхностями призмъ изъ

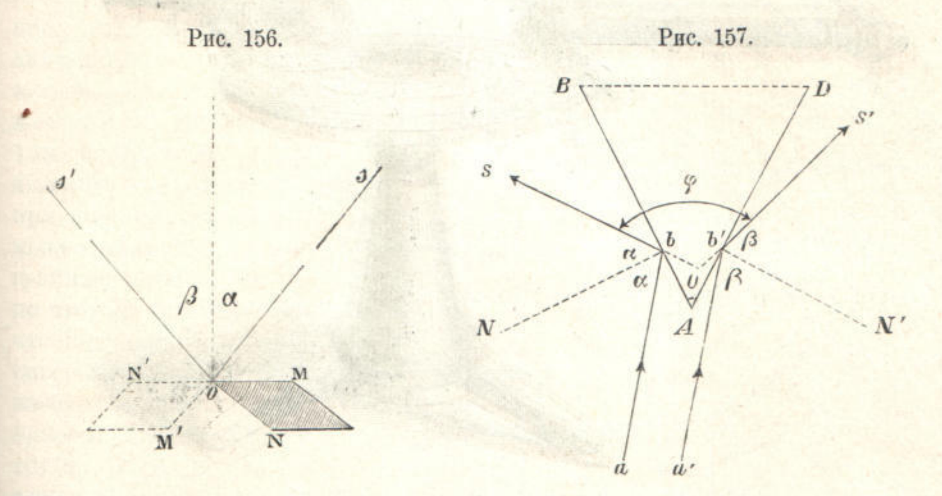


Рис. 156. Рис. 157.

стекла, каменной соли и т. д. или другихъ кристалловъ, вообще поверхностями, правильно отражающими свѣтъ, служатъ различные приборы, называемые гоніометрами.

Существуетъ цѣлый рядъ гоніометрическихъ методовъ, основанныхъ на законѣ отраженія лучей отъ плоскихъ поверхностей. Здѣсь мы разсмотримъ только два изъ нихъ.

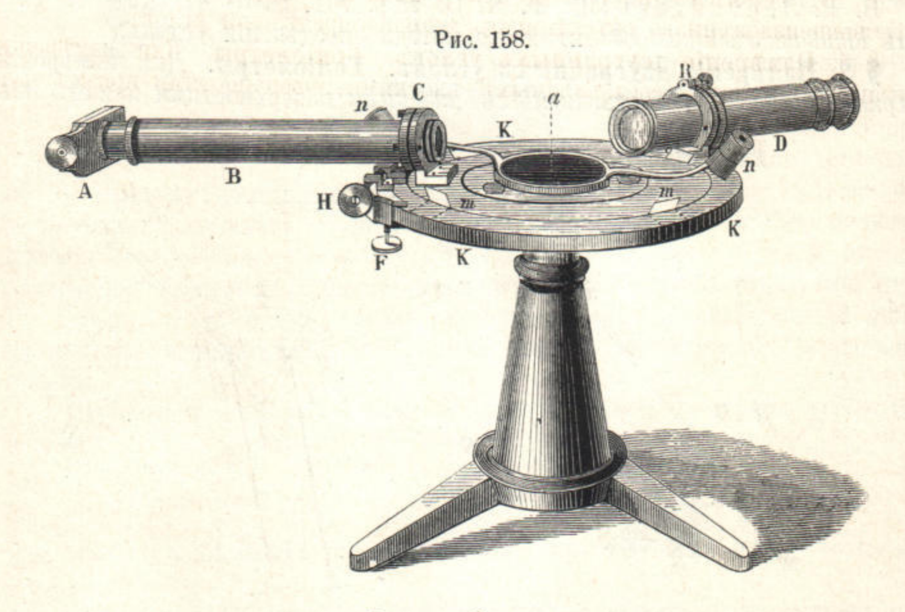
Способъ 1 выясняется рисункомъ 156. Пусть MON линейный уголъ двуграннаго угла, ребро котораго въ O перпендикулярно къ плоскости рисунка. Въ плоскости, перпендикулярной къ ребру, устанавливаютъ зрительную трубу, направленную отъ s' къ O и источникъ свѣта, напр. узкую, освѣщенную щель, параллельную ребру O. Трубу и щель устанавливаютъ такъ, чтобъ лучъ sO, идущій отъ щели, отразившись отъ стороны OM близъ ребра O, пошелъ по направленію Os' оси трубы. Изображеніе щели должно совпадать съ нитью окуляра, установленной параллельно ребру O и щели. Затѣмъ поворачиваютъ тѣло, которому принадлежитъ измѣряемый

уголъ, около ребра O до тѣхъ поръ, пока изображеніе щели вновь не появится и не совпадетъ съ нитью окуляра. Оно теперь образуется лучами, отразившимися отъ другой стороны ON двуграннаго угла, принявшаго положеніе ON'. Такъ какъ MO и ON' должны лежать въ одной плоскости, то ясно, что измѣряемый уголъ $A = \angle MON$ и уголъ $\varphi = \angle NON'$, на который мы повернули тѣло, связаны простымъ равенствомъ

$$A = 180^0 - \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Способъ 2 заключается въ слѣдующемъ. Тѣло, двугранный уголъ A (рис. 157) котораго желаютъ измѣрить, устанавливаютъ неподвижно; въ

Рис. 158.



плоскости, перпендикулярной къ ребру угла, вращается зрительная труба, ось которой направлена къ точкѣ O, лежащей внутри тѣла, вблизи ребра угла A. На это ребро направляютъ пучекъ параллельныхъ лучей ab, $a'b'$, которые отражаются частью отъ одной, частью отъ другой стороны угла. Далѣе отыскиваютъ такія два направленія оси зрительной трубы, при которыхъ она совпадаетъ сперва съ отраженнымъ лучемъ bs, а затѣмъ съ отраженнымъ лучемъ $b's'$ и измѣряютъ уголъ $\varphi = \angle sOs'$, на который при этомъ приходится повернуть трубу около центра O. Докажемъ, что въ этомъ случаѣ искомый уголъ $A = \frac{1}{2}\varphi$. Обозначимъ черезъ $\alpha = \angle abN = \angle Nbs$ и черезъ $\beta = \angle a'b'N' = \angle N'b's'$ углы паденія и отраженія двухъ разсмотрѣнныхъ лучей.

Изъ чертежа видно, что

$$\angle abN + \angle a'b'N' + \angle NbB + \angle N'b'D + \angle A = 360^0, \text{ т.-е.}$$
$$\alpha + \beta + 180^0 + A = 360^0 \text{ или } \alpha + \beta + A = 180^0 \text{ и } 2\alpha + 2\beta + 2A = 360^0.$$

Съ другой стороны очевидно

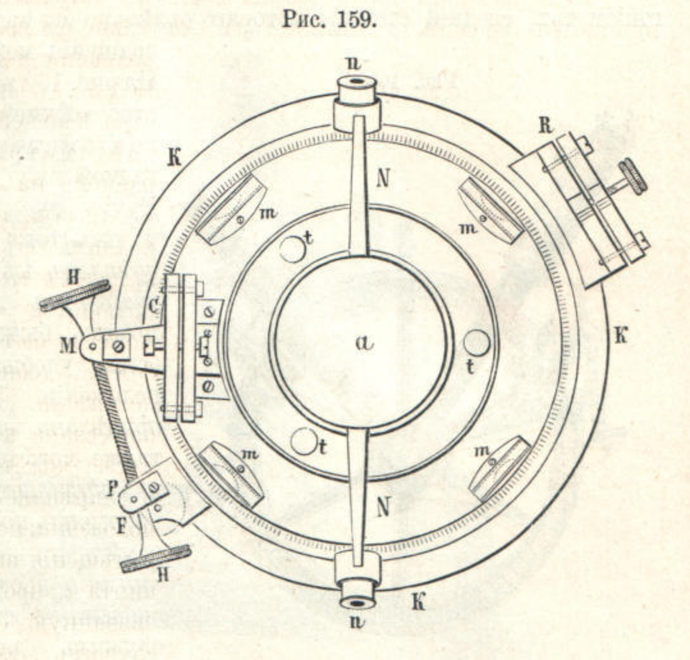
$$2\alpha + 2\beta + \varphi = 360^0.$$

Сравнивая это равенство съ предыдущимъ, мы видимъ, что $\varphi = 2A$, т. е.

$$A = \frac{1}{2}\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Параллельный пучекъ лучей можно получить искусственно, какъ будетъ показано ниже; но можно также искать трубою изображенія въ сторонахъ угла какой-либо весьма отдаленной точки (миры), отъ которой идутъ лучи ab и $a'b'$.

Рис. 159.



Приборы, служащіе для измѣренія двугранныхъ угловъ, называются **гоніометрами**. На рис. 158 изображенъ гоніометръ **Steinheil'a**, при помощи котораго можно измѣрять двугранные углы призмъ по второму изъ только что описанныхъ двухъ способовъ; на рис. 159 изображенъ тотъ же приборъ сверху безъ трубъ B и D. Его главнѣйшія части суть: плоское кольцо KK съ дѣленіями, къ которому прикрѣплено кольцо R, держащее ввинченную въ него зрительную трубку D; внутренній кругъ, снабженный четырьмяноніусами mm и кольцомъ C, въ которое ввинченъ т. наз. **коллиматоръ** B. Этотъ кругъ неподвиженъ; кругъ KK вмѣстѣ съ трубою D можетъ вращаться около оси прибора, причемъ углы поворота могутъ быть измѣрены помощью ноніусовъ m.

Коллиматоръ состоитъ изъ трубы B, имѣющей обыкновенный (ахроматическій) объективъ; вмѣсто окуляра находится **въ фокусѣ объектива** особая часть A, въ которой имѣется вертикальная щель; вращая винтъ, головка котораго видна на рисункѣ, можно расширять или съуживать эту щель.

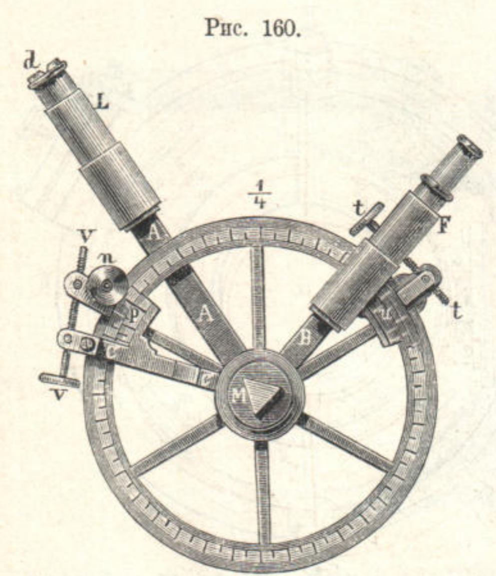
Если за щелью поставить яркій источникъ свѣта, то лучи, исходящіе изъ щели, пройдя объективъ C, идутъ далѣе **параллельно**. Отразившись отъ одной изъ сторонъ измѣряемаго угла, они попадаютъ въ трубу D,

установленную на безконечность (такъ, чтобы ясно виденъ былъ весьма отдаленный предметъ, напр. звѣзда), и даютъ изображеніе щели въ фокальной плоскости объектива, гдѣ находятся нити, съ одною изъ которыхъ, вертикальною, заставляютъ совпасть край этого изображенія при каждой установкѣ.

Призму, двугранный уголъ которой желаютъ измѣрить, устанавливаютъ на столикѣ *a* такъ, чтобы ребро ея находилось близъ средины и чтобы вертикальная плоскость, проходящая черезъ ось коллиматора, приблизительно (на глазъ) дѣлила пополамъ измѣряемый уголъ *A*. Сдѣлавъ двѣ установки трубы и опредѣливъ разность φ отчетовъ, получаютъ уголъ *A* по формулѣ (7).

Если желаютъ пользоваться первымъ методомъ, то необходимо имѣть гоніометръ, среднiй столикъ котораго отдѣльно бы вращался, причемъ уголъ вращенія можно было бы измѣрить. На рис. 160 показано простое устройство верхней горизонтальной части гоніометра Babinet, устанавливаемой на вертикальной ножкѣ. Кругъ съ дѣленіями неподвиженъ; коллиматоръ *L* со щелью *d* прикрѣпленъ къ стержню *AA*, который вращается около оси прибора и можетъ быть закрѣпленъ въ любомъ, удобномъ для наблюденія, положеніи. Зрительная труба *F* придѣлана къ стержню *B*, который также можетъ вращаться около оси и закрѣпляется въ произвольномъ положеніи, послѣ чего малыя его перемѣщенія вызываются вращеніемъ винта *t*, проходящаго черезъ гайку, связанную съ трубою. Ноніусъ *u* служитъ для отчета положенія трубы. Наконецъ, средній столикъ, на которомъ устанавливается тѣло *M*, одинъ изъ двугранныхъ угловъ котораго желаютъ измѣрить, также свободно вращается около оси прибора. Съ нимъ связаны полоска *C*, винтъ *n*, служащій для закрѣпленія, винтъ *VV*, при вращеніи котораго получаются затѣмъ медленныя вращенія столика, и наконецъ ноніусъ *p*.

Рис. 160.

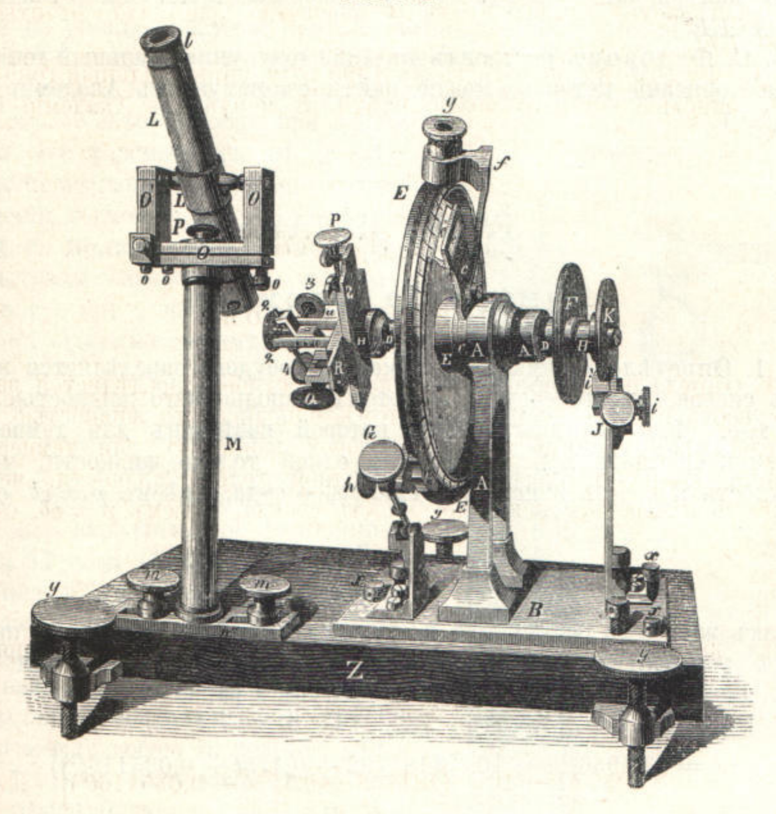


Легко понять, какимъ образомъ можно пользоваться этимъ гоніометромъ для измѣренія угла по любому изъ приведенныхъ двухъ способовъ. Для этого стоитъ только взглянуть на схематическіе рисунки 156 и 157.

Для измѣренія двугранныхъ угловъ кристалловъ служатъ гоніометры, имѣющіе иногда весьма сложное устройство. На рис. 161 изображенъ гоніометръ Mitscherlich'a, въ которомъ измѣреніе дѣлается по первому способу (стр. 277), т.-е. вращеніемъ самого кристалла, при неподвижной трубѣ. Его устройство слѣдующее. Крѣпкая стойка *AA* поддер-

живаетъ ось DD съ кругомъ EE, на которомъ нанесены дѣленія; вращеніе круга производится головкою F. Зажимный винтъ h служитъ для закрѣпленія круга, а микрометренный винтъ G для того, чтобы послѣ закрѣпленія сообщить ему еще медленное вращеніе. Для отчета дѣленій служитъноніусъ c и микроскопъ g. Внутри оси DD проходитъ другая ось HH, для поворачиванія и закрѣпленія которой служатъ головка K и зажимный винтъ i, а для медленнаго ея вращенія — микрометренный

Рис. 161.



винтъ J. Къ оси H придѣлана пластинка, параллельно которой перемѣщается другая при вращеніи головки P; перпендикулярно къ ней перемѣщается при вращеніи головки винта Q пластинка R, къ которой придѣлана рамка u. Винты P и Q даютъ, такимъ образомъ, возможность перемѣщать рамку u параллельно самой себѣ въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ направленіяхъ. Внутри рамки u находится маленькая полушарообразная подставка, на которую воскомъ наклеивается изслѣдуемый кристаллъ и притомъ такъ, чтобы ребро измѣряемаго угла приблизительно было расположено въ продолженіи горизонтальной оси вращенія прибора. Болѣе точная установка достигается винтами 2, 3, 4, P и Q, изъ которыхъ первыми тремя можно измѣнять положеніе подставки съ кри-

сталломъ внутри рамки *u*. Зрительная труба *L* установлена на столбѣ *M*; его можно передвигать параллельно оси *HH*, для чего служатъ зажимные винты *mm*. Чтобы удостовѣриться въ томъ, что ребро измѣряемаго угла находится въ продолженіи оси вращенія прибора, наводятъ одну изъ нитей окуляра *l* на это ребро, которое не должно сходить съ нити при поворачиваніи головки *K*. При наблюденіи устанавливаютъ кристаллъ въ двухъ положеніяхъ, при которыхъ съ окулярной нитью трубы *L* совпадаетъ изображеніе отдаленной горизонтальной линіи сперва въ одной, потомъ въ другой сторонѣ измѣряемаго угла. Уголъ φ поворота кристалла отчитывается на кругѣ *EE*.

Е. С. Федоровъ построилъ въ 1893 году универсальный гоніометръ, подробное описаніе котораго можно найти въ мемуарахъ Академіи Наукъ, Т. 42, № 1.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Измѣреніе объемовъ.

§ 1. Опредѣленіе емкостей. Емкость сосудовъ опредѣляется взвѣшиваніемъ сперва пустого сосуда, а потомъ наполненнаго жидкостью, плотность, т.-е. вѣсъ единицы объема которой извѣстенъ для температуры наблюденія. Обозначивъ черезъ p вѣсъ одной только жидкости, черезъ δ ея плотность и черезъ v искомую емкость сосуда, имѣемъ $p = v\delta$, откуда

$$v = \frac{p}{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Какъ жидкость берутъ или воду, для плотности δ которой при различныхъ температурахъ существуютъ подробныя таблицы или, чаще, ртуть, плотность δ которой при температурѣ t равна

$$\delta = 13{,}5956 \left\{1 - 10^{-9} t(181792 + 0{,}175t + 0{,}035116t^2)\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Выражая p въ граммахъ, получаемъ объемъ v въ куб. см.

Вмѣсто плотности δ удобнѣе вводить обратную ей величину, удѣльный объемъ γ, т.-е. число куб. см., занимаемыхъ однимъ граммомъ жидкости. Тогда имѣемъ

$$v = p\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Для ртути при 0°

$$\gamma = 0{,}0735532 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

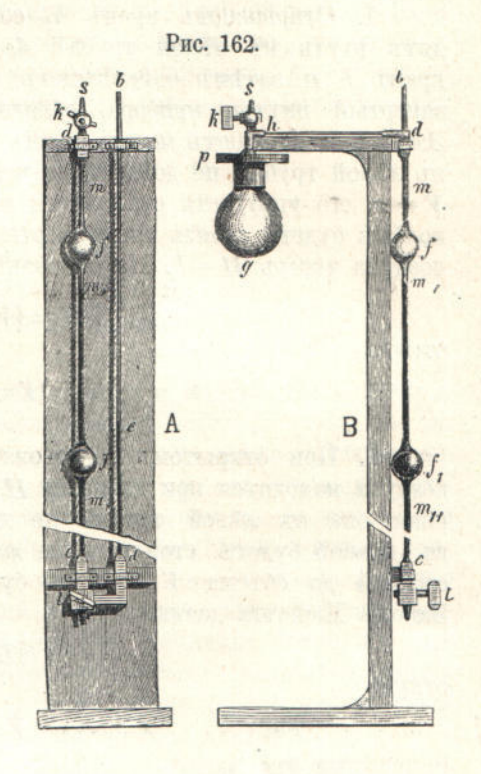
Пользуясь ртутью, необходимо имѣть въ виду, что ея свободная поверхность выпукла; когда эта поверхность находится въ цилиндрической и узкой части стеклянаго сосуда, то она представляется менискомъ. Въ этомъ

случаѣ можно предположить, что ртуть занимаетъ объемъ, ограниченный сверху горизонтальной плоскостью, лежащей выше круга касанія поверхности ртути и стекла на величину, равную $^2/_3$ высоты мениска.

Для изслѣдованія внутренней емкости тонкихъ трубокъ кладутъ ихъ горизонтально и перемѣщаютъ въ нихъ столбикъ ртути. Въ строго цилиндрическихъ трубкахъ длина столбика вездѣ одинаковая; въ неправильныхъ трубкахъ эта длина мѣняется. Перемѣщая столбикъ послѣдовательно въ такія положенія, чтобы его начало приходилось каждый разъ въ той точкѣ, въ которой въ предыдущемъ положеніи находился его конецъ, можно раздѣлить емкость трубки на равныя части и притомъ равныя объему взятой ртути.

Болѣе подробное изслѣдованіе емкости отдѣльныхъ частей трубки, опредѣляемыхъ нанесенными на нее дѣленіями, называется **калиброваніемъ**. Употребляемые при этомъ пріемы мы разсмотримъ въ Т. III, въ главѣ, посвященной вопросу о приготовленіи термометровъ.

Рис. 162.



§ 2. Волюмометръ Реньо. Волюмометрами называются приборы, служащіе для опредѣленія объема тѣлъ, въ особенности имѣющихъ неправильную форму, кучки кристалловъ, порошковъ и т. под. На рис. 162 изображенъ волюмометръ Реньо спереди (*A*) и сбоку (*B*). Къ деревянной вертикальной доскѣ прикрѣплены двѣ параллельныя стеклянныя трубки *bd* и *cd* (буква *d* на чертежѣ встрѣчается два раза), въ которыя наливается ртуть. Кранъ *l* имѣетъ два взаимно перпендикулярныхъ канала вида ⊥; это даетъ возможность по желанію соединить обѣ трубки только между собою (положеніе каналовъ ⊥) или выпускать ртуть изъ одной лѣвой (положеніе ⊣), или изъ одной правой (⊤), или, наконецъ, изъ обѣихъ трубокъ (⊢). Лѣвая трубка имѣетъ шаровидное расширеніе *f*, выше и ниже котораго проведены двѣ черты *m* и m_1. Другое, нижнее расширеніе разсматривать не будемъ. Эта же лѣвая трубка имѣетъ наверху горизонтальное продолженіе *dh* (рис. *B*), входящее въ короткую вертикальную трубку, снабженную наверху краномъ *k* и отверстіемъ *s*, а внизу круглою пластинкою *p*, къ которой плотно привинчивается еще такая же пластинка, такъ что *p* на чертежѣ представляетъ совокупность двухъ сложенныхъ вмѣстѣ пластинокъ. Къ нижней пластинкѣ придѣлана короткая широкая трубка и шаровидный сосудъ *g*; въ него помѣщаютъ тѣло, объемъ котораго желаютъ опредѣлить.

Въ открытый конецъ b правой трубки (рис. A) можно приливать ртуть. Подъ этой трубкой находится шкала съ миллиметреннымъ дѣленіемъ.

Прежде всего долженъ быть опредѣленъ объемъ v трубки и шарика между чертами m и m_1. Для этого открываютъ кранъ k, ставятъ кранъ l такъ, чтобы обѣ трубки были соединены между собою и наливаютъ въ b ртути, пока горизонтальная касательная плоскость къ мениску не пройдетъ черезъ черту m. Затѣмъ выпускаютъ ртуть изъ одной лѣвой трубки, пока она не опустится до черты m_1. Взвѣсивъ вылившуюся ртуть, получаемъ по формулѣ (1) или (3) объемъ v.

Затѣмъ слѣдуетъ опредѣлить объемъ V сосуда g и всей трубки hd до черты m. Это дѣлается двумя способами; въ первомъ приходится уровень ртути опускать, во второмъ — поднимать.

1. Открываютъ кранъ k, соединяютъ bd и dc между собою и доводятъ ртуть въ лѣвой трубкѣ dc до верхней черты m. Закрываютъ кранъ k и затѣмъ опредѣляютъ барометрическое давленіе H; воздухъ, запертый внутри прибора, обладаетъ объемомъ V и упругостью H. Затѣмъ выпускаютъ черезъ кранъ l ртуть изъ обѣихъ трубокъ, пока она въ лѣвой трубкѣ не дойдетъ до черты m_1. Воздухъ расширился до объема $V+v$; его упругость становится меньше H и потому ртуть въ правомъ колѣнѣ будетъ стоять ниже черты m_1 на нѣкоторую высоту h; упругость воздуха теперь $H-h$. На основаніи закона Маріотта имѣемъ

$$VH=(V+v)(H-h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

откуда

$$V=v\frac{H-h}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

2. При открытомъ k доводятъ ртуть до черты m_1; объемъ $V+v$ воздуха находится при давленіи H. Закрывъ k, приливаютъ ртути въ b, пока она въ лѣвой трубкѣ не дойдетъ до черты m; при этомъ она въ правой будетъ стоять выше m на нѣкоторую величину h_1, такъ что сжатый до объема V воздухъ будетъ находиться при давленіи $H+h_1$. Законъ Маріотта даетъ

$$(V+v)H=V(H+h_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

откуда

$$V=v\frac{H}{h_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Для V беремъ окончательно среднее изъ двухъ значеній, вычисленныхъ по формуламъ (6) и (8).

Для опредѣленія объема x какого-либо тѣла, кучки малыхъ тѣлъ или порошка, отвинчиваютъ нижнюю изъ пластинокъ p, помѣщаютъ тѣло въ шаръ g и вновь привинчиваютъ этотъ шаръ къ прежнему мѣсту. Затѣмъ буквально повторяютъ только-что описанныя двѣ манипуляціи, причемъ однако h и h_1 будутъ имѣть другія значенія h' и h_1', равно какъ и барометрическое давленіе H, которое теперь обозначимъ черезъ H'. Такъ какъ тѣло занимаетъ объемъ x, то объемъ воздуха будетъ $V-x$ и $V+v-x$,

смотря потому, будетъ ли уровень ртути находиться при чертѣ m или m_1. Вмѣсто уравненій (5) и (7) имѣемъ теперь

$$(V-x)H'=(V+v-x)(H'-h').$$
$$(V+v-x)H'=(V-x)(H'+h_1').$$

Эти уравненія даютъ два значенія для искомаго объема x, изъ которыхъ опять беремъ среднее.

Существуетъ множество видоизмѣненій волюмометра; особый интересъ представляетъ приборъ, построенный В. В. Лермантовымъ для практическихъ упражненій студентовъ. Въ немъ шаръ g замѣненъ широкимъ стаканомъ, а правая трубка bd — цилиндрическимъ сосудомъ, соединеннымъ съ лѣвой трубкой dc при помощи длинной каучуковой трубки. Приливаніе и выпусканіе ртути замѣняется весьма удобнымъ подниманіемъ и опусканіемъ цилиндрическаго сосуда при помощи шнурка, перекинутаго черезъ неподвижный блокъ и намотаннаго на горизонтальный валикъ, вращаемый при помощи рукоятки.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Измѣреніе силъ и массъ.

§ 1. Общія замѣчанія объ измѣреніи силъ и массъ. На основаніи формулы $f=mw$, см. (5) стр. 67, связывающей силу f, массу m, на которую она дѣйствуетъ, и ускореніе w, которое эта масса пріобрѣтаетъ подъ вліяніемъ силы f, мы могли бы измѣрять массы, наблюдая ихъ ускоренія, когда дѣйствуетъ на нихъ извѣстная намъ или, проще, какая-либо постоянная сила, или измѣряя силу, которая потребна, чтобы массамъ придать извѣстное намъ или, проще, какое-либо постоянное ускореніе. Точно также мы могли бы измѣрять силы тѣми ускореніями, которыя онѣ придаютъ даннымъ массамъ или тѣми массами, въ движеніи которыхъ онѣ вызываютъ данныя ускоренія. Всѣ подобные способы (исключая одного, см. ниже), однако, неудобовыполнимы въ виду трудности слѣдить за ускореніемъ во время движенія и потому они замѣняются другими.

Силы измѣряются не только ускореніями, которыя онѣ вызываютъ въ тѣлахъ свободныхъ, но и тѣми давленіями, которыя обнаруживаются при ихъ дѣйствіи на тѣла несвободныя. Эти давленія вызываютъ измѣненія формы тѣлъ и появленіе въ нихъ упругихъ противодѣйствующихъ силъ, которыми дѣйствующими силы уравновѣшиваются. По величинѣ этихъ измѣненій формы можно судить о величинѣ дѣйствующей силы. На этомъ основано устройство динамометровъ и крутильныхъ однонитныхъ вѣсовъ, которыя будутъ разсмотрѣны ниже.

Далѣе можно измѣрять силы другими внѣшними силами, которыми онѣ уравновѣшиваются, напр. силою тяжести. Такой случай мы

имѣемъ въ двунитныхъ крутильныхъ вѣсахъ, въ различныхъ магнитныхъ и электрическихъ приборахъ; этимъ же способомъ пользуются часто при измѣреніи давленія газовъ, поверхностнаго натяженія жидкостей, упругихъ силъ, развивающихся при измѣненіи формы тѣла и т. д.

Важнѣйшій способъ измѣренія силы, притомъ постоянной по величинѣ и по направленію, по тому движенію, которое она вызываетъ, заключается въ томъ, что заставляютъ нѣкоторое тѣло совершать подъ вліяніемъ измѣряемой силы колебательныя движенія около положенія равновѣсія, опредѣляемаго направленіемъ этой силы. Время колебанія дастъ, какъ мы увидимъ, возможность найти мѣру силы.

Мгновенныя силы опредѣляются, какъ мы видѣли (стр. 76) полнымъ импульсомъ силы за малый промежутокъ времени ихъ дѣйствія; мы видѣли далѣе (стр. 74), что этотъ импульсъ равенъ количеству движенія mv, пріобрѣтенному тѣломъ. Поэтому мѣрою мгновенной силы служитъ начальная скорость v тѣла, находившагося сначала въ покоѣ, въ моментъ прекращенія дѣйствія на него силы. Такимъ способомъ измѣряются тѣ мгновенныя силы, которыя появляются при воспламененіи взрывчатыхъ веществъ, при ударѣ, при возникновеніи мгновенныхъ индукціонныхъ токовъ и т. д.

Вѣсъ тѣлъ, какъ частный случай силы, можетъ быть измѣряемъ однимъ изъ вышеупомянутыхъ способовъ. Принимая за единицу вѣса вѣсъ какого либо тѣла въ томъ мѣстѣ, гдѣ производится измѣреніе, можно опредѣлить вѣсъ другого тѣла, уравновѣшивая его подобраннымъ числомъ единицъ вѣса (разновѣсокъ) на рычагѣ перваго или второго рода, отношеніе плечъ котораго извѣстно. Приборы, для этого примѣняемые, называются вѣсами (обыкновенные, безмѣнъ, римскіе, десятичные и т. д.). Но слѣдуетъ твердо помнить, что на вѣсахъ получается вѣсъ тѣла только при вышесказанномъ условіи. Для каждой широты и для каждой высоты надъ уровнемъ моря должны бы быть свои разновѣски, если за единицу вѣса принять динъ или граммъ, т.-е. вѣсъ въ Парижѣ такого тѣла, масса котораго граммъ, или должны быть извѣстны соотвѣтствующія поправки, дающія возможность опредѣлить истинный въ данномъ мѣстѣ вѣсъ разновѣски, вѣсъ которой въ Парижѣ равенъ грамму.

Мы уже упоминали (стр. 67), что разновѣски суть прежде всего эталоны массы и что поэтому взвѣшиваніе есть манипуляція опредѣленія массы тѣла путемъ сравненія его вѣса съ вѣсомъ тѣла, масса котораго единица.

Такъ какъ масса тѣлъ въ данномъ мѣстѣ пропорціональна вѣсу, то мы и получаемъ вѣрное численное значеніе массы, гдѣ бы мы ни производили взвѣшиваніе, если только разновѣски суть правильные эталоны массы. Численное же значеніе вѣса тогда только возможно получить путемъ взвѣшиванія, когда вѣсъ эталоновъ извѣстенъ для того мѣста, гдѣ производится взвѣшиваніе.

§ 2. Разновѣски, какъ сказано, суть эталоны массы. Въ Международномъ бюро мѣръ и вѣсовъ (стр. 262) были изготовлены образцовые эталоны килограмма изъ того же сплава (90% Pt и 10% Jr), какъ и эталоны метра.

По жребію Россія получила въ 1891 г. два килограмма: № 26, хранящійся при Академіи Наукъ и № 12, находящійся въ Главной Палатѣ мѣръ и вѣсовъ. Ихъ объемы (при 0°) и истинныя массы суть:

№ 26: объемъ 46,410 куб. см.; масса 1 килогр. — 0,0032 мгр.

№ 12: объемъ 46,407 куб. см.; масса 1 килогр. + 0,0680 мгр.

Точность опредѣленія массы равна ± 0,002 мгр. Тѣми же числами, какъ и масса, выражается очевидно и вѣсъ этихъ эталоновъ въ безвоздушномъ пространствѣ въ Парижѣ.

По принятой терминологіи мы будемъ говорить о взвѣшиваніи, о разновѣскахъ и т. д., хотя дѣло касается не столько вѣса, сколько массы тѣлъ.

При взвѣшиваніи употребляются разновѣски, расположенныя въ надлежащемъ порядкѣ въ цилиндрическихъ или иной формы углубленіяхъ, высверленныхъ въ деревянномъ брускѣ. Весьма крупныя разновѣски дѣлаются изъ желѣза или чугуна; среднія по величинѣ изъ желтой мѣди, которую полезно позолотить; малыя изъ платины, а самыя малыя иногда изъ алюминія. Особенно точныя разновѣски дѣлаются изъ горнаго хрусталя или изъ упомянутаго сплава Pt и Jr. По величинѣ онѣ обыкновенно распредѣляются въ порядкѣ чиселъ

1—1—1—2—5—10—10—20—50—100—100 - 200—500—1000 и т. д.,

изъ которыхъ можно посредствомъ комбинацій составить всѣ промежуточныя числа. Самая малая единица должна повторяться три раза, 10-ти, 100 и т. д. кратныя—по два раза. Иногда вмѣсто указаннаго ряда употребляется такой:

1—2—2—5—10—20—20—50—100—200—200—500—1000—2000—и т. д.

Д. И. Менделѣевъ (Временникъ Гл. Палаты Мѣръ и Вѣсовъ, часть 2 стр. 162) предложилъ недавно (1895) новую систему разновѣсокъ, а именно:

1—2—3—4—10—20—30—40—100—200—300—400—1000 и т. д.,

представляющую много преимуществъ.

Имѣющіяся въ продажѣ серіи разновѣсокъ не могутъ считаться вполнѣ точными. Прежде, чѣмъ ими пользоваться, необходимо ихъ прокалибрировать, т.-е. опредѣлить истинное отношеніе ихъ массъ къ массѣ эталона, или, по крайней мѣрѣ, другъ къ другу. Способы такого калибрированія мы не будемъ разсматривать.

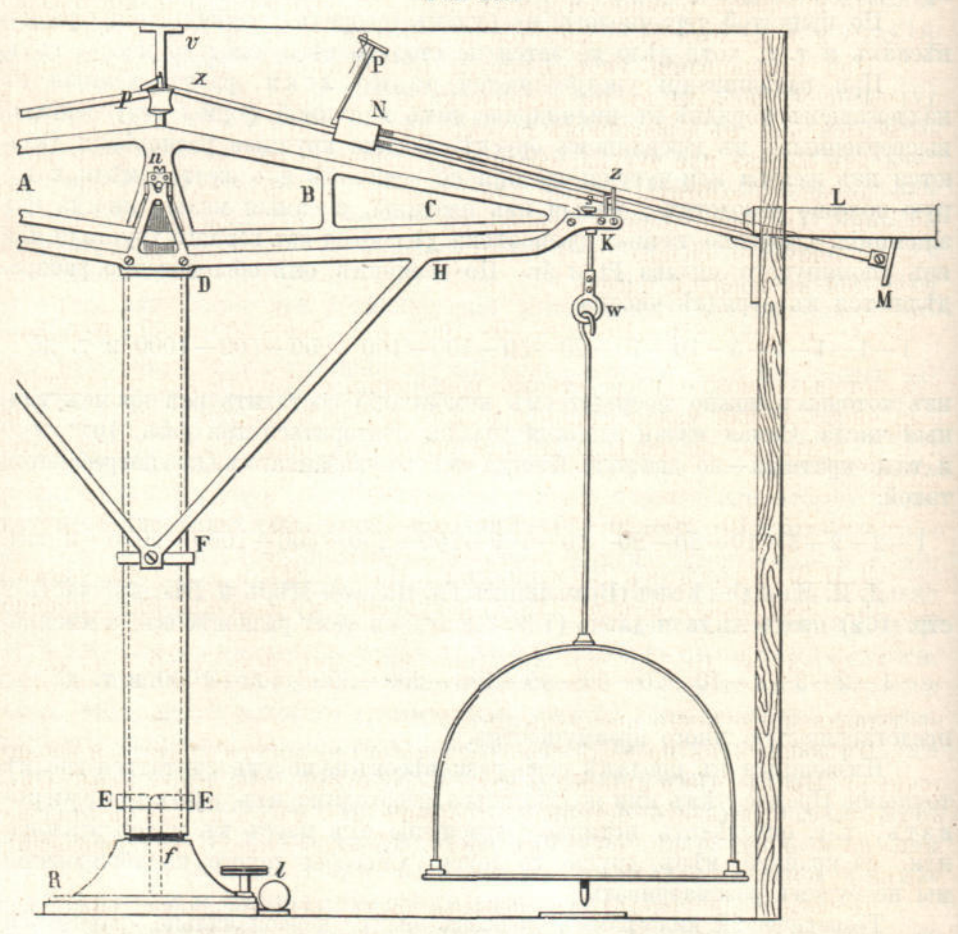
Теоретическій килограммъ долженъ былъ, первоначально, равняться вѣсу одного литра чистой воды при 4° Ц. Изслѣдованія Д. И. Менделѣева (Временникъ Гл. Палаты Мѣръ и Вѣсовъ, часть 2, стр. 143. Proc. Royal Soc. of. London, 59 p. 143, 1896) показали, что вѣроятнѣйшій вѣсъ одного куб. дец. чистой воды при 4° Ц. въ пустотѣ равенъ

999,847 гр.

Macé de Lépinay находитъ бóльшее число, а именно 999,959 гр. (C. R. 22 p. 595, 1896; J. de phys. (3) 5 p. 477, 1896).

§ 3. Устройство вѣсовъ. Главная часть вѣсовъ — это коромысло, представляющее равноплечій рычагъ. Черезъ его средину проходитъ треугольная призма, обращенная внизъ однимъ ребромъ, служащимъ линіей опоры рычага. На двухъ концахъ коромысла находятся еще двѣ призмы, обращенныя однимъ изъ реберъ вверхъ; на эти ребра упираются крючки или пластинки, къ которымъ привѣшены чашки вѣсовъ. Ребра

Рис. 163.



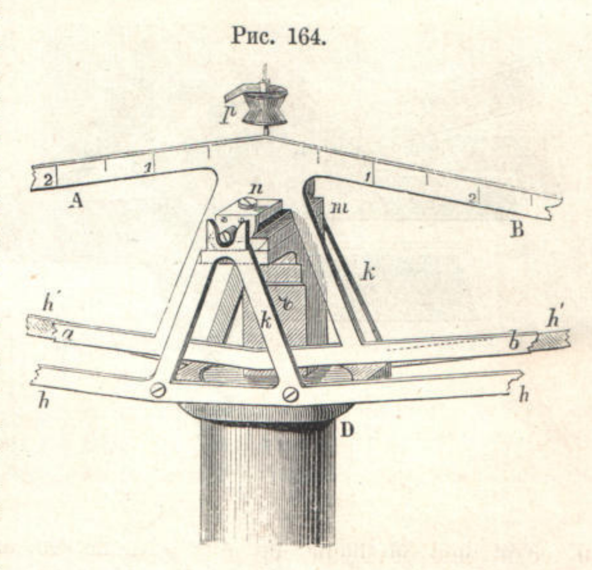
трехъ призмъ должны лежать въ одной горизонтальной плоскости, когда вѣсы находятся въ покоѣ, и должны быть параллельны между собою. Длинная вертикальная стрѣлка, придѣланная однимъ концомъ къ коромыслу, даетъ возможность наблюдать его качанія; для этого за другимъ концомъ стрѣлки установлена шкала. Въ серединѣ шкалы или, лучше, на одномъ ея концѣ находится нулевое дѣленіе. Вмѣсто стрѣлки можно пользоваться небольшою вертикальною шкалою, придѣланною къ одному изъ концовъ

коромысла, качанія котораго въ этомъ случаѣ разсматриваются въ микроскопъ, направленный на эту шкалу.

Чтобы ребра призмъ не притуплялись отъ непрерывнаго давленія коромысла или подвѣса чашекъ, устроена особая подвижная рама, которую опускаютъ внизъ, когда желаютъ производить взвѣшиваніе и поднимаютъ вверхъ послѣ его окончанія. Эта рама поднимаетъ коромысло, а также подвѣсы чашекъ, такъ что ребра призмъ перестаютъ подвергаться давленію.

Вѣсы помѣщаются въ стеклянныхъ ящикахъ-шкапахъ, снабженныхъ дверцами. Для удобнѣйшаго наложенія разновѣсокъ на чашки, а также, какъ мы увидимъ, на самое коромысло существуютъ крайне разнообразныя приспособленія. Во время взвѣшиванія слѣдуетъ тщательно предохранять вѣсы отъ малѣйшихъ потоковъ воздуха, а также отъ неравномѣрнаго нагрѣванія обоихъ плечъ коромысла (напр. тѣломъ наблюдателя).

Рис. 164.



Разсмотримъ ближе устройство вѣсовъ, для которыхъ рисунки и описаніе заимствуемъ изъ курса физики Ѳ. Ѳ. Петрушевскаго. На рис. 163 представленъ общій видъ вѣсовъ съ опущеніемъ лѣвой части; на рис. 164 и 165 показаны въ бо̀льшемъ масштабѣ средняя часть вѣсовъ и оконечность коромысла съ подвѣсомъ чашки. Коромысло *ABC* вырѣзное, для уменьшенія его вѣса. Черезъ средній вырѣзъ проходитъ подставка m; на ней находится кварцевая пластинка, на которую опирается ребро призмы n.

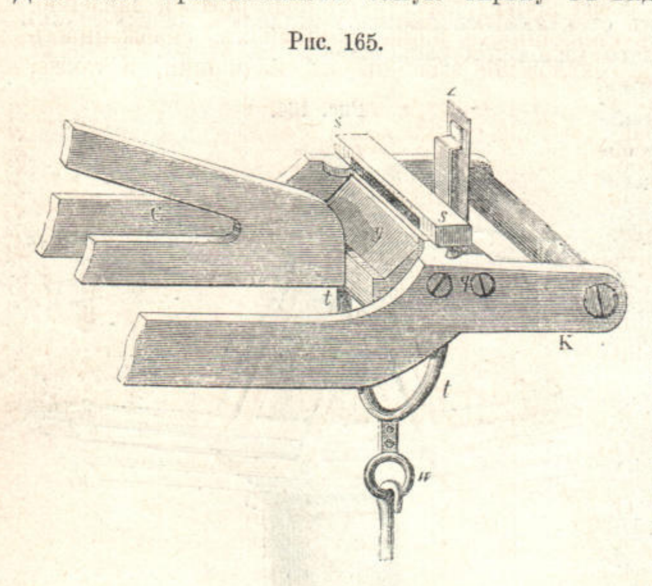
На рис. 165 видна оправа боковой призмы y; всѣ три призмы сдѣланы изъ кварца. На ребро боковой призмы налегаетъ горизонтальная кварцевая пластинка, находящаяся въ оправѣ ss, къ которой помощью дуги t и кольца w прикрѣплена чашка (рис. 163).

Для аретированія вѣсовъ, т.-е. освобожденія ребръ призмъ отъ соприкосновенія съ двумя пластинками, которыя налегаютъ на крайнія призмы и съ пластинкою, на которую опирается средняя призма, служитъ рамка $DHKF$ (рис. 163), части khh и $kh'h'$ которой видны на рис. 164 и часть K съ вертикальными штифтиками q на рис. 165. Рамка прикрѣплена къ трубкѣ DFE, охватывающей средній столбъ всего прибора и снабженной внизу полукольцомъ EE, которое опирается на штифтъ f. Если вращать головку винта, находящуюся снаружи шкапика вѣсовъ, то штифтъ f поднимается, а вмѣстѣ съ нимъ поднимается трубка EFD и соединенная съ нею рамка. Часть kk (рис. 164) поднимаетъ коромысло, а штифтики q (рис. 165) пластинку ss.

Къ концу одного изъ плечъ коромысла придѣлана вертикальная шкала *z* (рис. 163 и 165), которая служитъ для наблюденія малыхъ качаній коромысла при помощи микроскопа *L*.

Для измѣненія вѣса, дѣйствующаго на чашку съ гирями, на величину, меньшую вѣса самой малой гирьки, т.-е. обыкновенно сантиграмма, кладутъ послѣднюю не на чашку вѣсовъ, но ближе къ точкѣ опоры коромысла. Для этого приготовляютъ самую гирьку въ видѣ проволочки, имѣющей круглую петлю, см. налѣво отъ буквы *P* на рис. 163; каждое плечо коромысла раздѣлено на 10 или 100 частей (рис. 164) и на коромысло непосредственно насаживается проволочная гирька при помощи стержня *MZNP*, который гильзою *N* связанъ со стерженькомъ *x*, прикрѣпленнымъ къ крышкѣ шкапика въ *v*; передвигая и вращая головку *M*, можно опустить проволочную гирьку на желаемое дѣленіе коромысла. Если вѣсъ гирьки 1 мгр. и если она опущена на 4-ое дѣленіе, то ея вліяніе на вѣсы такое же, какое обнаружилось бы отъ наложенія 0,4 мгр. на соотвѣтствующую чашку вѣсовъ.

Рис. 165.



Для измѣненія положенія центра тяжести коромысла въ вертикальномъ направленіи служитъ грузикъ *p* (рис. 164), который можно поднимать и опускать, а для измѣненія этого положенія въ горизонтальномъ направленіи—металлическая полоска (флюгеръ), вращающаяся около той же винтовой оси, на которую посредствомъ гайки насаженъ грузикъ *p*.

Мы ограничиваемся описаніемъ вѣсовъ стараго образца, такъ какъ по нимъ легко познакомиться съ главными частями этого важнѣйшаго прибора. Нынѣ употребляются почти только короткоплечіе вѣсы, по причинѣ, о которой будетъ сказано ниже.

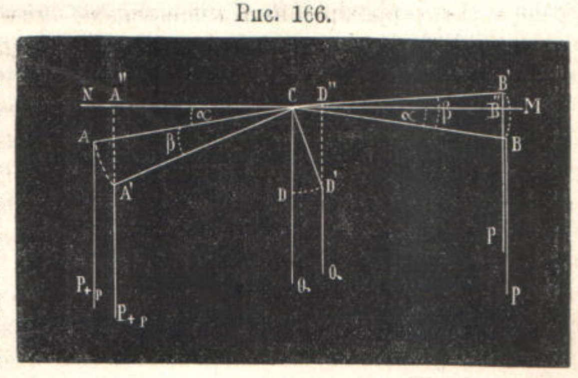
§ 4. Устойчивость, чувствительность и вѣрность вѣсовъ. Для устойчивости вѣсовъ необходимо, чтобы центръ тяжести одного коромысла находился нѣсколько ниже его точки опоры, т.-е. ребра средней призмы. Чашки вѣсовъ съ ихъ нагрузкою тогда только имѣли бы прямое вліяніе на устойчивость, еслибы онѣ составляли съ коромысломъ одно неизмѣнное цѣлое. Чувствительностью вѣсовъ называется ихъ способность обнаруживать замѣтное отклоненіе коромысла при маломъ «перегрузкѣ» *p*, прибавленной къ одной изъ чашекъ вѣсовъ, на которыхъ уже могутъ нахо-

диться одинаковыя «**нагрузки**» P. Обозначая уголъ отклоненія коромысла черезъ β, мы за мѣру чувствительности ω примемъ величину

$$\omega = \frac{\beta}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Для опредѣленія величины ω обращаемся къ рис. 166. Пусть NCM горизонтальная линія; AC и BC плечи коромысла, о которыхъ мы ради общности допустимъ, что они при равной нагрузкѣ чашекъ не совпадаютъ съ горизонтальной линіей; черезъ точки A, C и B проходятъ ребра призмъ. Къ A и B приложены силы, равныя нагрузкѣ чашекъ. Пусть $\angle ACN = \angle BCM = \alpha$; D центръ тяжести коромысла, къ которому приложена сила Q, равная вѣсу коромысла. Длину плечъ обозначимъ черезъ $l = AC = BC$. Разстояніе центра тяжести отъ точки опоры черезъ $\delta = DC$. Положимъ на правую чашку грузъ P, а на лѣвую $P + p$, гдѣ p перегрузка. Плечи коромысла примутъ положеніе $A'CB'$, центръ тяжести перейдетъ въ D'; пусть $\angle DCD' = \angle ACA' = \angle BCB' = \beta$.

Рис. 166.



Условіе равновѣсія коромысла въ новомъ положеніи подъ вліяніемъ силъ P, $P + p$ и Q будетъ

$$(P + p) \cdot \overline{A''C} = P \cdot \overline{B''C} + Q \cdot \overline{D''C}$$

или

$$(P + p) l \cos(\beta + \alpha) = P l \cos(\beta - \alpha) + Q\delta \sin\beta.$$

Раскрывъ $\cos(\beta + \alpha)$ и $\cos(\beta - \alpha)$ и раздѣливъ все уравненіе на $\cos\alpha$, получаемъ

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{pl\cos\alpha}{(2P + p)l\sin\alpha + Q\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Для малыхъ угловъ β можно тангенсъ замѣнить дугою и тогда (1) даетъ

$$\omega = \frac{l\cos\alpha}{(2P + p)l\sin\alpha + Q\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Еслибы ребра трехъ призмъ находились на одной прямой, т.-е. еслибы мы имѣли $\alpha = 0$, то мы получили бы болѣе простую формулу

$$\omega = \frac{l}{Q\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Это послѣднее выраженіе показываетъ, что чувствительность вѣсовъ пропорціональна длинѣ плечъ коромысла и обратно пропорціональна вѣсу

коромысла и разстоянію его центра тяжести отъ точки опоры. Отсюда слѣдуетъ, что для увеличенія чувствительности вѣсовъ слѣдуетъ коромысло дѣлать по возможности легче и длиннѣе, а центръ тяжести помѣщать какъ можно ближе къ точкѣ опоры.

Въ идеальномъ случаѣ, которому соотвѣтствуетъ формула (4), чувствительность вовсе не зависитъ отъ нагрузки P вѣсовъ. Болѣе же общая формула (3) показываетъ, что при увеличеніи нагрузки чувствительность вѣсовъ уменьшается, если уголъ α положительный, т.-е. если точка опоры лежитъ выше точекъ привѣса чашекъ, и что она увеличивается, если α отрицательное, т.-е. ребра крайнихъ призмъ расположены выше ребра средняго. Весьма важно замѣтить, что уголъ α зависитъ отъ нагрузки P, вызывающей гнутіе коромысла, т.-е увеличеніе угла α. Если при $P=0$ уголъ α положительный, то чувствительность ω съ увеличеніемъ нагрузки P по двумъ причинамъ должна уменьшаться; если же начальное α отрицательное, то съ увеличеніемъ P уголъ α сперва сдѣлается равнымъ нулю а потомъ положительнымъ. Въ этомъ случаѣ чувствительность ω вѣсовъ съ увеличеніемъ нагрузки P сперва увеличивается, а затѣмъ уже начинаетъ уменьшаться, что дѣйствительно и наблюдается. Въ этомъ и заключяется причина, почему въ настоящее время пользуются только короткоплечими вѣсами, въ которыхъ весьма уменьшена возможность гнутія коромысла.

Вѣрность вѣсовъ заключается въ ихъ способности дать истинный вѣсъ взвѣшиваемаго тѣла. Для того, чтобы вѣсы были вѣрны, должно быть удовлетворено одно главнѣйшее условіе: плечи коромысла должны имѣть неизмѣнную длину, а для этого необходимо, чтобы ребра трехъ призмъ были вполнѣ параллельны, ибо въ случаѣ ихъ непараллельности могутъ мѣняться разстоянія точекъ приложенія силъ (нагрузокъ) отъ точки опоры, т.-е. длина плечъ.

К. Брауэръ въ С.-Петербургѣ построилъ спеціальный приборъ для изслѣдованія параллельности ребръ трехъ призмъ; этотъ приборъ былъ описанъ В. В. Лермантовымъ (Ж. Ф. Х. О. 9 стр. 326, 1877).

Къ указанному условію присоединяются еще условія равенства плечъ и равенства вѣса чашекъ. Мы увидимъ ниже, почему эти условія не играютъ первенствующей роли, какъ можно было бы ожидать, и какимъ образомъ можно при взвѣшиваніяхъ достигнуть того, что неточное выполненіе этихъ условій не будетъ имѣть вліянія на его результатъ.

Вѣрность и чувствительность требуютъ, чтобы ребра призмъ были по возможности близки къ прямымъ линіямъ и чтобы качанія на этихъ ребрахъ происходили съ возможно малымъ треніемъ.

§ 5. Наблюденіе качаній коромысла. Взвѣшиваніе сводится къ уравновѣшиванію тѣла разновѣсками, которыя должны привести коромысло вѣсовъ къ тому же положенію, которое оно занимало безъ нагрузки. Оказывается однако, что при опусканіи аретира вѣсы всегда начинаютъ качаться, что эти качанія продолжаются весьма долгое время и что нѣтъ никакой возможности ожидать полнаго успокоенія коромысла. Поэтому наблюдаютъ качанія коромысла на шкалѣ (см. выше) и по его колебаніямъ вычисляютъ то дѣленіе шкалы, которое соотвѣтствовало-бы ея покою,

т.-е. противъ котораго остановилось бы остріе стрѣлки или которое пришлось бы противъ горизонтальной нити окуляра микроскопа (L рис. 163 и 165). Замѣтимъ, что при сильныхъ качаніяхъ коромысла слѣдуетъ его успокоить, приближая мягкія кисточки къ чашкамъ, и что при наблюденіи остающихся малыхъ качаній чашки должны только опускаться и подниматься, но отнюдь не качаться въ сторону около точекъ привѣса, ибо при такихъ качаніяхъ развивается центробѣжная сила, перемѣщающая положеніе искомой точки. Для опредѣленія этой точки наблюдаютъ на шкалѣ три послѣдовательныхъ полуразмаха коромысла; обозначимъ соотвѣтствующія дѣленія шкалы черезъ a, b и c, причемъ a и c суть крайнія точки съ одной, b крайняя точка съ другой стороны размаха. Берутъ среднее $\frac{a+c}{2}$ двухъ отчетовъ съ одной стороны и затѣмъ среднее между этимъ среднимъ и отчетомъ b съ другой стороны. Полученное число и даетъ искомое дѣленіе n шкалы, соотвѣтствующее положенію равновѣсія. Итакъ

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{2} + b\right) = \frac{1}{4}\left(a + 2b + c\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Когда наблюдаютъ четыре остановки a, b, c и d (a и c съ одной, b и d съ другой стороны), то положеніе n вычисляется по формулѣ

$$n = \frac{1}{8}\,(a + 3b + 3c + d). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

которая получается если найти среднее изъ двухъ положеній покоя, вычисляемыхъ по формулѣ (5) изъ остановокъ a, b, c и b, c, d:

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\,(a + 2b + c) + \frac{1}{4}\,(b + 2c + d)\right] = \frac{1}{8}\,(a + 3b + 3c + d).$$

Передъ взвѣшиваніемъ слѣдуетъ тѣмъ же способомъ опредѣлить дѣленіе n_0 шкалы, которому соотвѣтствуетъ положеніе равновѣсія коромысла при пустыхъ чашкахъ.

Для примѣра положимъ, что при пустыхъ чашкахъ точки поворота суть

на лѣво или вверхъ	направо или внизъ
10,6	
	8,3
10,4	
Среднее 10,5	$n_0 = \frac{10,5 + 8,3}{2} = 9,4.$

Итакъ равновѣсію соотвѣтствуетъ дѣленіе $n_0 = 9,4$. Если посреди шкалы находится нулевое дѣленіе, то отчетамъ слѣдуетъ приписывать знакъ.

При взвѣшиваніи опять наблюдаются качанія. При этомъ требуется опредѣлить ту сумму разновѣсокъ, при которой положеніе равновѣсія опредѣляется дѣленіемъ n_0. Обыкновенно нѣкоторое количество разновѣсокъ даетъ положеніе равновѣсія, лежащее съ одной стороны отъ n_0, а прибавка самой малой разновѣски переноситъ это положеніе на другую сторону отъ n_0. Тогда

изъ простой пропорціи получается та доля самой малой разновѣски, при которой положеніе равновѣсія опредѣляется дѣленіемъ n_0. Приведемъ примѣръ, полагая, какъ найдено выше, $n_0 = 9,4$. Нагрузка 43,765 гр. даетъ

на лѣво или вверхъ	на право или внизъ
9,7	
	7,2
9,5	
Среднее 9,6	

Положеніе равновѣсія $n_1 = \frac{9,6+7,2}{2} = 8,4$.

Нагрузка 43,766 гр. даетъ

на лѣво или вверхъ	на право или внизъ
10,9	
	8,8
10,7	
Среднее 10,8	

Положеніе равновѣсія $n_2 = \frac{10,8+8,8}{2} = 9,8$.

Итакъ отъ прибавки 1 мгр. положеніе равновѣсія передвинулось на $9,8 - 8,4 = 1,4$ дѣленія. Искомая прибавка x къ меньшей нагрузкѣ должна передвинуть это положеніе на $n_0 - 8,4 = 9,4 - 8,4 = 1,0$ дѣленіе.

Отсюда $x = \frac{1,0}{1,4} = 0,71$ и слѣдовательно искомая сумма разновѣсокъ 43,7657 гр.; послѣднюю цыфру (1) отбрасываемъ.

P. Curie построилъ апеpіодическіе вѣсы, въ которыхъ качанія коромысла вызываютъ небольшія сжатія и разрѣженія воздуха, находящагося подъ чашками въ особыхъ сосудахъ. Вслѣдствіе этого амплитуды качаній коромысла весьма быстро уменьшаются.

Подробности о точнѣйшихъ способахъ взвѣшиванія, установкѣ вѣсовъ и т. д. можно найти въ работахъ Д. И. Менделѣева (Ж. Ф. Х. О., 1895, Отд. Химич., стр. 509).

§ 6. Способы взвѣшиванія. Замѣтимъ, что не слѣдуетъ до разновѣсокъ прикасаться пальцами; ихъ слѣдуетъ брать металлическими, костяными или иными щипчиками или вилками. Накладываніе разновѣсокъ на чашки и снимaніе ихъ слѣдуетъ производить только, когда вѣсы аретированы.

Существуетъ три способа взвѣшиванія, исключающіе вліяніе неравенства плечъ коромысла или вѣса чашекъ.

I. Способъ Gauss'а двойного взвѣшиванія. Тѣло кладутъ сперва на одну чашку, потомъ на другую и опредѣляютъ тѣ два груза p_1 и p_2, которыми оно уравновѣшивается. Обозначивъ длину плеча, на которое сперва дѣйствовалъ искомый вѣсъ p тѣла черезъ l_1, а длину другого плеча черезъ l_2, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} pl_1 &= p_1 l_2 \\ pl_2 &= p_2 l_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Перемноживъ, получаемъ $p^2 = p_1 p_2$, т.-е.

$$p = \sqrt{p_1 p_2} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

такъ какъ при малой разности между p_1 и p_2 геометрическое среднее можно считать равнымъ среднему ариѳметическому (см. стр. 243). Раздѣливъ уравненія (7) другъ на друга, находимъ отношеніе $\frac{l_1}{l_2}$ плечъ, которое обозначимъ черезъ λ,

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Если $\frac{p_1}{p_2} = 1 + \alpha$, гдѣ α малая величина, то

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Итакъ способъ двойного взвѣшиванія даетъ между прочимъ и отношеніе плечъ коромысла.

II. Способъ Borda или способъ тарированія. Тѣло, положенное на одну изъ чашекъ вѣсовъ, сперва уравновѣшиваютъ пескомъ, опилками, дробью и т. под. Затѣмъ снимаютъ тѣло и кладутъ на его мѣсто разновѣски, уравновѣшивающія песокъ, опилки или дробь. Ясно, что вѣсъ тѣла опредѣлится этими разновѣсками, независимо отъ равенства или неравенства плечъ коромысла.

III. Способъ Менделѣева постоянной нагрузки или постоянной чувствительности. Мы видѣли (стр. 292), что чувствительность вѣсовъ зависитъ отъ ихъ нагрузки.

Чтобы рядъ взвѣшиваній произвести при постоянной чувствительности вѣсовъ поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что вѣсы назначены для наибольшей нагрузки въ 1 килогр. на каждую чашку. Тогда кладутъ на одну чашку гирю въ 1 килогр., а на другую полную серію разновѣсокъ, составляющихъ вмѣстѣ 1 килогр. Небольшой гирькой, прибавленной съ надлежащей стороны, приводятъ положеніе равновѣсія къ серединѣ шкалы, если коромысло вѣсовъ оказывается слишкомъ наклоненнымъ. Взвѣшиваемое тѣло кладутъ на чашку съ разновѣсками и снимаютъ изъ нихъ столько, чтобы возстановить равновѣсіе. Снятыя разновѣски опредѣляютъ вѣсъ тѣла.

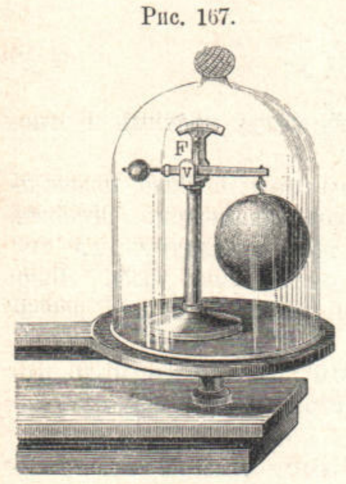
§ 7. Поправка на потерю вѣса тѣлъ въ воздухѣ. На основаніи закона Архимеда всякое тѣло въ воздухѣ теряетъ (какъ принято выражаться) въ своемъ вѣсѣ столько, сколько вѣситъ вытѣсненный имъ объемъ воздуха. Такъ какъ плотность воздуха приблизительно $\frac{1}{770}$, то ясно, что тѣло, плотность котораго единица, теряетъ около 0,13% своего вѣса, величину громадную, если ее сравнить съ тою степенью точности, которая при взвѣшиваніи можетъ быть достигнута и которая доходитъ до 0,00001%. Даже одно изъ наиболѣе плотныхъ тѣлъ, платина, теряетъ на воздухѣ

0,006% своего вѣса. При взвѣшиваніи килограмма изъ платины это составляетъ 60 мгр., т.-е. въ 600 разъ превосходитъ наименьшую, еще замѣтную на вѣсахъ величину (0,1 мгр.).

Извѣстнымъ приборомъ, бароскопомъ, который изображенъ на рис. 167, легко обнаружить кажущееся пріобрѣтеніе вѣса при переходѣ тѣлъ изъ воздуха въ пустоту и показать, что это пріобрѣтеніе тѣмъ больше, чѣмъ больше объемъ тѣла. Маленькій металлическій и большой деревянный шарики взаимно уравновѣшиваются въ воздухѣ; подъ колоколомъ воздушнаго насоса второй оказывается тяжелѣе, слѣд. при переходѣ изъ пустоты въ воздухъ онъ потерялъ больше въ вѣсѣ, чѣмъ первый.

Потеря вѣса мѣняется вмѣстѣ съ плотностью воздуха, т.-е. съ барометрическимъ давленіемъ, съ температурою воздуха и его составомъ, весьма перемѣннымъ относительно содержащихся въ немъ водяныхъ паровъ; отсюда слѣдуетъ, что и «кажущійся вѣсъ» тѣлъ величина мѣняющаяся; поэтому при всякомъ точномъ взвѣшиваніи предполагается, что опредѣленію подлежитъ т. наз. «истинный вѣсъ», т.-е. вѣсъ тѣла въ пустотѣ. Вычисленіе истиннаго вѣса на основаніи наблюденнаго и называется «введеніемъ поправки на потерю вѣса въ воздухѣ».

Рис. 167.



Съ измѣненіемъ состоянія воздуха мѣняется и кажущійся вѣсъ гирь, а потому мы разъ навсегда будемъ предполагать, что наименованіе гирь (съ поправками, найденными при калиброваніи) относится къ ихъ вѣсу въ пустотѣ.

Необходимость введенія поправки исчезаетъ, когда взвѣшиваніе производятъ въ пустотѣ, что дѣйствительно иногда и дѣлается (впервые Regnault въ 1860 г.; нынѣ Д. И. Менделѣевымъ въ Гл. Палатѣ мѣръ и вѣсовъ и др.), а также, когда взвѣшиваемое тѣло и разновѣски состоятъ изъ одинаковаго матеріала. Важнѣйшая величина, которую необходимо знать для введенія разсматриваемой поправки, это вѣсъ куб. сантиметра сухого воздуха при 0° и давленіи въ 760^{mm}, т.-е. при давленіи, равномъ давленію ртутнаго столба высотою въ 760^{mm} при 0°, на уровнѣ моря и на широтѣ 45°. Обозначимъ этотъ вѣсъ черезъ p_1.

Онъ различенъ на различныхъ широтахъ и очевидно, что онъ пропорціоналенъ ускоренію g силы тяжести. По изслѣдованіямъ Менделѣева

$$p_0 = 1{,}31844 g \text{ мгр.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

гдѣ g выражено въ $\frac{\text{метр.}}{(\text{сек})^2}$. Принимая для Петербурга $g = 9{,}8188$, получаемъ для этого города

$$p_0 = 1{,}29455 \text{ мгр.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Главная Палата мѣръ и вѣсовъ обозначаетъ вѣсъ литра сухого воздуха при нормальныхъ условіяхъ знакомъ $e_0 = 1000\ p_0$.

Положимъ, что взвѣшиваніе производится при температурѣ t^0, барометрическомъ давленіи H и что упругость водяныхъ паровъ, содержащихся въ воздухѣ, есть h. Въ этомъ случаѣ вѣсъ p куб. см. воздуха равенъ

$$p = p_0 \frac{H-h}{760(1+\alpha t)} + p_0 \delta \frac{h}{760(1+\alpha t)},$$

гдѣ $\alpha = 0{,}00367$ коеффиціентъ расширенія газовъ и δ плотность паровъ воды относительно воздуха, которую можно принять равною $\frac{5}{8}$. Упростивъ, имѣемъ

$$p = p_0 \frac{H - \frac{3}{8} h}{760(1+\alpha t)} \text{ мгр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Формулою (12) пользуются лишь въ исключительныхъ случаяхъ. При обыкновенныхъ условіяхъ взвѣшиванія, при комнатной температурѣ, можно принять, когда не требуется крайняя точность,

$$p = 1{,}2 \text{ мгр.} = 0{,}0012 \text{ гр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Пусть P искомый, истинный вѣсъ тѣла, V его объемъ, D его плотность; Q истинный вѣсъ разновѣсокъ, который намъ извѣстенъ (см. выше стр. 296), v ихъ объемъ и d ихъ плотность. Потеря вѣса тѣла равна $pV = p\frac{P}{D}$; потеря вѣса разновѣсокъ $pv = p\frac{Q}{\delta}$. Въ воздухѣ вѣсы указываютъ равенство вѣсовъ тѣла и разновѣсокъ, слѣд.

$$P - p\frac{P}{D} = Q - p\frac{Q}{\delta} \text{ или } P\left(1 - \frac{p}{D}\right) = Q\left(1 - \frac{p}{\delta}\right),$$

откуда искомый истинный вѣсъ тѣла

$$P = Q\frac{1-\frac{p}{\delta}}{1-\frac{p}{D}}.$$

Въ виду малости поправокъ можно положить (см. стр. 243)

$$P = Q\left(1-\frac{p}{\delta}\right)\left(1+\frac{p}{D}\right) = Q\left(1+\frac{p}{D}-\frac{p}{\delta}\right)$$

или

$$P = Q + Qp\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{\delta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Вставляя значеніе (13), получаемъ

$$P = Q + 0{,}0012Q\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{\delta}\right) \text{ гр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

или

$$P = Q + 1{,}2Q\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{\delta}\right) \text{ мгр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Второй членъ въ (16) даетъ искомую поправку въ миллиграммахъ; въ немъ Q выражено въ граммахъ.

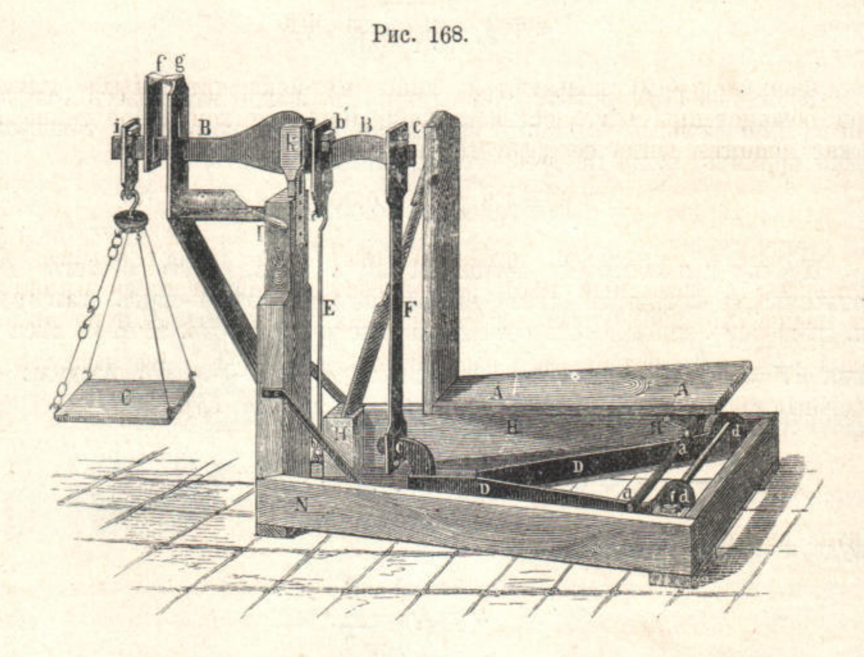
Когда взвѣшиваніе производится при помощи латунныхъ разновѣсокъ, то $\delta = 8{,}4$. Напишемъ (16) въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} P &= Q + kQ \\ k &= 1{,}2\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{8{,}4}\right) \text{ мгр.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

тогда

Существуютъ таблички, дающія значеніе множителя k для различныхъ плотностей D взвѣшиваемаго тѣла, а также таблички поправокъ для

Рис. 168.



случая, когда взвѣшиваніе производится при помощи платиновыхъ разновѣсокъ, для которыхъ $\delta = 22$ и слѣд. $k = 1{,}2\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{22}\right)$ мгр.

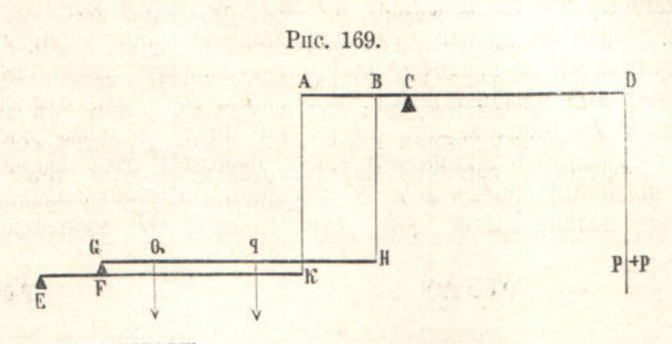
Изъ всѣхъ измѣреній взвѣшиваніе можетъ быть произведено съ наибольшею точностью, достигающей при надлежащемъ устройствѣ вѣсовъ, а главное навыкѣ и осмотрительности наблюдателя до $\frac{1}{10^7}$ измѣряемой величины, т.-е. до 0,1 мгр., когда взвѣшивается 1 килогр.

§ 8. Вѣсы десятичные, вѣсы Роберваля, Вестфаля и Траллеса. Разсмотримъ нѣкоторые приборы, служащіе для взвѣшиванія, но по конструкціи существенно отличающіеся отъ описанныхъ выше равноплечихъ вѣсовъ.

I. Вѣсы десятичные; они изображены въ нѣсколько разобранномъ видѣ на рис. 168. Взвѣшиваемый грузъ кладется на платформу AA, гири на доску C; платформа и доска связаны такою системою рычаговъ, что

при равновѣсіи истинный вѣсъ тѣла въ 10 разъ болѣе вѣса гирь, на какое бы мѣсто платформы AA не помѣстить тѣло. На схематическомъ рисункѣ 169 GH платформа, съ одной стороны опирающаяся на точку (линію) F рычага второго рода EK, съ другой привѣшенная къ точкѣ B рычага перваго рода AD, къ которому въ A привѣшенъ конецъ K рычага AK и въ D доска для гирь. Пусть Q опредѣляетъ мѣсто и вѣсъ тѣла, положеннаго на платформу, и P вѣсъ гирь, служащихъ для его уравновѣшиванія. Докажемъ, что $Q=10P$, если соблюдены слѣдующія два условія

Рис. 169.



$$\left.\begin{aligned} CD &= 10BC \\ \frac{EF}{EK} &= \frac{BC}{AC} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (18)$$

Грузъ Q давитъ на G и F съ силою $Q\frac{QH}{GH}$; часть $\frac{EF}{EK}$ этой силы дѣйствуетъ на K и на A и даетъ на рычагѣ AD моментъ $M_1 = Q\frac{QH}{GH}\cdot\frac{EF}{EK}\cdot AC = Q\cdot\frac{QH}{GH}BC$, см. (18). Тотъ же грузъ Q давитъ на H и B съ силою $Q\frac{GQ}{GH}$ и даетъ моментъ $M_2 = Q\frac{GQ}{GH}BC$. Сумма моментовъ

$$M_1 + M_2 = Q\frac{QH}{GH}BC + Q\frac{GQ}{GH}BC = Q\frac{BC}{GH}(QH+GQ) = Q\frac{BC}{GH}GH = Q\,.\,BC$$

должна равняться моменту гирь P, т.-е.

$$Q\cdot BC = P\,.\,CD,$$

откуда, см. (18),

$$Q = 10P.$$

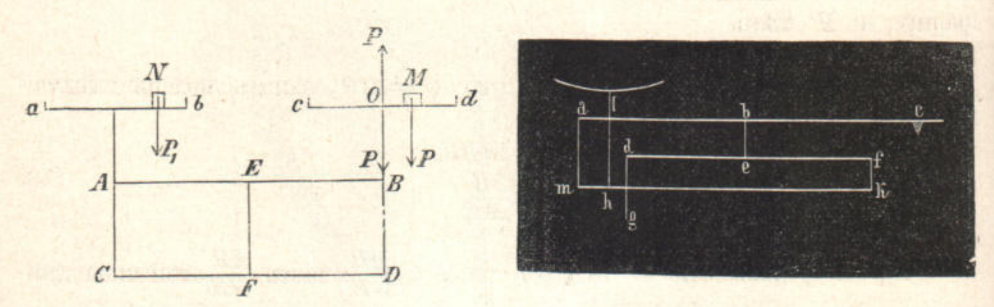
Если вѣсъ платформы q и вѣсъ доски p, то мы имѣемъ $(Q+q) = 10\ (P+p)$; но такъ какъ вѣсы находятся въ равновѣсіи безъ нагрузки, то $q=10p$, откуда опять $Q=10P$.

Существуютъ вѣсы, въ которыхъ $CD=100BC$; для нихъ $Q=100P$.

II. Вѣсы Роберваля употребляются для взвѣшиваній, не требующихъ особенно большой точности. Ихъ внѣшній видъ всѣмъ извѣстенъ; внутреннее устройство показано на схематическомъ рис. 170. Два стержня AB и CD одинаковой длины вращаются около неподвижныхъ точекъ E и F. Равновеликіе стержни AC и BD соединены съ ними четырьмя шарнирами; на ихъ продолженія насажены чашки ab и cd. Когда

вся система качается около точекъ E и F, то прямоугольникъ $ABDC$ принимаетъ форму параллелограмма, причемъ стержни AC и BD, не переставая быть параллельными неподвижной линіи EF, остаются вертикальными, вслѣдствіе чего чашки остаются горизонтальными. На какое мѣсто чашекъ мы ни положили бы тѣло M, вѣсъ котораго P, его дѣйствіе на всю систему рычаговъ будетъ такое же, какъ еслибы сила P имѣла точку приложенія въ центрѣ O чашки, т.-е. непосредственно дѣйствовала бы на стержень BD. Дѣйствительно: приложимъ къ O еще двѣ силы P (см. рис. 170); сила P, направленная вверхъ, и вѣсъ P тѣла составляютъ пару силъ, стремящуюся вращать чашку. Дѣйствіе этой пары уничтожается сопротивленіемъ точекъ E и F, мѣшающихъ чашкѣ перемѣщаться иначе, какъ параллельно самой себѣ. Остается сила OP, направленная внизъ. Изъ ска-

Рис. 170 Рис. 171.



заннаго ясно, что грузы M и N находятся въ равновѣсіи, когда ихъ вѣса P и P_1 равны между собою, гдѣ бы они ни лежали на чашкахъ

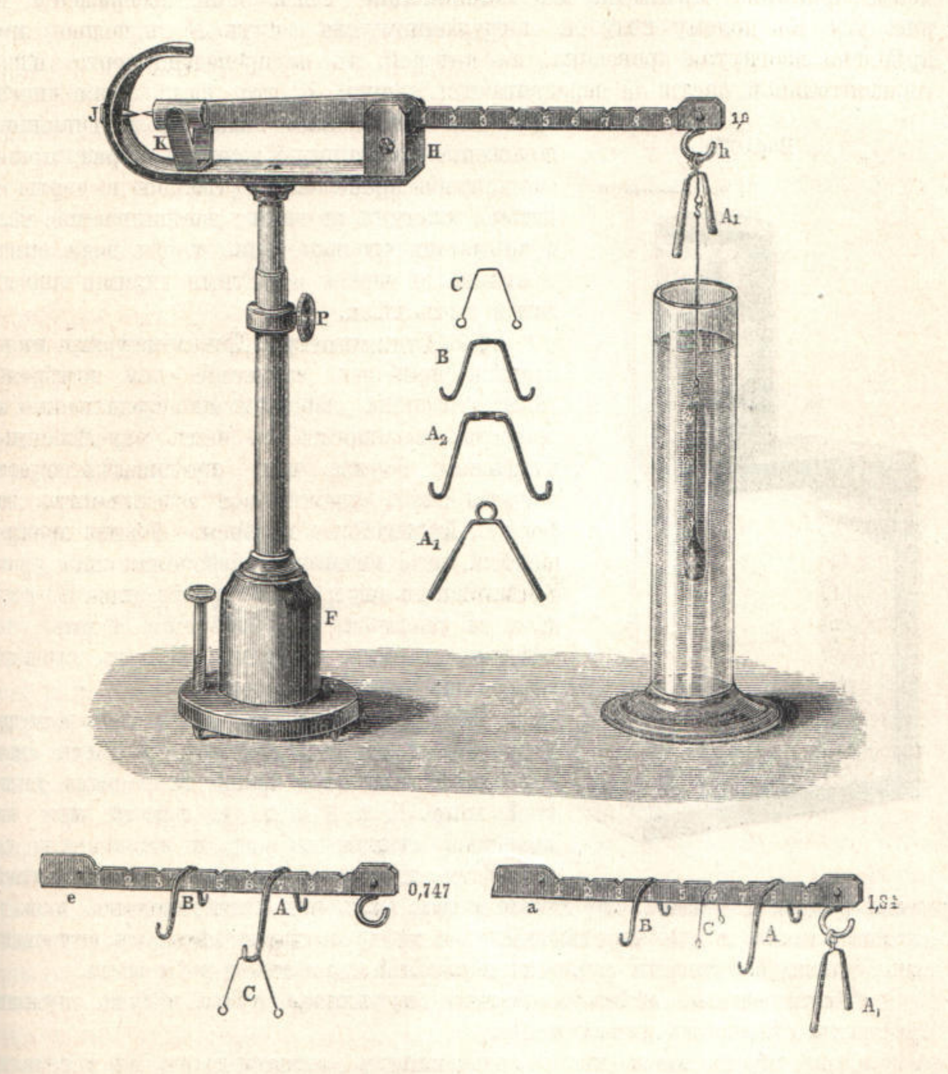
Докажемъ инымъ путемъ, что при равновѣсіи $P = P_1$. Положимъ, что грузы P и P_1, расположенные, какъ показано на рис. 170, несимметрично, находятся въ равновѣсіи. Если наклонить вѣсы налѣво, то правый грузъ P поднимется на нѣкоторую высоту h, а лѣвый P_1 опустится на h. Работа силы тяжести будетъ $P_1h - Ph$; эта работа должна равняться нулю, когда подъ вліяніемъ силы тяжести вся система находится въ равновѣсіи. $P_1h - Ph = 0$ даетъ $P = P_1$.

На рис. 171 показано устройство болѣе сложныхъ вѣсовъ, причемъ изображена лишь лѣвая ихъ половина; точки опоры находятся въ c и g; въ d, e, f, k, m, a и b находятся шарниры. И здѣсь стержень hl, поддерживающій чашку, остается вертикальнымъ, когда ac качается около c, а потому чашки перемѣщаются параллельно самимъ себѣ.

III. Вѣсы Westphal'я, иногда называемые одноплечими, хотя это названіе не точно, назначены для опредѣленія удѣльнаго вѣса жидкостей, а потому мы къ нимъ еще разъ возвратимся (см. Отдѣлъ пятый, гл. II § 5); теперь ограничиваемся описаніемъ этихъ вѣсовъ, изображенныхъ на рис. 172. Рычагъ KHh качается, какъ коромысло вѣсовъ на ребрѣ призмы около H. Плечо Hh раздѣлено на 10 частей; надъ дѣленіями сдѣланы маленькія зарубки, которыя, какъ и крючекъ h, служатъ для удобнѣйшаго привѣшиванія разновѣсокъ, изображенныхъ въ A_1, A_2, B и C. Они выбраны

такъ, что A_1 и A_2 имѣютъ одинаковый вѣсъ, вѣсъ B равенъ 0,1 и вѣсъ C — 0,01 вѣса A_1 и A_2, который примемъ за единицу. Легко понять, что нагрузка, изображенная внизу слѣва, соотвѣтствуетъ 0,747, а нагрузка справа — 1,846 ед. вѣса. Цилиндрикъ K служитъ противовѣсомъ; положеніе

Рис. 172.



равновѣсія опредѣляется тѣмъ, что остріе, прикрѣпленное къ K, должно находиться противъ острія J. Отпустивъ винтъ P, можно поднять или опустить систему JHh. Одна винтовая ножка служитъ для установки прибора. Мы увидимъ далѣе, какъ подбираютъ разновѣски для удобнаго опредѣленія плотности жидкостей. Но эти вѣсы могутъ служить и для опредѣленія вѣса тѣлъ, получаемаго однако въ единицахъ, равныхъ вѣсу A_1 и A_2.

Для этого опредѣлимъ нагрузку, приводящую вѣсы въ равновѣсіе, когда тѣло не привѣшено къ крючку *h*, а потомъ, когда оно къ нему прикрѣплено. Разность нагрузокъ и опредѣлитъ искомый вѣсъ тѣла. Для бо́льшаго удобства иногда увеличиваютъ число гирекъ, имѣющихся при вѣсахъ.

IV. Вѣсы Tralles'а представляютъ интересный примѣръ примѣненія принципа Архимеда къ взвѣшиванію тѣлъ. Они изображены на рис. 173. Къ полому тѣлу *A*, погруженному въ сосудъ *B* съ водою, прикрѣплена изогнутая проволока, на которой въ *m* проведена черта; вдоль горизонтальной части *de* передвигается чашка *S*, что даетъ возможность привести ось полаго тѣла въ вертикальное положеніе. На чашку *S* кладутъ сперва столько гирь, чтобы проволока опустилась до черты *m*; затѣмъ кладутъ на чашку взвѣшиваемое тѣло и снимаютъ столько гирь, чтобы вода опять доходила до черты *m*. Этими гирями опредѣлится вѣсъ тѣла.

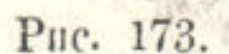
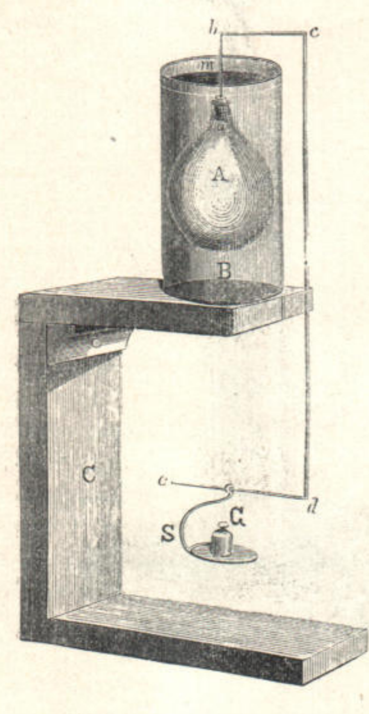


Рис. 173.



§ 9. Динамометры. Динамометрами называются приборы, служащіе для измѣренія силъ; эти силы, дѣйствуя непосредственно на приборъ, вызываютъ въ немъ опредѣленныя измѣненія формы, чему противодѣйствуютъ упругія силы, стремящіяся возстановить эту форму. Дальнѣйшее измѣненіе формы прекращается, когда внѣшняя измѣряемая сила уравновѣшиваетъ внутреннія упругія силы, растущія съ увеличеніемъ измѣненія формы; послѣднее, такимъ образомъ, можетъ служить мѣрою приложенной силы.

Для калибрированія динамометра заставляютъ на него дѣйствовать рядъ силъ извѣстной величины, проще всего рядъ тяжестей, напр. 1, 2, 3 и т. д. грамма или килограмма, смотря по роду и назначенію динамометра, и отмѣчаютъ вызванныя ими измѣненія формы. Понятно, что динамометръ, разъ онъ калиброванъ, можетъ служить также и для опредѣленія вѣса тѣлъ, замѣняя вѣсы, съ которыми онъ, однако, по степени точности показаній сравниться не можетъ.

Обыкновенные, всѣмъ извѣстные, пружинные вѣсы, могутъ служить простымъ примѣромъ динамометра.

Существуетъ множество разнообразныхъ динамометровъ, въ которыхъ имѣются дугообразно согнутыя пружины. На рис. 174 изображенъ одинъ изъ этихъ динамометровъ; измѣряемую силу заставляютъ сдавливать приборъ, т.-е. приближать обѣ половины пружины, изъ которыхъ одна *ADC*, какъ видно на рисункѣ, дѣйствуетъ на плечо ломаннаго рычага, другое плечо котораго составляетъ стрѣлка съ остріемъ, перемѣщающимся вдоль дугообразной шкалы *EF*. Одна половина пружины должна

быть закрѣплена неподвижно. Можно также закрѣпить приборъ въ C и заставить силу дѣйствовать въ A по направленію продолженія прямой CA. Удаленіе точекъ A и C другъ отъ друга вызоветъ взаимное приближеніе D и B и слѣд. движеніе стрѣлки. На дугѣ EF начертаны двѣ шкалы, соотвѣтствующія двумъ способамъ примѣненія прибора.

Большою точностью отличается динамометръ Poncelet и Morin'а, изображенный на рис. 175. Двѣ стальныя полоски AA и $A'A'$ соединены между собою шарнирами C, C', C'' и C''', около которыхъ концы ихъ могутъ вращаться при изгибаніи. Пластинка AA закрѣплена неподвижно; къ другой придѣланъ крючокъ, служащій для удобнѣйшаго приложенія силы (груза, тяги лошади и т. д.) и карандашъ R, проводящій по бумагѣ черту, длина которой и служитъ мѣрою приложенной силы, ибо, какъ оказывается, въ этомъ приборѣ сила и вызванное ею перемѣщеніе точки R съ высокою степенью точности другъ другу про-

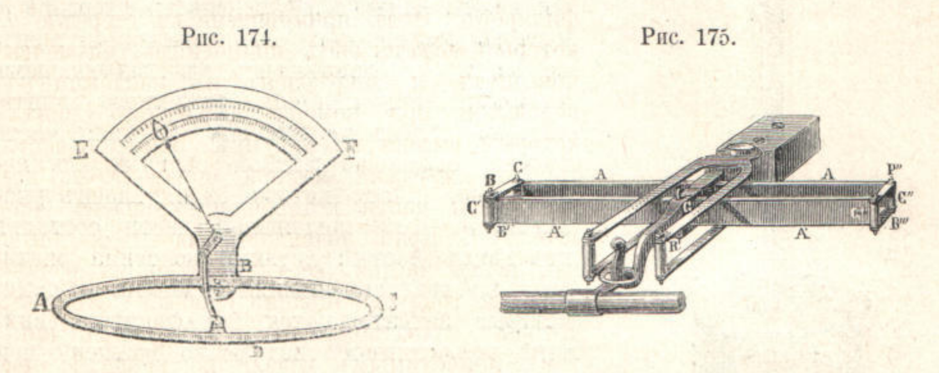


Рис. 174. Рис. 175.

порціональны. Необходимо только разъ навсегда опредѣлить, какой длинѣ черты соотвѣтствуетъ сила напр. въ 100 килогр., что очевидно легко сдѣлать. Лекціонный динамометръ построилъ Н. А. Гезехусъ (Ж. Ф. Х. О 17 стр. 69, 1885).

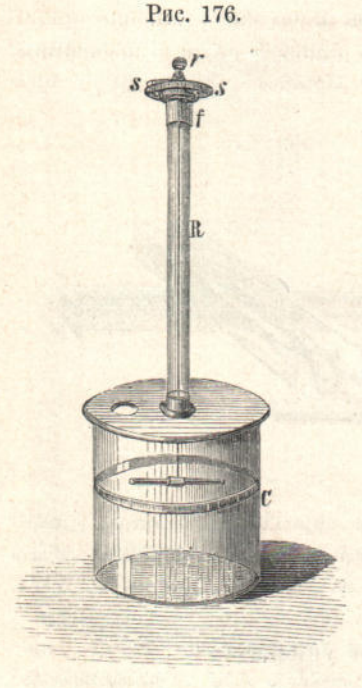
§ 10. Однонитные крутильные вѣсы или унифиляръ. Этотъ важный приборъ служитъ для измѣренія притягательныхъ или отталкивательныхъ силъ, обнаруживающихся въ различныхъ случаяхъ между тѣлами (всемірное тяготѣніе, притяженія и отталкиванія между магнитами или наэлектризованными тѣлами). На рис. 176 изображенъ одинъ изъ многихъ различныхъ видовъ унифиляра, иногда впрочемъ не представляющаго особаго прибора, но входящаго какъ часть въ составъ другихъ болѣе сложныхъ инструментовъ.

Существенная часть унифиляра — это горизонтальное, обыкновенно стержневидное тѣло, висящее на тонкой нити, прикрѣпленной надъ его центромъ тяжести. Нить можетъ быть металлическая (алюминій, серебро, платина), стеклянная или коконовая; въ послѣднее время стали приготовлять нити кварцевыя (предложены Boys'омъ въ Англіи). Горизонтальное тѣло можетъ быть весьма различное, смотря по тому для какихъ измѣреній назначенъ унифиляръ: это можетъ быть легкій стерженекъ, снабженный

на одномъ или на обоихъ концахъ шариками, магнитъ, плоская продолговатая пластинка и т. д. Это тѣло помѣщается въ унифилярѣ внутри круглаго или четыреугольнаго стекляннаго ящика, а нить внутри вертикальной трубки R, поставленной надъ круглымъ отверстіемъ, вырѣзаннымъ посреди крышки ящика. Въ этой крышкѣ имѣется обыкновенно сбоку еще второе отверстіе, служащее для ввода во внутрь ящика другого тѣла (магнита, наэлектризованнаго шарика), отталкивательное дѣйствіе котораго на горизонтальное тѣло требуется измѣрить.

Верхній конецъ нити прикрѣпленъ къ центру крышки вертикальной трубки. Эта крышка вращается, причемъ уголъ вращенія можетъ быть измѣренъ; кромѣ того обыкновенно существуетъ приспособленіе для подниманія или опусканія всей нити. На рис. 177 изображена верхняя часть трубки одного изъ унифиляровъ. Нить прикрѣплена къ стержню g, который можетъ быть приподнятъ, опущенъ, повернутъ и закрѣпленъ въ надлежащемъ положеніи при помощи зажимного винта, который виденъ на рисункѣ. Верхняя часть трубки окружена мѣдной оправой, къ неподвижной части которой прикрѣпленъ указатель d. Край подвижной части состоитъ изъ двухъ частей: верхняя половина раздѣлена на градусы, нижняя снабжена зубцами, которые захватываются безконечнымъ винтомъ, приводимымъ издали во вращеніе при помощи длиннаго стержня r и особаго сочлененія p, извѣстнаго подъ названіемъ шарнира Гука. Если желаютъ повернуть подвижную часть сразу на большой уголъ, то отодвигаютъ безконечный винтъ отъ зубчатаго колеса, пользуясь ручкой m, дѣйствующей на особый эксцентрикъ. Тогда посредствомъ четырехъ стержней s, s, s можно повернуть крышку трубки на желаемый уголъ.

Рис. 176.



Нижняя горизонтальная часть унифиляра вращается во время измѣреній около нити, къ которой она привѣшена, причемъ существуетъ возможность измѣрить уголъ поворота этой части. Въ нѣкоторыхъ приборахъ лента съ градусными дѣленіями наклеена снаружи на стеклянный ящикъ, или на стеклянной крышкѣ этого ящика начертанъ кругъ съ дѣленіями. Визируя сбоку или сверху, можно сдѣлать грубое опредѣленіе угла поворота подвижной части. Въ точныхъ приборахъ подвижная часть прибора снабжена зеркальцемъ и уголъ поворота опредѣляется по способу зеркала и шкалы (стр. 275).

Когда нить и нижній стержень (не магнитъ) вполнѣ предоставлены самимъ себѣ, то стержень принимаетъ нѣкоторое опредѣленное положеніе

покоя, соотвѣтствующее нормальному состоянію, при которомъ нить вполнѣ раскручена. Если одинъ изъ концовъ нити повернуть на нѣкоторый уголъ φ, то она уже будетъ находиться въ ненормальномъ состояніи, она будетъ **закручена**; въ ней разовьются внутреннія упругія силы, стремящіяся возстановить нормальное состояніе, т.-е. повернуть нижній, свободный конецъ, а слѣд. и тѣло, которое виситъ на этомъ концѣ. На этотъ конецъ и на это тѣло будетъ слѣд. дѣйствовать нѣкоторая **пара силъ**, моментъ которой мы обозначимъ черезъ M. Чѣмъ больше **уголъ крученія** φ, тѣмъ больше и моментъ M пары. Оказывается, что для очень тонкихъ

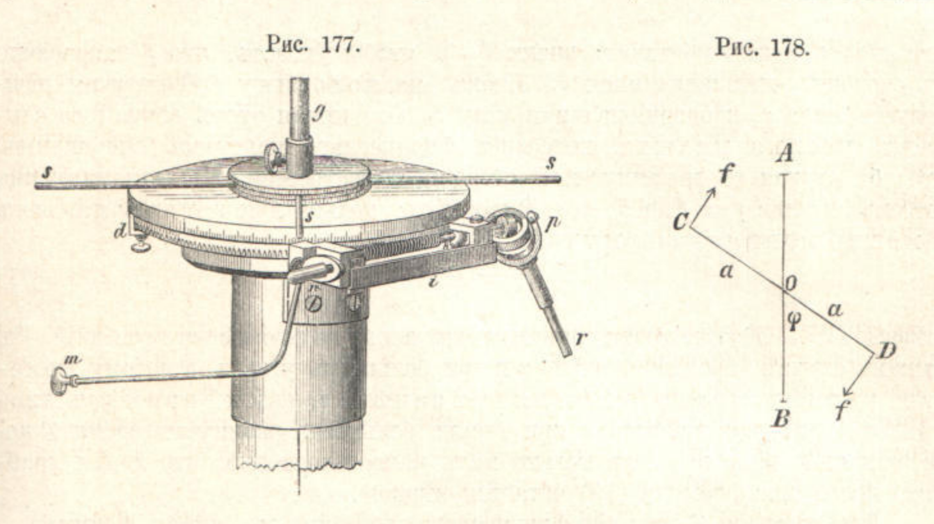


Рис. 177. Рис. 178.

проволокъ моментъ M пропорціоналенъ углу φ и что эта пропорціональность строго справедливо иногда до угловъ въ нѣсколько тысячъ градусовъ.

Мы можемъ слѣд. положить

$$M = C\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

гдѣ C равно численному значенію момента пары силъ, развивающейся при вращеніи свободнаго конца нити на уголъ, равный единицѣ (стр. 36).

Чтобы удержать свободный конецъ нити въ закрученномъ на уголъ φ положеніи, необходимо приложить къ нему пару силъ, моментъ которой очевидно долженъ равняться раскручивающему моменту M упругихъ силъ. Отсюда слѣдуетъ, что формула (19) опредѣляетъ собою и **моментъ** M **пары внѣшнихъ силъ**, которую необходимо приложить къ свободному концун ити, чтобы удержать нить въ закрученномъ на уголъ φ состояніи; C численно равно моменту пары, вызывающей уголъ крученія, равный единицѣ.

Численное значеніе коэффиціента C **можно опредѣлить изъ наблюденія времени** T **качанія горизонтальнаго стержня**, повернутаго въ сторону и затѣмъ предоставленнаго самому себѣ. Положимъ, что AB (рис. 178) положеніе стержня, когда нить, прикрѣпленная въ O и перпендикулярная къ плоскости рисунка, вполнѣ раскручена. Когда

стержень повернутъ на уголъ φ и занимаетъ положеніе CD, то на него дѣйствуетъ пара силъ, моментъ которой $M = C\varphi$. Эту пару силъ можно замѣнить произвольною парою ff, при условіи, чтобы

$$2fa = M,$$

гдѣ $a = CO = OD$. Сравнивая это равенство съ (19), получаемъ

$$f = \frac{C}{2a}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

гдѣ справа можно поставить знакъ ($-$), чтобы указать, что f направлено въ сторону уменьшающихся φ. Итакъ, на половину OD стержня дѣйствуетъ сила f, пропорціональная углу φ. Сравнивая этотъ случай со случаемъ весьма малыхъ колебаній физическаго маятника, мы видимъ, что оба случая съ механической стороны тожественны. Мы для маятника имѣемъ вообще $f = P\sin\varphi$, гдѣ P его вѣсъ; только для весьма малыхъ φ можно принять формулу

$$f = P\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

(вѣрнѣе $f = -P\varphi$), которая приводитъ къ закону изохронности колебаній. Въ нашемъ случаѣ f пропорціонально φ и при большихъ углахъ, а потому колебанія унифиляра представляютъ замѣчательный примѣръ изохронности: при малыхъ и при весьма большихъ размахахъ время T колебанія одно и то же, если только нить настолько тонка, что и для крайняго положенія формула (19) остается вѣрною.

Для времени T качанія физическаго маятника мы имѣли формулу

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

гдѣ K моментъ инерціи маятника относительно оси вращенія, P его вѣсъ и a разстояніе точки приложенія силы P (центра тяжести) отъ оси вращенія, см. (41) стр. 219.

Обозначая теперь черезъ K моментъ инерціи всего стержня AB относительно оси вращенія (оси нити) и прилагая (22) къ половинѣ OD стержня, мы должны въ (22) вмѣсто K положить $\frac{1}{2}K$. Сила $P = \frac{f}{\varphi} = \frac{C}{2a}$, см. (21) и (20).

Теперь (22) даетъ

$$T = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}K}{\frac{C}{2a}a}} = \pi\sqrt{\frac{K}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

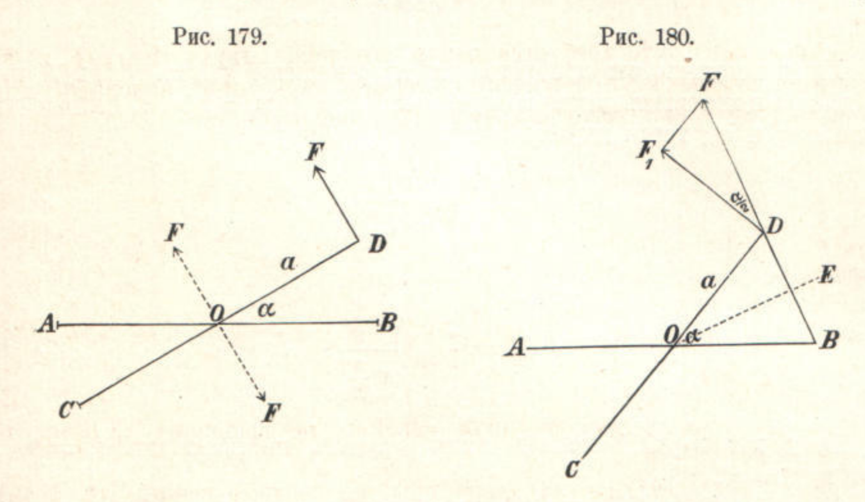
Послѣдняя формула даетъ

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Это весьма важная формула, дающая коэффиціентъ C, т.-е. моментъ пары силъ, закручивающей нижній конецъ нити на единицу угла. О способахъ опредѣленія момента инерціи K маятника, если таковой не можетъ быть вычисленъ на основаніи его геометрической формы (стр. 87), будетъ сказано ниже (стр. 319). Аналогичный пріемъ даетъ K для горизонтальной части унифиляра.

Помощью унифиляра можетъ быть измѣрена сила F, дѣйствующая на одинъ изъ концовъ стержня. Положимъ, что сначала стержень находился въ покоѣ и нить была раскручена. Отъ этого положенія будемъ считать уголъ поворота α стержня положительнымъ въ одну опредѣленную сторону. Если мы по какимъ либо причинамъ повернемъ и верхній конецъ нити, то этотъ уголъ вращенія β будемъ считать положительнымъ въ сторону,

Рис. 179. Рис. 180.



противуположную той, въ которой α считаемъ положительнымъ. Въ этомъ случаѣ крученіе φ нити будетъ равняться

$$\varphi = \alpha + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

а моментъ пары силъ, удерживающей стержень въ покоѣ, величинѣ $C\varphi = C\,(\alpha + \beta)$.

Положимъ, что AB (рис. 179) первоначальное, CD отклоненное положеніе стержня; $\angle BOD = \alpha$. Пусть сила F дѣйствуетъ на точку D перпендикулярно къ стержню, причемъ $OD = a$. Приложимъ къ O двѣ силы F, равныя и параллельныя DF. Одна изъ нихъ, имѣющая направленіе силы DF, уничтожается вѣсомъ стержня, вызвавъ небольшое отклоненіе точки O въ сторону; другая сила составитъ съ DF пару силъ, моментъ которой равенъ Fa. Для равновѣсія стержня мы должны имѣть

$$Fa = C\varphi,$$

откуда

$$F = \frac{C}{a}\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Другой случай мы имѣемъ, когда сила F направлена по хордѣ, соединяющей точки B и D (рис. 180), т.-е. когда въ B помѣщается тѣло, отталкивающее конецъ D стержня. Пусть F_1 слагающая силы F по направленію, перпендикулярному къ OD. Условіе равновѣсія теперь $F_1 a = C\varphi$; но $F_1 = F\cos\frac{\alpha}{2}$, ибо по перпендикулярности сторонъ $\angle FDF_1 = \angle EOD$, гдѣ $OE \perp DB$. Мы имѣемъ слѣд.

$$Fa\cos\frac{\alpha}{2} = C\varphi,$$

откуда

$$F = \frac{C\varphi}{a\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Предположимъ, что требуется найти отношеніе двухъ силъ F и F', при дѣйствіи которыхъ углы поворота стержня суть α и α', а полные углы крученія φ и φ'; тогда имѣемъ, кромѣ (27), еще равенство

$$F' = \frac{C\varphi'}{a\cos\frac{\alpha'}{2}},$$

откуда

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varphi}{\varphi'} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Если мы верхній конецъ нити совсѣмъ не вращаемъ ($\beta = 0$), то $\varphi = \alpha$ и $\varphi' = \alpha'$.

Формулы (26), (27) и (28) выведены въ предположеніи, что кромѣ силы F и раскручивающей пары M, исходящей изъ самой нити, никакая другая сила или пара на стержень не дѣйствуютъ. Бываютъ однако случаи, когда при вращеніи стержня, кромѣ пары M, развивается еще другая пара силъ, также стремящаяся возвратить стержень въ прежнее положеніе, причемъ моментъ M' этой пары есть функція угла α. Такой случай мы имѣемъ, когда горизонтальный стержень унифиляра есть магнитъ и его положеніе покоя совпадаетъ съ магнитнымъ меридіаномъ; мы увидимъ, что въ этомъ случаѣ M' пропорціонально $\sin\alpha$. Условіе равновѣсія стержня принимаетъ теперь вообще видъ

$$Fa\cos\frac{\alpha}{2} = C\varphi + M' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Пользуясь унифиляромъ, можно уголъ крученія φ сдѣлать произвольно большимъ, повернувъ верхній конецъ нити хотя бы на нѣсколько полныхъ оборотовъ, если нить настолько тонка, что формула (19) остается приложимой при такихъ крученіяхъ. Уголъ α стараются дѣлать не больше 60°.

Чувствительность унифиляра опредѣляется величиною, обратно

пропорціональною коэффиціенту C, ибо чѣмъ меньше моментъ пары силъ, вызывающей данное крученіе, тѣмъ чувствительнѣе приборъ. Не входя въ подробности, къ которымъ мы еще возвратимся, скажемъ, что чувствительность унифиляра тѣмъ больше, чѣмъ нить длиннѣе, чѣмъ она тоньше и чѣмъ ея матеріалъ меньше противится крученію. Болѣе точные законы разсмотримъ впослѣдствіи.

§ 11. Двунитные крутильные вѣсы или бифиляръ. Этотъ приборъ отличается отъ унифиляра только тѣмъ, что горизонтальный стержень AB (рис. 181) виситъ на двухъ нитяхъ CE и DF, о которыхъ мы, ради общности, предположимъ, что онѣ не параллельны.

Условіе равновѣсія заключается въ томъ, что AB должно находиться въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точки E и F, или иначе,

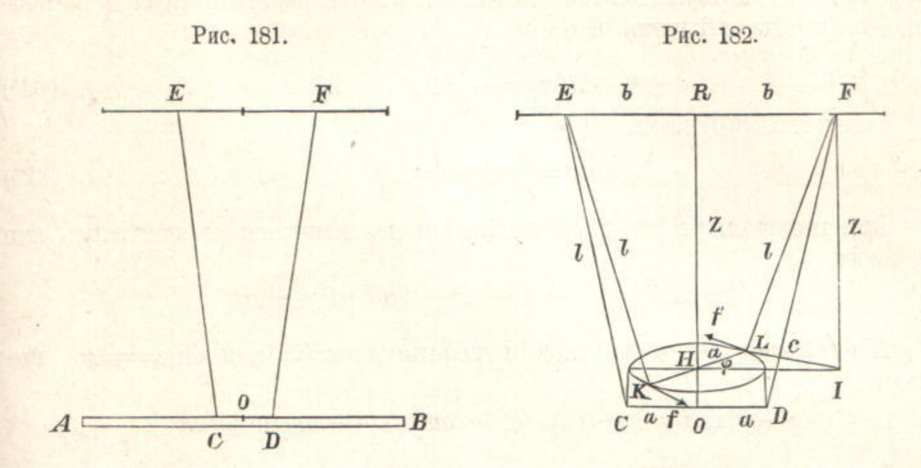


Рис. 181. Рис. 182.

что AB параллельно EF. Если мы повернемъ AB на нѣкоторый уголъ φ, который по аналогіи назовемъ угломъ крученія, около середины O, то точки D и C приподнимутся, ибо всѣ точки горизонтальнаго круга, діаметръ котораго CD, отстоятъ отъ F дальше, чѣмъ C и D. Итакъ, при закручиваніи бифиляра стержень AB поднимается, чему препятствуетъ вѣсъ P стержня. Закручивающая пара, моментъ которой обозначимъ черезъ M, уравновѣшивается слѣдовательно вѣсомъ P. Вліяніемъ небольшого закручиванія нитей и вѣсомъ нитей мы можемъ пренебречь.

Найдемъ условіе равновѣсія стержня AB, повернутаго парою M на уголъ φ. На рис. 182 изображена въ бо̀льшемъ масштабѣ средняя часть CD стержня въ положеніи нормальномъ; пусть $CO = OD = a$, $ER = RF = b$; OHR вертикальная линія; длина нитей $CE = DF = l$.

Подъ вліяніемъ пары силъ стержень принялъ положеніе KL, повернувшись на уголъ $iHL = \varphi$ и приподнявшись на высоту OH. Проведемъ черезъ F вертикальную линію FI и соединимъ точки I и L; пусть $RH = FI = z$ и $LI = c$; очевидно $HI = b$ и потому

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi.$$

Далѣе $\overline{FI}^2 = \overline{FL}^2 - \overline{LI}^2$, т.-е. $z^2 = l^2 - c^2$, слѣд.

$$z^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Внѣшнюю пару M мы представимъ себѣ замѣненною двумя силами f, приложенными къ L и K, перпендикулярно къ KL, причемъ $2af = M$. Стержень въ положеніи KL находится въ равновѣсіи. Чтобы найти связь между M и φ, положимъ, что стержень поворачивается далѣе на весьма малый уголъ $\Delta\varphi$ и при этомъ поднимается выше точки H на весьма малую величину, которую обозначимъ черезъ $-\Delta z$, такъ какъ величина z уменьшается.

Пара силъ произведетъ при этомъ маломъ вращеніи работу, равную $M\Delta\varphi$ (стр. 93), которая должна равняться работѣ поднятія груза P на высоту Δz. Отсюда слѣдуетъ, что

$$M\Delta\varphi = -P\Delta z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Равенство (30) даетъ

$$z\Delta z = -ab\sin\varphi \, . \, \Delta\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Для незнакомыхъ съ дифференціальнымъ исчисленіемъ замѣтимъ, что (30) даетъ

$$(z + \Delta z)^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos(\varphi + \Delta\varphi).$$

Пренебрегая величиной $(\Delta z)^2$ и полагая $\cos\Delta\varphi = 1$ и $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi$, получаемъ

$$z^2 + 2z\Delta z = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\varphi - 2ab\sin\varphi \, . \, \Delta\varphi.$$

Вычитая отсюда (30), получаемъ (32), изъ котораго опредѣлимъ Δz, подставимъ эту величину въ (31) и сократимъ на $\Delta\varphi$. Получается

$$M = \frac{ab}{z} P\sin\varphi.$$

Поднятіе OH всегда весьма малое и потому въ послѣдней формулѣ можно вмѣсто z подставить l; тогда получается

$$M = \frac{ab}{l} P\sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

а въ случаѣ параллельныхъ нитей ($b = a$)

$$M = \frac{a^2}{l} P\sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Обозначивъ постоянный множитель, стоящій передъ $\sin\varphi$ и характерный для даннаго бифиляра, черезъ C, имѣемъ

$$M = C\sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Сравнивая эту формулу съ (19) $M = C\varphi$ для унифиляра, мы видимъ, что моментъ закручивающей пары для унифиляра пропорціоналенъ углу крученія, а для бифиляра пропорціоналенъ синусу этого угла. Далѣе оказывается, что коеффиціентъ пропорціональности опредѣляется длиною и взаимнымъ расположеніемъ нитей и вѣсомъ стержня.

Чувствительность бифиляра тѣмъ больше, чѣмъ меньше C; слѣд. она пропорціональна длинѣ l нитей, обратно пропорціональна произведенію разстояній нитей на ихъ концахъ, или квадрату разстоянія нитей, если онѣ параллельны, и наконецъ обратно пропорціональна вѣсу горизонтальнаго стержня.

Формула (35) показываетъ, что M растетъ вмѣстѣ съ φ до $\varphi = 90^0$. Дальше закручивать бифиляръ и нельзя, а то стерженекъ, находясь въ неустойчивомъ равновѣсіи, можетъ повернуться до $\varphi = 180^0$, причемъ нити коснутся другъ друга и приборъ перестанетъ быть бифиляромъ.

Бифиляръ, подобно унифиляру (рис. 176 стр. 304) помѣщается внутри стекляннаго ящика, а нить внутри трубки, крышка которой вращается. Придавая буквамъ α, β и φ прежнее значеніе, имѣемъ опять, см. (25), $\varphi = \alpha + \beta$.

Если на стержень бифиляра дѣйствуетъ одна сила F (см. рис. 179), перпендикулярная къ нему и имѣющая точку приложенія на разстояніи a отъ середины стержня (это не то a, которое входитъ въ (32) и (34)), то вмѣсто (26) имѣемъ теперь

$$F = \frac{C}{a} \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Если же сила F имѣетъ направленіе прямой, соединяющей начальное и новое положенія точки стержня, находящейся на разстояніи a отъ его центра, то вмѣсто (27) имѣемъ теперь

$$F = \frac{C\sin\varphi}{a\cos\frac{\alpha}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Для отношенія двухъ силъ получаемъ, аналогично (28):

$$\frac{F}{F'} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Уголъ вращенія α можетъ быть измѣренъ, какъ и въ унифилярѣ, при помощи шкалы на стѣнкѣ или на крышкѣ ящика, или по способу шкалы и зеркала, прикрѣпленнаго ко стержню.

Коеффиціентъ C формулы (35) и для бифиляра можетъ быть найденъ на основаніи наблюденія времени качанія T бифиляра.

Если стержень бифиляра отклонить и затѣмъ предоставить самому себѣ, то онъ будетъ качаться, причемъ въ каждый данный моментъ онъ будетъ находиться подъ вліяніемъ пары силъ, моментъ которой $M = C\sin\varphi$.

Замѣняя эту пару мысленно двумя силами f (рис. 178 стр. 305), причемъ $2fa = M$, мы получаемъ

$$f = \frac{C}{2a}\sin\varphi \qquad (39)$$

Для маятника мы имѣли $f = P\sin\varphi$, а потому законъ колебаній бифиляра тожественъ съ закономъ колебаній маятника. Отсюда слѣдуетъ, что, въ отличіе отъ унифиляра, колебанія бифиляра изохронны только при весьма малыхъ размахахъ. Вставляя въ формулу (22), какъ и прежде, вмѣсто K величину $\frac{K}{2}$ и вмѣсто P дробь $\frac{C}{2a}$, см. (39) получаемъ опять

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{C}} \qquad (40)$$

и

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \qquad (41)$$

гдѣ K моментъ инерціи всего стержня относительно его оси вращенія и T время качанія при весьма малыхъ амплитудахъ.

Если кромѣ вѣса P, вызывающаго раскручивающій моментъ $C\sin\varphi$, на стержень дѣйствуетъ еще пара силъ, стремящаяся возвратить стержень въ его начальное положеніе, и если моментъ этой пары M', то условіе равновѣсія бифиляра будетъ, соотвѣтственно (29),

$$Fa\cos\frac{\alpha}{2} = C\sin\varphi + M' \qquad (42)$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Измѣреніе времени.

§ 1. Общія замѣчанія объ измѣреніи времени. Измѣреніе времени бываетъ двоякое: или требуется опредѣлить «истинное время», моментъ, когда нѣкоторое явленіе происходитъ или—величину промежутка времени, протекающаго между двумя моментами. Строго говоря, мы и въ первомъ случаѣ опредѣляемъ нѣкоторый промежутокъ времени, а именно тотъ, который истекъ отъ момента, отъ котораго мы, не по нашему выбору и произволу, а по установленному и общепринятому, считаемъ начало счета времени (годъ, мѣсяцъ, число, и далѣе часъ, минута и секунда, считаемые отъ послѣдней нижней кульминаціи средняго солнца) и до момента, «истинное время» котораго требуется опредѣлить. Однако условія, которымъ должны удовлетворять приборы въ этихъ двухъ случаяхъ измѣренія времени, различныя. При измѣреніяхъ перваго рода мы должны имѣть часы, которые весьма точно показываютъ истинное время, или для

которыхъ поправка, приводящая ихъ неточныя показанія къ этому истинному времени, хорошо извѣстна. При измѣреніяхъ второго рода необходимо имѣть вѣрный счетчикъ времени; самое же время, которое онъ показываетъ можетъ быть и невѣрно. Измѣренія перваго рода въ физикѣ встрѣчаются сравнительно рѣдко: они играютъ главную роль въ измѣреніяхъ астрономическихъ. Въ метеорологіи истинное время также отмѣчается, но обыкновенно для этого достаточно бываетъ того приближеннаго опредѣленія, которое дѣлается обыкновенными «вѣрно идущими» часами. Лишь изрѣдка, напр. при наблюденіи магнитныхъ бурь, землетрясеній и т. под., необходимо знать истинное время съ большею точностью.

За единицу времени принимаемъ секунду, одну 86400-ую долю среднихъ солнечныхъ сутокъ. Звѣздныя сутки содержатъ 86164,091 сек. Для измѣренія времени мы должны имѣть приборъ, въ которомъ совершалось бы какое либо періодическое движеніе, причемъ продолжительность періода должна составлять ровно секунду или простое ея кратное или подраздѣленіе. Примѣры такихъ приборовъ представляютъ часы стѣнные съ маятникомъ, карманные, далѣе пружинные часы, которые хранятся въ горизонтальномъ положеніи въ ящикахъ и по размѣрамъ не могутъ быть названы карманными и т. д. Часы, идущіе весьма правильно, т.-е. для которыхъ въ высокой степени соблюдено условіе равенства періодовъ, называются **хронометрами**.

Часы бываютъ пружинные и съ гирей (оставляемъ въ сторонѣ часы солнечные, песочные и т. под.). Часы требуютъ завода и слѣдуетъ принять за правило заводить пружинные часы черезъ одинаковые промежутки времени, напр. ежедневно въ одно и то же время.

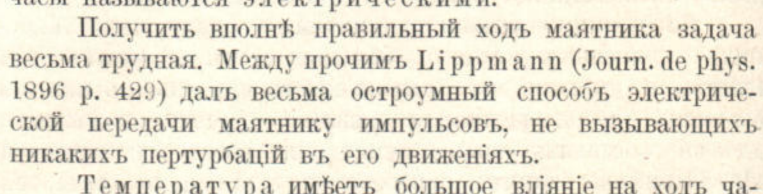
Часы, служащіе для измѣренія времени при физическихъ изслѣдованіяхъ, должны явственно отбивать секунды или полусекунды. Взглянувъ на часы и записавъ годъ, мѣсяцъ, день, часъ и минуту, наблюдатель по слуху отчитываетъ про себя секунды, сосредоточивая свое вниманіе на улавливаніи момента, когда произойдетъ сперва одно, а потомъ второе изъ тѣхъ явленій, между которыми требуется измѣрить промежутокъ времени. При нѣкоторомъ навыкѣ можно опредѣлить и десятыя доли секунды, если наблюдаемое явленіе, достаточно мгновенное, замѣчается между двумя ударами прибора, иногда называемаго въ этомъ случаѣ **счетчикомъ**.

Существуютъ весьма удобные счетчики особаго рода, служащіе для опредѣленія промежутка времени между моментами A и B возникновенія двухъ явленій или продолжительности одного явленія (тогда A его начало, B его конецъ). Это карманные часы съ добавочною стрѣлкою, дѣлающею въ одну минуту полный кругъ, раздѣленный на 300 частей (по 0,2 сек.). При нажатіи на особую пуговку стрѣлка становится на нулевое дѣленіе; при второмъ нажатіи (въ моментъ A) стрѣлка начинаетъ двигаться; при третьемъ нажатіи (въ моментъ B) она останавливается. Пройденная ею дуга опредѣляетъ искомую величину промежутка времени. При новомъ нажатіи стрѣлка перескакиваетъ опять на нулевое дѣленіе. Существуютъ и болѣе сложные счетчики съ двумя перескакивающими стрѣлками, весьма полезные въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

Къ счетчикамъ можно отнести и всѣмъ извѣстный метрономъ, изрѣдка и когда не требуется большой точности, примѣняемый и при физическихъ изслѣдованіяхъ.

Стѣнные часы употребляются при физическихъ изслѣдованіяхъ чаще всего съ секунднымъ маятникомъ, т.-е. такимъ, время одного колебанія котораго равно одной секундѣ. Движеніе маятника поддерживается давленіемъ поднятой гири или свернутой пружины или небольшими толчками, передаваемыми отъ другого секунднаго маятника, причемъ для передачи толчковъ пользуются электрическими токами. Такіе часы называются электрическими.

Рис. 183.



Получить вполнѣ правильный ходъ маятника задача весьма трудная. Между прочимъ Lippmann (Journ. de phys. 1896 p. 429) далъ весьма остроумный способъ электрической передачи маятнику импульсовъ, не вызывающихъ никакихъ пертурбацій въ его движеніяхъ.

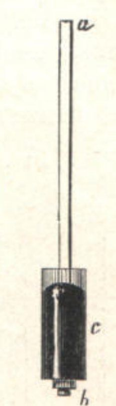
Температура имѣетъ большое вліяніе на ходъ часовъ; такъ напр. съ возвышеніемъ температуры увеличивается длина маятника, вслѣдствіе чего возростаетъ время качанія (часы отстаютъ). Для уничтоженія вліянія температуры (компенсированія) даютъ маятнику такое устройство, чтобы при измѣненіи температуры центръ качанія (стр. 218) оставался на мѣстѣ. Такой маятникъ называется уравнительнымъ или компенсаціоннымъ. На рис. 183 изображена одна изъ наиболѣе часто примѣняемыхъ конструкцій: къ верхней пружинѣ s прикрѣплена горизонтальная перекладина, къ концамъ которой привинчены два стальныхъ стержня, соединенныхъ внизу второю перекладиной, къ которой привинчены два латунныхъ стержня. Третья горизонтальная пластинка соединяетъ ихъ верхніе концы и поддерживаетъ два стальныхъ стержня, съ которыми тѣмъ же способомъ внизу соединены два стержня латунныхъ. Послѣдняя перекладина, соединяющая верхніе концы этихъ стержней, поддерживаетъ стальной средній стержень, къ которому прикрѣплена чечевица L. При возростаніи температуры чечевица опускается вслѣдствіе удлиненія трехъ параллельныхъ стальныхъ стержней и поднимается вслѣдствіе увеличенія длины двухъ паръ латунныхъ стержней. Коэффиціентъ теплового удлиненія для латуни однако въ 1,74 разъ больше, чѣмъ для стали. Подобравъ надлежащимъ образомъ длины стержней, можно достигнуть почти полной неподвижности центра качанія, а слѣд. и времени колебанія при измѣненіяхъ температуры.

На рис. 184 и 185 изображены два другихъ уравнительныхъ маятника. Первый состоитъ изъ стальной полоски, къ которой прикрѣпленъ стеклянный цилиндръ, содержащій ртуть, для которой тепловое расширеніе больше, чѣмъ для стекла, вслѣдствіе чего уровень ртути при повышеніи температуры поднимается, чѣмъ и компенсируется удлиненіе стального стержня.

Къ маятнику, изображенному на рис. 185, придѣлана горизон-

тальная полоска *ab*, къ концамъ которой прикрѣплены шарики *c c*; эта полоска состоитъ изъ двухъ спаянныхъ между собою полосокъ изъ различныхъ металловъ, причемъ нижняя состоитъ изъ металла, сильнѣе расширяющагося при нагрѣваніи, чѣмъ металлъ, изъ котораго сдѣлана полоска верхняя. При повышеніи температуры полоска *ab* вслѣдствіе этого искривляется такъ, что шарики *c c* приподнимаются къ верху, что и служитъ компенсаціей удлиненія самого маятника.

Рис. 184.



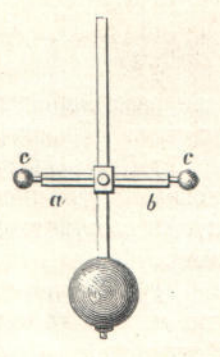
Величина атмосфернаго давленія имѣетъ нѣкоторое, хотя и весьма малое вліяніе на время качанія маятника (см. Tisserand C. R. 122, p. 646, 1896).

§ 2. Хронографы. Хронографами называются приборы, служащіе для записыванія (отмѣтки) моментовъ, когда имѣютъ мѣсто тѣ или другія явленія, и дающіе возможность опредѣлить промежутки времени между этими моментами.

Отмѣчаніе производится обыкновенно или на бумажной лентѣ, имѣющей продольное движеніе, подобно лентѣ въ телеграфномъ приборѣ Морзе, или на поверхности цилиндра, вращающагося около своей оси, имѣя при этомъ обыкновенно еще и поступательное движеніе по направленію этой оси. Движенія ленты и цилиндра регулируются часовыми механизмами; въ нѣкоторыхъ случаяхъ вращеніе цилиндра производится отъ руки.

Значки на лентѣ дѣлаются иглою, карандашемъ или цвѣтными чернилами, или электрической искрой отъ индукціонной катушки Румкорфа, перескакивающей отъ острія на металлическую полоску, лежащую подъ лентою; она оставляетъ на бумагѣ слѣдъ ввидѣ прокола. Движенія иглы, карандаша и т. д. вызываются притяженіями маленькаго электромагнита, черезъ который въ опредѣленный моментъ посылается токъ; искра получается вслѣдствіе мгновеннаго разрыва первичнаго (индуктирующаго) тока въ этотъ же моментъ. Замыканія или размыканія тока производятся самимъ наблюдателемъ въ надлежащій моментъ или автоматически, когда напр. пуля или ядро, вылетая изъ ружья или пушки, разрываетъ проволоку, по которой идетъ токъ.

Рис. 185.

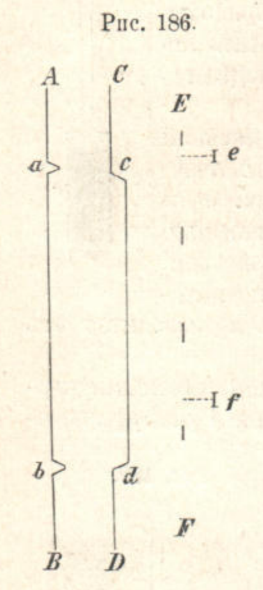


Поверхность цилиндра, обыкновенно металлическую, слѣдуетъ покрыть тонкимъ слоемъ сажи (закоптить) или, сперва слегка покрывъ слоемъ жира или вазелина, обсыпать порошкомъ плауноваго сѣмени. Значки на этой поверхности ставятся остріемъ или электрической искрой. Иногда покрываютъ цилиндръ листомъ бумаги, на которомъ тѣмъ или другимъ способомъ получаются значки, и который можно сохранить, снявъ его съ цилиндра. Когда цилиндръ имѣетъ только вращательное движеніе, то чертящій приборъ долженъ имѣть поступательное движеніе параллельно его оси, дабы значки, соотвѣтствующіе отдѣльнымъ оборотамъ цилиндра, не перепутывались и располагались по винтовой

линіи. Если же чертящій приборъ неподвиженъ, то ось цилиндра должна имѣть винтовую нарѣзку и проходить черезъ гайку, вслѣдствіе чего цилиндръ, вращаясь, будетъ имѣть поступательное движеніе, а значки будутъ располагаться по винтовой линіи. Наконецъ существуютъ хронографы съ неподвижнымъ цилиндромъ, вокругъ котораго вращается чертящее остріе. Черченіе остріемъ можетъ быть различное:

1) Штифтъ находится на небольшомъ разстояніи отъ поверхности цилиндра и только въ отмѣчаемые моменты на мгновенье до нея прикасается; тогда получаются отдѣльныя точки или весьма коротенькія черточки, разстояніе которыхъ другъ отъ друга служитъ мѣрою опредѣяемаго промежутка времени, который можетъ также измѣряться длиною непрерывной черты, если въ началѣ этого времени заставить остріе коснуться поверхности цилиндра, а въ концѣ отъ нея удалиться.

Рис. 186.



2) Остріе касается поверхности цилиндра и въ опредѣленные моменты или въ теченіе нѣкотораго времени отъ нея удаляется; тогда перерывы въ чертѣ служатъ для опредѣленія измѣряемаго времени.

3) Остріе касается поверхности цилиндра и въ опредѣленные моменты или въ теченіе измѣряемаго времени нѣсколько перемѣщается въ сторону. Тогда на цилиндрѣ получается линія вродѣ AB или CD (рис. 186); измѣряемый промежутокъ времени опредѣляется разстояніями ab или cd.

На бумажной лентѣ или на поверхности цилиндра хронографа мы тѣмъ или другимъ способомъ получаемъ значки, разстояніе между которыми опредѣляетъ собою измѣряемый промежутокъ времени. Чтобы однако сдѣлать это опредѣленіе, необходимо знать, какое разстояніе значковъ соотвѣтствуетъ единицѣ времени, т.-е. секундѣ. Для этого существуютъ слѣдующіе способы:

1) Скорость вращенія цилиндра извѣстна; положимъ, что радіусъ его основанія R и число оборотовъ въ секунду n; въ такомъ случаѣ одной секундѣ соотвѣтствуетъ длина $2\pi nR$ (если пренебречь наклономъ винтовой линіи).

2) Имѣются часы съ секунднымъ маятникомъ, который при каждомъ качаніи на одно мгновеніе замыкаетъ или размыкаетъ токъ особой батареи, дѣйствующей на второе остріе, поставленное рядомъ съ первымъ и отмѣчающее на лентѣ или на цилиндрѣ однимъ изъ вышеописанныхъ способовъ моменты, отстоящіе другъ отъ друга на одну секунду. На рис. 186 четыре черточки между E и F представляютъ секундные значки, e и f значки, соотвѣтствующіе какимъ-либо двумъ отмѣченнымъ моментамъ, промежутокъ между которыми оказывается равнымъ $2,7 - 0,2 = 2,5$ сек.

3) На вращающемся цилиндрѣ получаютъ волнообразную линію отъ острія, прикрѣпленнаго къ звучащему камертону, число колебаній котораго извѣстно. На рис. 187 изображенъ цилиндръ съ винтовою

осью и передъ нимъ камертонъ K; острія на рисункѣ не видно. При вращеніи цилиндра остріе начертило бы волнистую кривую, изображенную на рис. 188, еслибы цилиндръ имѣлъ только вращательное движеніе. Если же цилиндръ имѣетъ и поступательное движеніе, то волнистая кривая располагается вдоль винтовой линіи, какъ показано на рис. 189. Весьма полезно до и послѣ полученія волнистой кривой вращать цилиндръ при неподвижномъ камертонѣ такъ, чтобы остріе начертило простую винтовую линію, дѣлящую волновую линію на двѣ симметричныя части.

Рис. 187.

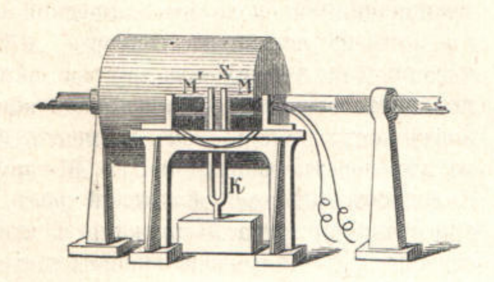
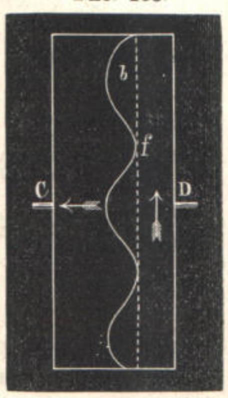
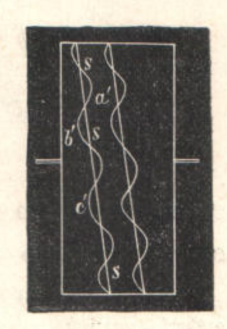


Рис. 188.



Чтобы заставить камертонъ K (рис. 187) звучать, помѣщаютъ его между двумя электромагнитами M и M', черезъ обмотку которыхъ посылаютъ въ секунду n кратковременныхъ токовъ, гдѣ n есть число колебаній камертона въ секунду. Для этого служитъ камертонъ-прерыватель, изображенный на рис. 190, также производящій n колебаній въ секунду. Къ его концамъ прикрѣплены два штифтика K и O; изъ нихъ K нѣсколько погружается въ ртуть, находящуюся въ лѣвомъ стаканѣ, между тѣмъ какъ O не доходитъ до поверхности ртути въ правомъ стаканѣ. Распредѣленіе проводовъ и электромагнитовъ видно на чертежѣ. Въ боковое отвѣтвленіе, обозначенное пунктиромъ, введены электромагниты, находящіеся съ двухъ сторонъ отъ камертона K (рис. 187). Когда цѣпь батареи E (рис. 190) замыкается, токъ проходитъ по пути, указанному стрѣлками, и электромагниты притягиваютъ ножки камертона. Тогда штифтъ K выходитъ изъ ртути, а штифтъ O опускается въ ртуть; вслѣдствіе этого главная цѣпь размыкается, а боковая цѣпь замыкается: въ пишущій приборъ (рис. 187) устремляется токъ. Но вслѣдствіе перерыва главнаго тока электромагниты M и M' (рис. 190) теряютъ свою силу, ножки камертона возвращаются въ положеніе, изображенное на рисункѣ. K входитъ въ ртуть, O выходитъ изъ ртути; главная цѣпь опять замыкается, побочная размыкается, электромагниты вновь притягиваютъ ножки камертона и т. д. Въ результатѣ

Рис. 189.



камертонъ рис. 190 начинаетъ звучать, дѣлая въ секунду n колебаній и замыкая при этомъ n разъ боковую цѣпь, такъ что въ электромагнитахъ рисунка 187 появляется n токовъ въ секунду и ножки камертона K подвергаются n притяженіямъ, что и заставляетъ его звучать.

Интересный способъ измѣренія малыхъ промежутковъ времени придумалъ Pouillet. Главная часть его прибора изображена на рис. 191; она состоитъ изъ стекляннаго круга B, быстро вращающагося около металлической оси A, съ которою соединенъ секторъ AB, наклеенный на поверхность круга и состоящій изъ листового олова. Пружина C касается поверхности стекла. Токъ элемента E проходитъ черезъ гальванометръ M, пружину C, секторъ AB и ось A каждый разъ, когда при вращеніи круга B пружина C касается сектора AB. Продолжительность τ этого касанія зависитъ отъ скорости вращенія круга и отъ ширины сектора. Отклоненіе φ стрѣлки гальванометра зависитъ отъ продолжительности τ дѣйствія тока. Зная τ, которое легко вычислить по скорости вращенія круга и ширинѣ сектора, и наблюдая отклоненія φ, можно составить табличку, относящуюся къ опредѣленной силѣ i тока. Чтобы измѣрить продолжительность t какого либо явленія, располагаютъ опытъ такъ, чтобы въ моментъ начала явленія замыкался, а въ моментъ его окончанія размыкался токъ той же силы i. По отклоненію стрѣлки можно, пользуясь предварительно составленной табличкой, опредѣлить продолжительность t изучаемаго явленія.

Рис. 190.

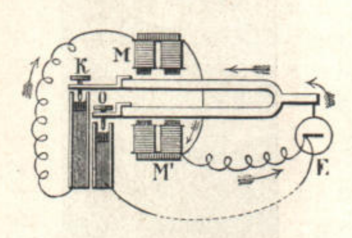
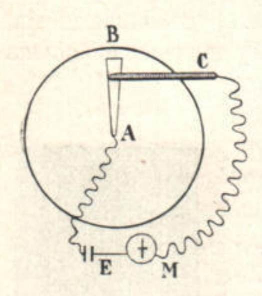


Рис. 191.



Разсмотрѣнными здѣсь способами могутъ быть измѣрены весьма малые промежутки времени и притомъ съ большою точностью. Если напр. окружность цилиндра равна 1 метру, если онъ дѣлаетъ 4 оборота въ секунду, и положеніе значковъ, напр. слѣдовъ электрическихъ искръ, можетъ быть опредѣлено съ точностью до 0,2 мм., то измѣряемые промежутки времени опредѣлятся съ точностью до $\frac{1}{10000}$ сек.

При рѣшеніи спеціальныхъ вопросовъ, встрѣчающихся въ ученіяхъ о свѣтѣ, звукѣ, электричествѣ и т. д., употребляются особые приборы, служащіе для измѣренія малыхъ промежутковъ времени; мы ихъ разсмотримъ вмѣстѣ съ этими вопросами.

§ 3. Опредѣленіе времени качанія маятника. Мы имѣли для времени T качанія физическаго маятника формулу

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

см. (42) стр. 219, гдѣ K моментъ инерціи маятника относительно оси

вращенія, P его вѣсъ, a разстояніе центра тяжести отъ оси привѣса и α уголъ полуразмаха, на который маятникъ удаляется отъ вертикальнаго положенія. Для безконечно малыхъ колебаній имѣемъ

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

такъ что

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Задача заключается въ опредѣленіи величины T_0. Когда размахи весьма малы, можно считать, что наблюдаемое время качанія T и есть время T_0.

Для опредѣленія времени качанія маятника отмѣчаютъ какимъ либо изъ вышеописанныхъ способовъ моменты послѣдовательныхъ его прохожденій черезъ положеніе равновѣсія. Удобнѣе всего отмѣтить сперва моментъ одного прохожденія, которое будемъ считать нулевымъ, и затѣмъ моментъ n-таго прохожденія, гдѣ n напр. 50 или 100. Промежутокъ времени отъ нулевого до n-таго прохожденія, въ теченіе котораго маятникъ совершилъ n колебаній, обозначимъ черезъ τ_n. Для очень малыхъ колебаній можно принять

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Для большей точности воспользуемся формулой (3) и примемъ во вниманіе, что колебанія маятника суть колебанія затухающія (стр. 136), амплитуды которыхъ уменьшаются, какъ члены убывающей геометрической прогрессіи. Вмѣсто α можемъ взять среднее между первымъ угломъ размаха α_1 и послѣднимъ α_n, тогда

$$T = \frac{\tau_n}{n} = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{4}\right),$$

откуда

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{4}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Болѣе точная формула имѣетъ видъ:

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \frac{1}{1 + \dfrac{\sin(\alpha_1 + \alpha_n)\sin(\alpha_1 - \alpha_n)}{32 \lg \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_n}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

гдѣ lg знакъ натуральныхъ логариѳмовъ. Величину размаха можно опредѣлять напр. помощью горизонтальной шкалы, установленной за нижнимъ концомъ маятника параллельно плоскости качанія.

§ 4. Моментъ инерціи маятника. Лишь въ немногихъ случаяхъ можно найти моментъ инерціи K маятника путемъ вычисленія, зная форму и размѣры маятника и пользуясь одною изъ формулъ, выведенныхъ на

стр. 87—89. Если M масса маятника, то K вообще представится въ видѣ $M\rho^2$; вставляя это и $P = Mg$ въ (2), получаемъ

$$T_0 = \pi \frac{\rho}{\sqrt{ga}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Положимъ напр., что маятникъ состоитъ изъ весьма тонкой нити, массой которой можно пренебречь, и сплошного шара, радіусъ котораго R. Обозначая черезъ l разстояніе отъ точки привѣса до центра шара, имѣемъ на основаніи формулы (39) стр. 89 и (3) стр. 209, что

$$K = \frac{2}{5} MR^2 + Ml^2; \text{ отсюда } \rho = \sqrt{l^2 + \frac{2}{5}R^2}.$$

Принимая центръ тяжести маятника въ центрѣ шара, имѣемъ $a = l$. Формула (7) даетъ въ этомъ случаѣ

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Для опытнаго опредѣленія величины K поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Опредѣляютъ сперва время T_0 качанія маятника, т.-е величину

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Затѣмъ прикрѣпляютъ къ нему добавочное тѣло (оно можетъ состоять и изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ частей), центръ тяжести котораго совпадалъ бы съ осью вращенія, и моментъ инерціи K_1 котораго относительно этой оси вращенія былъ бы извѣстенъ. Такимъ тѣломъ можетъ напр. служить кольцо, центръ котораго лежитъ на оси вращенія, а стороны параллельны плоскости качанія, см. (36) стр. 87. Новое время качанія T_1 получится, если вставить въ (9) $K + K_1$ вмѣсто K и $(P + P_1)\,a'$ вмѣсто Pa, гдѣ P_1 вѣсъ добавочнаго тѣла; a' разстояніе новаго центра тяжести маятника отъ оси вращенія. Однако формула (27) стр. 80 даетъ $(P + P_1)a' = Pa + P_1 . 0$, ибо разстояніе центра тяжести добавочнаго тѣла отъ оси вращенія есть нуль. Получаемъ

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K + K_1}{Pa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

(9) и (10) даютъ

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{K + K_1}{K} = 1 + \frac{K_1}{K}; \quad \frac{K_1}{K} = \frac{T_1^2 - T_0^2}{T_0^2},$$

и наконецъ

$$K = K_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

§ 5. Сравненіе времени качанія двухъ маятниковъ; методъ совпаденій. Предполагается, что время T качанія одного изъ двухъ маят-

никовъ извѣстно и что время T_1 качанія другого мало отличается отъ T. Два маятника, времена качаній которыхъ желаютъ сравнить, помѣщаютъ одинъ за другимъ такъ, чтобы они качались въ параллельныхъ другъ другу плоскостяхъ. Черезъ трубу, ось которой перпендикулярна къ этимъ плоскостямъ и проходитъ черезъ положенія равновѣсія маятниковъ, наблюдаютъ ихъ качанія. Положимъ, что въ нѣкоторый моментъ оба маятника одновременно и въ одинаковомъ направленіи проходятъ черезъ положенія равновѣсія.

Если T_1 не равно T, то маятники затѣмъ разойдутся; слѣдуетъ замѣтить, который изъ нихъ идетъ быстрѣе. Черезъ нѣкоторое время, когда одинъ маятникъ сдѣлаетъ n' колебаній, они опять одновременно пройдутъ черезъ середину, приближаясь къ ней съ противоположныхъ сторонъ. Въ этотъ моментъ другой маятникъ сдѣлалъ $n'+1$ или $n'-1$ колебаніе. Однако эту встрѣчу маятниковъ неудобно наблюдать и потому опредѣляютъ число n колебаній, которое совершаетъ первый маятникъ до того момента, когда маятники опять вмѣстѣ, т.-е. въ одномъ направленіи проходятъ черезъ положеніе равновѣсія. Въ этотъ моментъ второй маятникъ совершилъ $n+2$ или $n-2$ колебанія. Равенство $nT=(n\pm 2)T_1$ даетъ искомое отношеніе

$$\frac{T_1}{T}=\frac{n}{n\pm 2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Точность метода увеличится, если выждать $m^{\text{-тое}}$ совпаденіе и сосчитать соотвѣтствующее число N колебаній перваго маятника; въ этотъ моментъ второй маятникъ оканчиваетъ $N\pm 2m^{\text{-тое}}$ колебаніе, и мы имѣемъ

$$\frac{T_1}{T}=\frac{N}{N\pm 2m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Если первый маятникъ секундный ($T=1$), то (12) или (13) даютъ время T_1 колебанія второго маятника

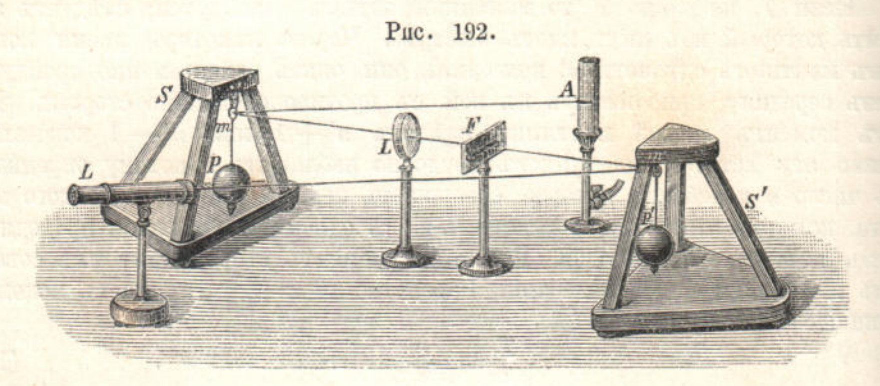
$$T_1=\frac{n}{n\pm 2}\ \text{сек. или}\ T_1=\frac{N}{N\pm 2m}\ \text{сек.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Существуютъ различныя приспособленія, облегчающія наблюденіе моментовъ совпаденія, т.-е. совмѣстнаго прохожденія обоихъ маятниковъ; они зависятъ отъ вида маятниковъ, и мы объ этомъ скажемъ въ § 3 слѣдующей главы (стр. 328).

§ 6. Стробоскопическій методъ Lippmann'а сравненія временъ качанія двухъ маятниковъ (J. de phys. (2) 6, p. 266, 1887). На рис. 192 схематически показано распредѣленіе приборовъ. P и P' два маятника, времена колебаній которыхъ близки другъ къ другу; они качаются въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ S и S'. Къ нимъ прикрѣплены зеркальца m и m', поверхности которыхъ перпендикулярны къ плоскостямъ качанія. Въ A находится горизонтальная свѣтящаяся щель; лучи, идущіе изъ A, отражаются отъ m и даютъ при помощи стекла L изображеніе щели въ томъ мѣстѣ, гдѣ въ пластинкѣ F находится другая горизонтальная щель.

Отсюда лучи идутъ къ m' и отражаются въ трубу L, съ помощью которой и разсматривается щель F. Въ окулярѣ трубы L находится вертикальная микрометрическая шкала (см. стр. 265). Когда оба маятника въ покоѣ, то наблюдатель видитъ яркую горизонтальную линію въ серединѣ этой шкалы. Когда только P' качается, то онъ видитъ яркую линію, качающуюся вверхъ и внизъ; когда только P качается, онъ видитъ линію мелькающею посереди шкалы въ тѣ моменты, когда маятникъ P проходитъ черезъ положеніе равновѣсія, ибо при другихъ его положеніяхъ изображеніе щели A

Рис. 192.



не попадаетъ на щель F. Такихъ появленій линіи будетъ два при каждомъ полномъ (туда и обратно) качаніи P. Когда, наконецъ, оба маятника качаются, и времена ихъ качаній одинаковы, то наблюдатель видитъ двѣ свѣтлыя линіи, появляющіяся поперемѣнно, когда P проходитъ черезъ положенія равновѣсія, и расположенныя симметрично выше и ниже средины шкалы, смотря по случайной разности фазъ качаній маятниковъ. Если времена качаній не вполнѣ одинаковы, то положеніе этихъ двухъ линій постепенно мѣняется и настаетъ моментъ, когда онѣ обѣ сливаются въ одну въ серединѣ шкалы. Въ этотъ моментъ колебанія «совпадаютъ», т.-е. оба маятника одновременно проходятъ черезъ положеніе равновѣсія. Остается сосчитать число n линій, которыя появятся до слѣдующаго такого совпаденія; тогда время n качаній маятника P равно времени $n \pm 1$ качанія маятника P'.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

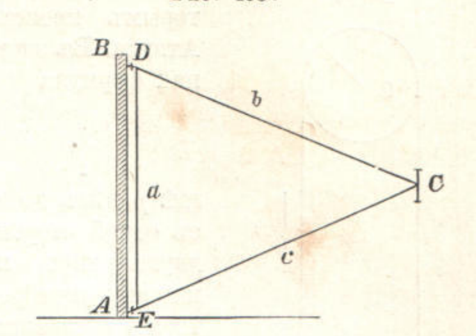
Измѣреніе напряженія силы тяжести.

§ 1. Направленіе силы тяжести. Законъ всемірнаго тяготѣнія учитъ, что силу тяжести въ данной точкѣ можно разсматривать какъ равнодѣйствующую силъ притяженія, какъ бы исходящихъ отъ всѣхъ частей земного шара. Появляющаяся при вращеніи земли центробѣжная сила нѣсколько уклоняетъ въ сторону направленіе силы, дѣйствующей на

тѣла у поверхности земли. Это отклоненіе равно нулю на полюсахъ и на экваторѣ; оно равно 11′30″ на широтѣ 45°. Направленіе равнодѣйствующей силы тяжести и центробѣжной силы называется вертикальнымъ; оно опредѣляется направленіемъ неподвижной, закрѣпленной на одномъ концѣ нити, къ другому концу которой прикрѣпленъ грузъ, или направленіемъ, перпендикулярнымъ къ горизонтальной плоскости, которая съ своей стороны можетъ быть опредѣлена уровнемъ.

Направленіе вертикальной линіи до послѣдняго времени считалось какъ бы основнымъ, неизмѣннымъ, и къ нему относили другія направленія, измѣряя отъ него различные углы. Высокая степень точности, до которой въ настоящее время доведены измѣренія угловъ, и которая привела къ открытію малыхъ измѣненій широтъ, т.-е. колебаній положенія оси вращенія внутри самой земли, заставила обратиться къ вопросу, дѣйствительно ли направленіе силы тяжести, а слѣд. и горизонтальной плоскости есть нѣчто совершенно неизмѣнное для даннаго мѣста на земной поверхности. Этимъ вопросомъ занимался впервые Zoellner (1871 г.), построивъ особый приборъ, горизонтальный маятникъ, дающій возможность подмѣтить малѣйшія колебанія вертикальной линіи. Въ 1894 г. появилось обширное изслѣдованіе Rebeur-Paschwitz'a, произведенное съ усовершенствованнымъ горизонтальнымъ маятникомъ въ Вильгельмсгавенѣ, Потсдамѣ и въ Пуэрто Оротава (на островѣ Тенериффѣ). Въ настоящее время (1895) наблюденія предполагается производить въ Страсбургѣ, въ Николаевѣ и въ Харьковѣ. Идея горизонтальнаго маятника весьма проста; ее можно понять изъ схематическаго рисунка 193. Къ вертикальной оси AB подвѣшенъ треугольникъ DEC, составленный изъ легкихъ трубокъ a, b и c; способъ подвѣса таковъ, что онъ съ весьма малымъ треніемъ можетъ качаться около оси AB. Если эта ось совпадаетъ съ вертикальнымъ направленіемъ, то маятникъ DCE будетъ находиться въ безразличномъ равновѣсіи; но если ось вращенія составляетъ хотя бы весьма малый уголъ съ вертикальнымъ направленіемъ, то маятникъ приметъ опредѣленное положеніе равновѣсія, причемъ его центръ тяжести расположится въ плоскости, проходящей черезъ ось вращенія и вертикальную линію. Малѣйшія боковыя колебанія вертикальнаго направленія повлекутъ за собою измѣненія въ положеніи равновѣсія маятника, которыя наблюдаются шкалой и трубой при помощи зеркальца C. Такимъ путемъ могутъ быть замѣчены измѣненія направленія вертикальной линіи въ 0″,001. Наблюденія показали, что такія измѣненія дѣйствительно происходятъ и что они нерѣдко превышаютъ возможныя погрѣшности угловыхъ измѣреній и потому ими нельзя пренебречь напр. при точнѣйшихъ астрономическихъ измѣреніяхъ.

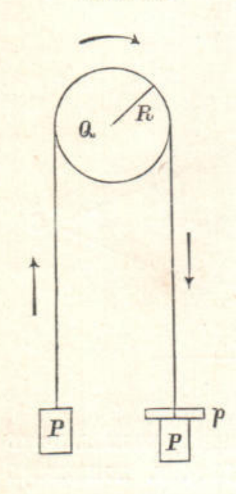
Рис. 193.



Наблюдалось, между прочимъ, періодическое суточное колебаніе вертикальнаго направленія и повидимому также вліяніе луны.

§ 2. Опредѣленіе g при помощи машины Атвуда и другихъ приборовъ, служащихъ для изслѣдованія свободнаго паденія тѣлъ. Устройство машины Атвуда и способъ пользоваться ею для провѣрки законовъ свободнаго паденія тѣлъ ($v = gt$ и $s = \frac{1}{2} gt^2$), а также основного закона движенія (ускоренія пропорціональны силамъ и обратно пропорціональны массамъ) мы считаемъ извѣстными изъ начальнаго курса физики. Здѣсь мы покажемъ, какъ вывести точное выраженіе того ускоренія g', съ которымъ происходитъ движеніе гирь въ машинѣ Атвуда. Въ элементарныхъ курсахъ выводится извѣстная формула

Рис. 194.



$$g' = \frac{p}{2P + p} g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ p вѣсъ добавочнаго груза, который прибавляется съ одной стороны, см. рис. 194, P вѣсъ каждой изъ двухъ гирь, непосредственно прикрѣпленныхъ къ шнурку, переброшенному черезъ колесо Q, радіусъ котораго обозначимъ черезъ R. Формула (1) весьма значительно отличается отъ формулы точной; не вводя въ нее совершенно необходимыхъ поправокъ, нельзя ни провѣрить законовъ движенія вообще и свободнаго паденія въ частности, ни опредѣлить величины ускоренія g, опредѣляя съ помощью хронографа или счетчика (стр. 313) время t, въ теченіе котораго гиря p опускается на путь s, и вычисляя g' по формулѣ $s = \frac{1}{2} g't^2$, которая даетъ

$$g' = \frac{2s}{t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Формула (1) неточна, ибо при ея выводѣ не приняты во вниманіе три обстоятельства:

1. Вращеніе колеса сопровождается треніемъ, которое, какъ мы увидимъ, можетъ быть разсматриваемо, какъ нѣкоторая сила f, препятствующая движенію, вызываемому слѣдовательно не вѣсомъ p, но нѣкоторою меньшею силою $p - f$.

2. Движущая сила $p - f$ приводитъ въ движеніе не только массу $2M + m$, гдѣ $M = P : g$ и $m = p : g$, но еще и массу μ шнурка, вѣсъ котораго обозначимъ черезъ $\pi = \mu g$;

3. Та же сила $p - f$ приводитъ далѣе въ ускоренное вращательное движеніе еще и колесо, вѣсъ котораго обозначимъ черезъ Q; пусть его моментъ инерціи относительно оси вращенія есть K. Еслибы колесо было сплошное, то мы имѣли бы $Kg = \frac{1}{2} QR^2$, см. (37) стр. 87; еслибы, наобо-

ротъ, можно было допустить, что вся масса колеса сосредоточена около его окружности, то было бы $Kg = QR^2$.

Истинное значеніе величины Kg будетъ нѣкоторое среднее, и мы можемъ положить

$$\left.\begin{aligned} Kg &= \alpha Q R^2 \\ \text{гдѣ } \frac{1}{2} &< \alpha < 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Чтобы вывести точное выраженіе для g' воспользуемся теоремою о живыхъ силахъ (стр. 97). Пусть, въ данный моментъ, v есть скорость гирь и шнурка; ω угловая скорость колеса; очевидно $\omega R = v$, такъ какъ точки окружности колеса должны обладать скоростью шнурка. Живая сила J всей движущейся системы равна, см. (1) стр. 89 и (3) стр. 90,

$$J = \frac{1}{2}(2M + m + \mu)v^2 + \frac{1}{2} K\omega^2;$$

равенство $\omega R = v$ даетъ

$$J = \frac{1}{2}\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right) v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Положимъ, что въ малое время Δt гири пройдутъ малый путь Δs, въ концѣ котораго ихъ скорость будетъ равна $v + \Delta v$, а живая сила

$$J + \Delta J = \frac{1}{2}\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right)(v + \Delta v)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Пренебрегая величиною $(\Delta v)^2$, т.-е. полагая $(v + \Delta v)^2 = v^2 + 2v\Delta v$, и вычитая (4) изъ (5), получаемъ

$$\Delta J = \left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right) v\Delta v = \left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right) vg'\Delta t \quad . \quad . \quad (6)$$

Приращеніе ΔJ должно равняться работѣ движущей силы, т.-е. величинѣ $(p - f)\Delta s = (p - f)v\Delta t$. Итакъ

$$\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right) vg'\Delta t = (p - f)v\Delta t.$$

Умноживъ обѣ стороны на g и сокративъ на $v\Delta t$, получаемъ

$$\left(2P + p + \pi + \frac{Kg}{R^2}\right) g' = (p - f)g,$$

откуда, если для Kg вставить его значеніе (3),

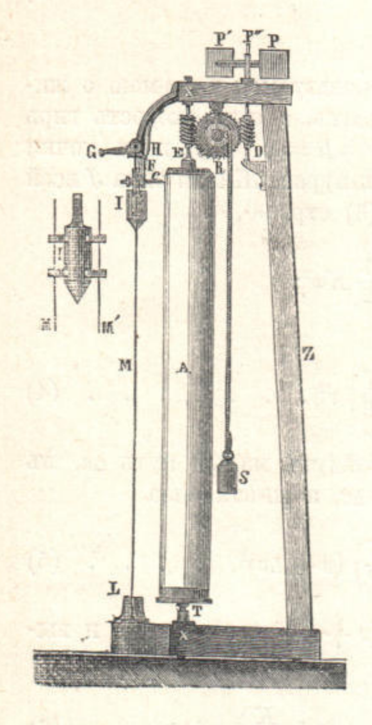
$$g' = \frac{p - f}{2P + p + \pi + \alpha Q}\, g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Здѣсь f сила тренія, π вѣсъ шнурка, Q вѣсъ колеса и α дробь между $^1/_2$ и 1.

Пренебрегая величинами f, π и αQ, получаемъ (1); всѣ три поправки мѣняютъ g', какъ видно, въ одномъ и томъ же направленіи.

Для опредѣленія f отыскиваютъ такой добавочный грузъ p_0, при которомъ вся система, получивъ толчокъ, двигалась бы равномѣрно, т.-е. проходила бы пути, пропорціональные времени; тогда ускореніе нуль и потому $f = p_0$. Величина π опредѣляется непосредственно взвѣшиваніемъ.

Рис. 195.



Поправку αQ мы вычислимъ, опредѣляя ускоренія g_1 и g_2 при двухъ различныхъ нагрузкахъ P_1, p_1 и P_2, p_2 и пользуясь формулой (2). Формула (7) даетъ

$$g_1 : g_2 = \frac{p_1 - f_1}{2P_1 + p_1 + \pi + \alpha Q} : \frac{p_2 - f_2}{2P_2 + p_2 + \pi + \alpha Q} \quad (8)$$

Изъ этой пропорціи, въ которой всѣ остальныя величины извѣстны, можно опредѣлить αQ. Когда f, π и αQ найдены, получаемъ по наблюденному g' искомое g на основаніи формулы (7)

$$g = \frac{2P + p + \pi + \alpha Q}{p - f} g' \quad . \; . \; . \quad (9)$$

Изъ другихъ приборовъ, назначенныхъ для изученія законовъ свободнаго паденія тѣлъ и могущихъ служить для опредѣленія численнаго значенія ускоренія g, упомянемъ слѣдующіе:

I. Наклонная плоскость. Когда мы достигли по возможности малаго тренія, заставляя напр. тяжелую повозку катиться на рельсахъ по наклонной плоскости, то ускореніе g' движенія по этой плоскости будетъ съ достаточною точностью опредѣляться формулою

$$g' = \frac{h}{l} g = g \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

гдѣ h высота, l длина наклонной плоскости, α уголъ, составляемый ею съ горизонтомъ. Опредѣливъ g' по формулѣ (2), найдемъ отсюда g.

II. Машина Morin'а. Она состоитъ изъ вертикальнаго цилиндра A (рис. 195), поверхность котораго обертывается листомъ бумаги; помощью гири S можно дать цилиндру вращательное движеніе, которое дѣлается равномѣрнымъ, когда гиря прошла примѣрно $\frac{2}{3}$ своего пути, такъ какъ крылья PP', быстро вращаясь въ воздухѣ, дѣйствуютъ какъ тормазы. Рядомъ съ цилиндромъ находится грузъ I, снабженный карандашомъ c; онъ можетъ свободно падать вдоль двухъ проволокъ M и M'. Когда вращеніе цилиндра A сдѣлалось равномѣрнымъ, заставляютъ падать гирю I, которая

карандашомъ вычерчиваетъ на бумагѣ нѣкоторую кривую. Остановивъ цилиндръ, снимаютъ бумагу и изслѣдуютъ эту кривую. Она имѣетъ видъ, показанный на рис. 196. Проведя черезъ начало O горизонтальную и вертикальную линіи, которыя примемъ за оси абсциссъ и ординатъ, мы видимъ, что абсциссы суть времена t, ибо онѣ пропорціональны угламъ, на которые повернулся цилиндръ отъ момента начала паденія тѣла I; ординаты же суть пройденныя пространства s. Легко провѣрить законъ пройденныхъ пространствъ: ординаты AB оказываются пропорціональными квадратамъ абсциссъ OA; уравненіе кривой имѣетъ видъ $s = pt^2$ и слѣд. она парабола. Если скорость вращенія цилиндра извѣстна, то не трудно опредѣлить значеніе абсциссы OA въ секундахъ и тогда $p = \frac{1}{2} g$ даетъ намъ g.

Рис. 196.

C A O t α s B s

Можно провѣрить и законъ скоростей. Проведемъ въ B касательную BC къ параболѣ и пусть $\angle BCA = \alpha$. Изъ началъ дифференціальнаго исчисленія извѣстно, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ds}{dt} = v.$$

Такимъ образомъ мы можемъ опредѣлить численное значеніе скорости v и убѣдиться въ томъ, что v пропорціонально абсциссамъ t. Опредѣливъ для одной и той же абсциссы OA величины $s = AB$ и $v = tg\alpha$, получаемъ численное значеніе ускоренія по формулѣ $g = \frac{v^2}{2s}$; единицей времени служитъ здѣсь время, изображенное на оси t длиною, равною той единицѣ длины, которою мы измѣряемъ ординаты s (ибо только при такомъ условіи $tg\alpha$ равенъ производной).

III. Изъ множества другихъ приборовъ, укажемъ еще на одинъ. Главнѣйшая его часть камертонъ, къ одной изъ вѣтвей котораго прикрѣпленъ горизонтальный пишущій штифтъ. Камертонъ приведенъ въ постоянное звучаніе (стр. 317); онъ расположенъ такъ, что колебанія штифта происходятъ въ горизонтальной плоскости. Штифтъ касается поверхности вертикальной доски (рис. 197), параллельной линіи размаховъ вѣтвей камертона. Эту доску заставляютъ свободно падать, причемъ штифтъ вычерчиваетъ на поверхности доски волнистую линію; каждая волна соотвѣтствуетъ одному и тому же времени T полнаго колебанія камертона. Проводя горизонтальныя линіи черезъ равное число зигзаговъ (на рисункѣ черезъ три), получаемъ пути s, пройденные падающею доскою въ равныя времена. Какъ обозначено на рисункѣ эти пространства пропорціональны квадратамъ временъ. Зная число колебаній камертона въ секунду, мы можемъ опредѣлить время t въ секундахъ, и по формулѣ $g = 2s : t^2$ найти g.

§ 3. Опредѣленіе g по способу Borda измѣренія времени качанія маятника. Время колебанія маятника, по своему устройству близкаго къ

маятнику математическому, опредѣляется по методу совпаденій (глава VIII § 5, стр. 321) путемъ сравненія съ маятникомъ секунднымъ. На рис. 198 показанъ приборъ въ томъ видѣ, въ которомъ онъ теперь обыкновенно употребляется. Сзади видны часы съ секунднымъ маятникомъ. Передъ нимъ виситъ шарикъ на тонкой нити, прикрѣпленной къ трехгранной призмѣ, которая качается на одномъ изъ своихъ реберъ. Время качанія этого маятника опредѣляется по методу совпаденій. Для того, чтобы удобнѣе было замѣчать эти совпаденія, прикрѣплена къ секундному маятнику бумажка, на

Рис. 197.

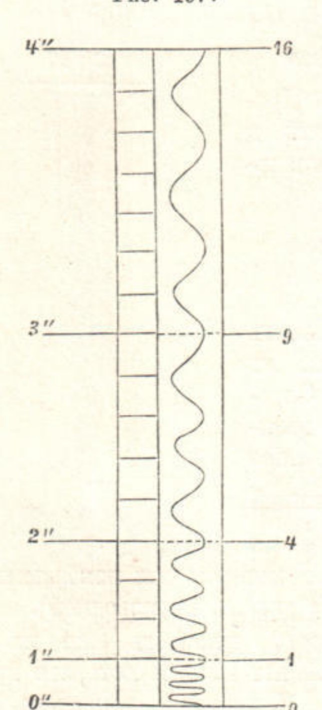
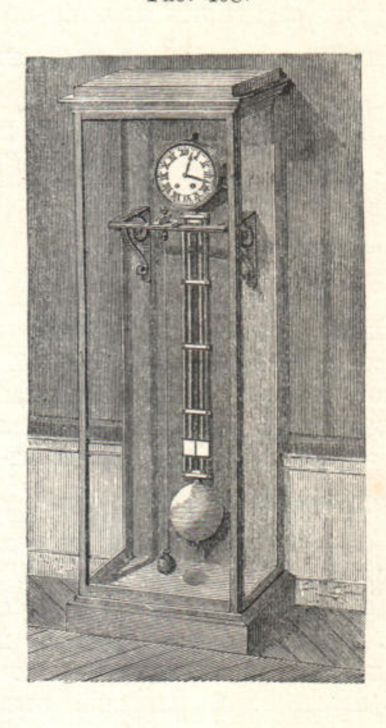


Рис. 198.



которой проведена вертикальная черта. Слабо увеличивающая труба устанавливается горизонтально такъ, чтобы ея продолженная ось пересѣкала нить и черту, когда оба маятника находятся въ равновѣсіи. Такимъ путемъ легко замѣчается моментъ, когда нить, покрывая черту, вмѣстѣ съ нею проходитъ черезъ середину поля зрѣнія трубы.

Для времени T_0 весьма малыхъ качаній маятника, состоящаго изъ тонкой нити и шарика, мы вывели формулу (8) стр. 320; вставляя ее въ (3) стр. 319, получаемъ для времени T качанія формулу

$$T = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

гдѣ l разстояніе отъ центра шара до оси вращенія, R радіусъ шара и α средній уголъ полуразмаха. Эта формула даетъ

$$g = \frac{\pi^2}{T^2}\left(l + \frac{2R^2}{5l}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (12)$$

Въ этомъ выраженіи всѣ величины извѣстны и потому оно можетъ служить для опредѣленія g. Длина $l - R$ шнурка опредѣляется при помощи катетометра.

Необходимо, однако, ввести въ формулу (12) еще нѣкоторыя поправки.

1. Мы опредѣлили ускореніе g, съ которымъ шарикъ прибора (рис. 198) сталъ бы свободно падать; это опредѣленіе сдѣлано нами въ воздухѣ, гдѣ шаръ претерпѣваетъ нѣкоторую потерю вѣса (стр. 295). Пусть истинный его вѣсъ (въ пустотѣ) P, потеря вѣса p; въ такомъ случаѣ ускореніе g вызывается силою $P - p$. Обозначивъ черезъ G ускореніе свободнаго паденія въ пустотѣ, имѣемъ очевидно $G : g = P : P - p$. Пусть D плотность шарика, d плотность воздуха во время наблюденія; тогда $P : p = D : d$, и слѣд.

Рис. 199.

$$G = g\frac{D}{D - d} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (13)$$

Здѣсь $d = 0{,}0013$; $D = 21$, когда шарикъ сдѣланъ изъ платины.

2. Сопротивленіе воздуха движенію маятника имѣетъ весьма малое вліяніе; оно мѣняетъ время колебанія менѣе, чѣмъ на $\frac{3}{10^9}$-ую его часть.

3. Воздухъ отчасти какъ бы увлекается шарикомъ, движется вмѣстѣ съ нимъ. Poisson показалъ, что для введенія соотвѣтствующей поправки слѣдуетъ величину d въ (13) помножить на нѣкоторый коэффиціентъ, равный $\frac{3}{2}$, такъ что

$$G = g\frac{1}{1 - \frac{3}{2}\frac{d}{D}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (14)$$

4. Вязкость воздуха (отдѣлъ четвертый, глава V, § 12) также имѣетъ нѣкоторое вліяніе; Stokes вывелъ величину поправки.

5. Когда маятникъ качается, то штативъ не остается въ полномъ покоѣ; отсюда слѣдуетъ, что не вся работа силы тяжести тратится на движеніе маятника, какъ мы предполагали при выводѣ формулы (41) стр. 219. Формулу для соотвѣтствующей поправки вывелъ Peirce.

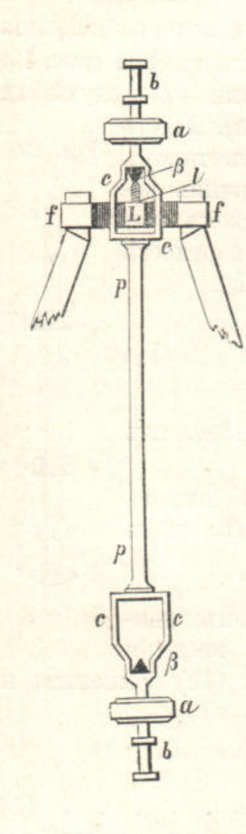
§ 4. Опредѣленіе g по способу оборотнаго маятника Kater'a. Мы видѣли (стр. 218), что разстояніе l центра качанія маятника отъ оси вращенія равно длинѣ математическаго маятника, имѣющаго одинаковое съ

нимъ время качанія T. Зная T и l, мы изъ формулы (31) стр. 216 находимъ

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Для опредѣленія l вспомнимъ теорему, выражающую сопряженность центра качанія и точки привѣса (стр. 218). Если перевернуть маятникъ и ось вращенія провести черезъ прежній центръ качанія, то время качанія не измѣнится. Отсюда слѣдуетъ, что если маятникъ, снабженный двумя осями вращенія, т.-е. призмами, въ двухъ положеніяхъ имѣетъ одинаковое время качанія T, то разстояніе осей, т.-е. обращенныхъ другъ къ другу реберъ призмъ и составитъ длину l формулы (15). На этомъ основанъ оборотный маятникъ Kater'a, простая форма котораго изображена на рис. 199. Стержень ab снабженъ двумя призмами d и f и двумя передвижными грузами V и W. Опредѣляютъ времена колебаній (по способу совпаденій) T_1 и T_2 при двухъ положеніяхъ маятника и затѣмъ приближаютъ одну изъ гирь къ той призмѣ, которая, служа своимъ ребромъ осью вращенія, дала большее время колебанія.

Рис. 200.



Когда мы достигнемъ того, что T_1 и T_2 имѣютъ одинаковое значеніе T, приведенное къ безконечно малымъ колебаніямъ, то остается измѣрить разстояніе l реберъ и вычислить g по формулѣ (15). Поправки будутъ тѣ же, которыя были указаны выше въ § 3.

На рис. 200 изображенъ оборотный маятникъ, въ которомъ призмы ββ помѣщены внутри рамокъ cc и cc; a и a суть передвижные грузы, одинъ полый, другой массивный. На рисункѣ видна часть штатива ff съ выступомъ L, снабженнымъ стальнымъ стержнемъ l, верхняя поверхность котораго плоско отшлифована.

Трудно или даже невозможно достичь полнаго равенства временъ T_1 и T_2. Когда они сдѣлались весьма близкими другъ другу, то g можно найти слѣдующимъ образомъ. Пусть K_0 моментъ инерціи маятника относительно оси, параллельной ребрамъ призмъ и проходящей черезъ его центръ тяжести; a_1 и a_2 разстоянія центра тяжести отъ реберъ призмъ; $l = a_1 + a_2$ разстояніе реберъ другъ отъ друга, M масса маятника.

По общей формулѣ (41) стр. 219 имѣемъ на основаніи теоремы стр. 86

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K_0 + Ma_1^2}{gMa_1}}; \quad T_2 = \pi \sqrt{\frac{K_0 + Ma_2^2}{gMa_2}},$$

т.-е.

$$T_1^2 gMa_1 = \pi^2 K_0 + \pi^2 Ma_1^2 \text{ и } T_2^2 gMa_2 = \pi^2 K_0 + \pi^2 Ma_2^2.$$

Вычтя одно равенство изъ другого и сократив на M, находимъ

$$\frac{\pi^2}{g}=\frac{a_1T_1^2-a_2T_2^2}{a_1^2-a_2^2},$$

что можно представить въ такомъ видѣ

$$\frac{\pi^2}{g}=\frac{T_1^2+T_2^2}{2(a_1+a_2)}+\frac{T_1^2-T_2^2}{2(a_1-a_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Въ первомъ членѣ $a_1+a_2=l$; во второмъ членѣ $T_1^2-T_2^2$ малая величина, а разность a_1-a_2 въ маятникѣ Kater'а величина не малая, такъ что достаточно знать ея приблизительную величину для вычисленія второго члена.

Для абсолютныхъ опредѣленій g нынѣ часто пользуются оборотнымъ маятникомъ Repsold'а, для относительныхъ — маятникомъ Sterneck'а.

§ 5. Длина секунднаго маятника. Длиною секунднаго маятника называется длина L математическаго маятника, время безконечно малыхъ колебаній котораго равно одной секундѣ. Изъ формулы (15) получаемъ, положивъ $T=1$ и $l=L$,

$$L=\frac{g}{\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Итакъ длина секунднаго маятника пропорціональна ускоренію g.

§ 6. Зависимость ускоренія g отъ высоты и широты мѣста. Ускореніе g принято выражать въ $C. G. S.$ единицахъ; слѣдовало бы по этому писать напр. для широты 45°

$$g=980{,}61\,\frac{\text{сантим.}}{(\text{сек.})^2};$$

но такъ какъ секунда всегда берется за единицу времени, то и принято писать $g=980{,}61$ см. Въ дальнѣйшемъ мы даже названія единицы длины (сантим.) прибавлять не будемъ.

Величина g мѣняется съ высотою и широтою мѣста. Пусть g и g_h относятся къ уровню моря и къ высотѣ h; если R радіусъ земли, то

$$\frac{g_h}{g}=\frac{R^2}{(R+h)^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}=\frac{1}{1+2\frac{h}{R}}=1-2\frac{h}{R},$$

если пренебрегать высшими степенями дроби $\frac{h}{R}$. Итакъ

$$g_h=g\left(1-\frac{2h}{R}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Если h выражено въ сантиметрахъ, имѣемъ

$$g_h=g(1-0{,}000000000314h) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Полагая во второмъ членѣ $g = 981$, получаемъ

$$g_h = g - 0{,}000003h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Поднятію на высоту $h = 100$ метр. $= 10{,}000$ см. соотвѣтствуетъ уменьшеніе g на $0{,}03$ см. $= 0{,}3$ мм. Здѣсь полагается, что поднятіе происходитъ въ свободномъ воздухѣ или на башнѣ; такъ на вершинѣ Эйфелевой башни въ Парижѣ ($h = 30{,}000$ см.) величина g почти на 1 мм. меньше, чѣмъ у ея основанія. Richarz и Krigar-Menzel опредѣлили разность значеній $g - g_h$ для $h = 226$ см. Они нашли $g - g_h = 0{,}000652 \; \frac{\text{см.}}{(\text{сек.})^2}$, между тѣмъ какъ по теоріи должно было получиться число $0{,}000697$.

Точные опыты Scheel'я и Diesselhorst'а показали, что вѣсъ 1 килограмма уменьшается на 0,295 мгр. при подъемѣ на 1 метръ (въ Шарлоттенбургѣ близъ Берлина). На поверхности плоскогорія, высота котораго h, имѣемъ

$$g_h = g\,(1 - 0{,}00000000196h) \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Ускореніе g мѣняется далѣе съ широтою мѣста по двумъ причинамъ: во-первыхъ центробѣжная сила, развивающаяся при вращеніи земли и противодѣйствующая силѣ тяжести, наибольшая на экваторѣ и нуль на полюсахъ; во-вторыхъ форма земли (геоидъ) близка къ сплюснутому эллипсоиду вращенія, вслѣдствіе чего также ускореніе g должно убывать отъ полюсовъ къ экватору. Принимая во вниманіе всѣ эти обстоятельства, получаемъ слѣдующую формулу для ускоренія g на высотѣ h надъ уровнемъ моря и на широтѣ φ

$$g = 980{,}61\,(1 - 0{,}00259\cos 2\varphi)\,(1 - 0{,}0000000314\,h). \quad . \quad . \quad (22)$$

Число

$$g = 980{,}61$$

относится къ $h = 0$ и $\varphi = 45^\circ$. Формула (22) даетъ

$$g = 980{,}61 - 2{,}539\cos 2\varphi - 0{,}000003h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Для длины L секунднаго маятника (17) даетъ

$$L = 99{,}357 - 0{,}2573\cos 2\varphi - 0{,}0000003h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Крайнія значенія для L и g въ сантиметрахъ при $h = 0$ суть:

Полюсъ . . .	$\varphi = 90^0$	$L = 99{,}610$	$g = 983{,}11$
Экваторъ . . .	$\varphi = 0^0$	$L = 99{,}103$	$g = 978{,}10.$

Для Россіи имѣемъ слѣдующія величины L и g, приведенныя къ уровню моря при помощи формулы (21):

	φ	L	g
Тифлисъ . .	$41^0 42'$	99,327	980,32
Одесса . . .	$46^0 29'$	99,369	980,74
Кіевъ . . .	$50^0 27'$	99,404	981,08
Варшава . .	$52^0 13'$	99,419	981,23
Москва . . .	$55^0 45'$	99,449	981,52
С.-Петербургъ.	$59^0 56'$	99,482	981,85
Архангельскъ .	$64^0 31'$	99,516	982,18.

Въ Парижѣ ($\varphi = 48^0 50'$) имѣемъ

$$L = 99{,}390; \quad g = 980{,}94.$$

Въ распредѣленіи величины силы тяжести по земной поверхности наблюдаются особаго рода аномаліи или неправильности. Defforges находитъ, что на островахъ g вообще превосходитъ среднее значеніе, соотвѣтствующее данной широтѣ; посреди материковъ g меньше этого средняго значенія. Замѣчательная аномалія наблюдается около Москвы.

R. v. Eötvös изслѣдовалъ распредѣленіе силы тяжести и форму поверхности S, нормальной къ ея направленію въ данномъ мѣстѣ, пользуясь приборами, чувствительность которыхъ была доведена до изумительно высокой степени. Эти приборы представляютъ однонитные крутильные вѣсы съ весьма большимъ временемъ качанія, доходящимъ до 20-ти минутъ. Качанія наблюдались въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ положеніяхъ качающагося горизонтальнаго стерженька и это, какъ показываетъ теорія, даетъ возможность вычислить величины главныхъ радіусовъ кривизны поверхности S. Другой приборъ, въ которомъ одинъ изъ грузовъ, находящихся на концахъ стерженька, расположенъ ниже другого (привѣшенъ къ стерженьку), даетъ возможность опредѣлить варіацію силы тяжести вдоль поверхности S; въ немъ измѣряется крученіе нити при различныхъ положеніяхъ вертикальной плоскости, проходящей черезъ ось стерженька; это крученіе мѣняется при вращеніи всего прибора около вертикальной оси.

Еслибы земля представляла однородный шаръ радіуса R, то величина g' внутри земли была бы прямо пропорціональна разстоянію r точки отъ центра земли, см. стр. 190, и мы имѣли бы $g' = \frac{r}{R} g$. Но на дѣлѣ (см. слѣдующую главу) внутренніе слои земли плотнѣе наружныхъ; вслѣдствіе этого g' ростетъ съ удаленіемъ отъ поверхности во внутрь земли. Полагая, что плотность d земли есть функція r вида $d = d_0 - \alpha r^2$, гдѣ d_0 плотность въ центрѣ земли и α численный коеффиціентъ, Roche вывелъ формулу

$$g' = 1{,}92 \frac{r}{R} \left(1 - \frac{12 r^2}{25 R^2}\right) g. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

По этой формулѣ g' растетъ, начиная отъ поверхности, до $r = \frac{5}{6} R$, гдѣ $g' = \frac{16}{15} g$ и уменьшается далѣе до нуля при $r = 0$. Наблюденія

Airy въ шахтѣ на глубинѣ 383 м. подтверждаютъ справедливость этой формулы.

Если допустить, что $d = d_0 - \alpha r$, то наибольшее $g' = 1{,}055g$ оказывается при $r = 0{,}814\ R$.

ЛИТЕРАТУРА.

§ 1. Горизонтальный маятникъ:
Perrot. C. R. 54 p. 728, 1862.
Zoellner. Ber. d. Kgl. saechs. Ges. d. Wiss. 1869.
Rood. Amer. J. of Sc. 9, 1875.
Chaplin. Trans. of the Seism. Soc. of Japan. 4.
Gray. Phil. Mag. Sept. 1881.
Rebeur-Paschwitz. Das Horizontalpendel, Halle 1882; Gerlands Beitraege zur Geophysik 2, 1895.
Hecker. Instr. 16, p. 2, 1896.
§ 2. *Atwood.* On the rectilinear motion and rotation of bodies. Cambridge, 1784.
Morin. Mémoires des savants étrangers, VI p. 641, 1838.
§ 3. *Borda.* Mémoire sur la mesure du pendule, 1792. (Mesure de la méridienne)
§ 4. *Kater.* Philos. Trans. 1818.
F. W. Bessel. Länge des einfachen Secundenpendels. Ostwald, Klassiker № 7.
П. Штернбергъ. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 3, вып. 1, стр. 32, 1890 г.
§ 6. *Richarz* u. *Krigar-Menzel.* Wied. Ann. 51 p. 559, 1894.
Scheel und *Diesselhorst.* Instr. 1896 p. 2.
Defforges. C. R. 117, p. 205.
R. v. Eötvös. W. A. 59 p. 354, 1896.
Къ литературѣ о маятникѣ вообще:
Н. Е. Жуковскій. Движеніе маятника съ треніемъ въ точкѣ привѣса. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 7, вып. 2, стр. 28, 1895.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

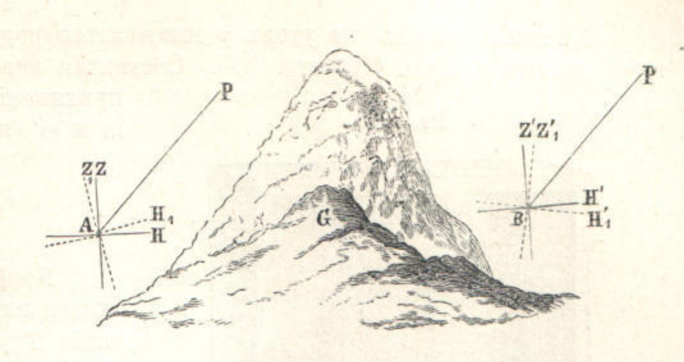
Измѣреніе средней плотности земли.

§ 1. Измѣренія Maskelyne'a (1775 г.). Для опредѣленія средней плотности D земли были произведены многія измѣренія по весьма различнымъ способамъ; изъ нихъ разсмотримъ прежде всего измѣренія Maskelyne'a произведенныя по способу, предложенному Bouguer.

Онъ основанъ на сравненіи притяженія земли съ притяженіемъ весьма большого тѣла, масса котораго извѣстна. Такимъ тѣломъ служила отдѣльно стоящая гора Shehallien въ Шотландіи, объемъ и средняя плотность которой были приблизительно извѣстны. Пусть m масса горы, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 D$ масса земли, гдѣ R ея радіусъ. Притяженіе горы отклоняетъ направленія Z и Z' (рис. 201) вертикальныхъ линій, которыя наблюдались бы при отсутствіи горы, такъ что онѣ принимаютъ направленія Z_1 и Z_1'. Точки A и B были выбраны съ двухъ сторонъ отъ горы и притомъ на одномъ меридіанѣ; въ этомъ случаѣ отклоненія вертикалей, а также горизонтальныхъ плоскостей

(H_1 и H_1' вмѣсто H и H') въ A и B имѣютъ противоположныя направленія. Пусть λ разность широтъ точекъ A и B, найденная геодезическими измѣреніями по ихъ разстоянію и пусть AP и BP направленіе оси міра. Еслибы не было горы, то разность высотъ полюса, т.-е. $\angle PBH' - \angle PAH$, равнялась бы λ. Опредѣляя однако въ A и B высоты полюса, мы измѣряемъ углы PBH_1' и PAH_1. Ихъ разность λ_1 оказывается больше λ и пусть $\lambda_1 = \lambda + \varepsilon$. Оказалось, что $\varepsilon = 11'',66$. Очевидно $\varepsilon = \angle H'BH_1' + \angle HAH_1$ т.-е. $\frac{1}{2}\varepsilon$ есть уголъ, на который гора отклоняетъ направленіе вертикали, если A и B находятся на одинаковомъ разстояніи r отъ горы. Если F притяженіе массы μ маятника землею, f притяженіе горою, то очевидно

Рис. 201.



$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{f}{F} = \frac{\frac{m\mu}{r^2}}{\frac{M\mu}{R^2}} = \frac{mR^2}{Mr^2} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R D r^2},$$

откуда

$$D = \frac{3m}{4\pi R r^2 \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Maskelyne нашелъ $D = 4{,}8$. James, повторившій эти наблюденія, нашелъ $D = 5{,}32$.

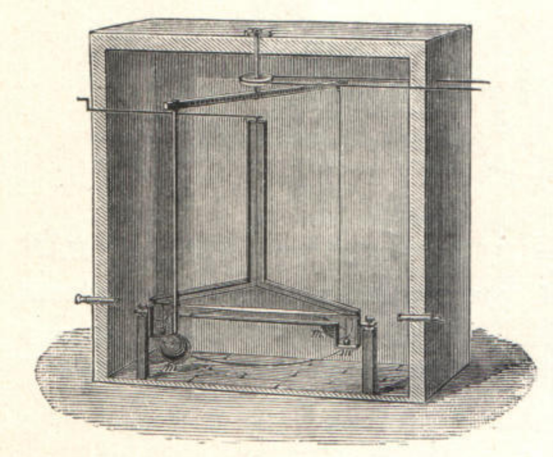
§ 2. Измѣренія Cavendish'a (1798 г.) были произведены при помощи однонитныхъ крутильныхъ вѣсовъ (стр. 303), изображенныхъ на рис. 202. Къ концамъ длиннаго и легкаго горизонтальнаго стержня были прикрѣплены два металлическихъ шарика m' и m', вѣсившіе каждый 730 гр. Положеніе равновѣсія отсчитывалось на горизонтальныхъ шкалахъ помощью двухъ трубъ, изображенныхъ на рисункѣ. Два большихъ свинцовыхъ шара (по 158 килогр. каждый) m и m могли быть приближены съ двухъ сторонъ къ шарикамъ m' и m', такъ что притяженія этихъ послѣднихъ свинцовыми шарами складывались и повертывали вѣсы на нѣкоторый весьма малый уголъ. Вращая горизонтальный стержень, поддерживающій свинцовые шары около средней оси прибора, какъ указано линіей, можно было приблизить эти шары къ шарикамъ m', m' съ противоположныхъ сторонъ и вызвать вращеніе вѣсовъ въ другую сторону. Зная длину $2l$ стержня вѣсовъ и значеніе δ одного дѣленія шкалъ, можно было, по числу n дѣленій, на которыя перемѣстилось положеніе равновѣсія шариковъ, опредѣлить уголъ φ, на

который повертываются вѣсы подъ вліяніемъ притяженія между двумя парами шаровъ. Очевидно

$$\varphi = \frac{n\delta}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Вращеніе вѣсовъ на уголъ φ вызывается парою силъ, моментъ которой равенъ $C\varphi$, см. (19) стр. 305. Обозначая черезъ F силу взаимнаго притяженія каждой пары шаровъ m и m', имѣемъ

Рис. 202.



$$2Fl = C\varphi = C\frac{n\delta}{l} \quad . \quad . \quad (3)$$

Коеффиціентъ C опредѣляется измѣреніемъ времени качанія T унифиляра; мы видѣли, см. (23) стр. 306, что

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{C}} \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ K моментъ инерціи стержня съ шарами m' относительно оси вращенія. Пренебрегая массою самого стержня, можемъ положить $K = 2\,m'l^2$ и тогда (4) даетъ

$$C = \frac{2m'l^2\pi^2}{T^2}.$$

Вставивъ это въ (3), получаемъ

$$F = \frac{\pi^2 n\delta m'}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Если m' выражено въ граммахъ и T въ секундахъ, то сила притяженія F по этой формулѣ получается въ динахъ.

Пусть далѣе ρ разстояніе центровъ шаровъ m и m', когда между ними обнаруживается притяженіе F; r радіусъ, d плотность шаровъ m; R радіусъ, D плотность, M масса земли; наконецъ P вѣсъ шарика m'. Мы имѣемъ

$$F = c\,\frac{mm'}{\rho^2};\;\; P = m'g = c\,\frac{Mm'}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ c тотъ же коеффиціентъ, который въ (1) стр. 177 обозначенъ былъ черезъ C. Формулы (6) даютъ, если вставить $m = \frac{4}{3}\pi r^3 d$ и $M = \frac{4}{3}\pi R^3 D$

$$\frac{F}{P} = \frac{F}{m'g} = \frac{mR^2}{M\rho^2} = \frac{r^3 d}{\rho^2 R D},$$

откуда

$$F = \frac{r^3 dgm'}{\rho^2 RD} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Приравнявъ (5) и (7), получаемъ

$$D = \frac{gT^2 r^3 d}{\pi^2 n \delta \rho^2 R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Cavendish производилъ свои измѣренія съ двумя различными нитями; для болѣе тонкой было $T = 840$ сек., для болѣе толстой $T = 420$ сек. Какъ среднее изъ 29-ти наблюденій онъ нашелъ

$$D = 5{,}48.$$

§ 3. Позднѣйшія измѣренія, произведенныя по способу Cavendish'a. Весьма многіе наблюдатели повторяли и повторяютъ въ настоящее время опредѣленіе величины D помощью крутильныхъ вѣсовъ. Reich (1837—1849 г.) первый повторилъ эти измѣренія по способу, болѣе точному, чѣмъ Cavendish. Онъ нашелъ

$$D = 5{,}58.$$

Baily (1842 г.) нашелъ $D = 5{,}67$.

Съ 1870—1878 г. произвели замѣчательныя измѣренія Cornu и Baille, принимая всевозможныя предосторожности и пользуясь новѣйшими и точнѣйшими методами измѣренія. Чтобы избѣжать сотрясеній, неминуемыхъ при перемѣщеніи тяжелыхъ шаровъ изъ одного положенія въ другое, они устанавливали четыре полыхъ чугунныхъ шара (діаметръ 12 см.), симметрично по два съ двухъ сторонъ отъ мѣдныхъ шариковъ бифиляря, вѣсившихъ каждый 109 гр. Попеременно одна на крестъ расположенная пара шаровъ наполнялась ртутью, которая перекачивалась изъ одной такой пары въ другую и обратно. Cornu и Baille нашли

$$D = 5{,}50.$$

Весьма точныя измѣренія произвелъ Boys (1893), пользуясь для привѣса изобрѣтенными имъ кварцевыми нитями. Притягивающіе свинцовые шары имѣли діаметръ всего въ $4\frac{1}{4}$ и $2\frac{1}{4}$ дюйма; діаметръ притягиваемыхъ золотыхъ шаровъ равнялся 0,2 и 0,25 дюйма. Опыты производились въ подвальномъ помѣщеніи лабораторіи (Clarendon) въ Оксфордѣ. Boys нашелъ $D = 5{,}527$.

§ 4. Другіе способы опредѣленія средней плотности D земли. Airy (1866) опредѣлилъ D, сравнивая ускореніе g на поверхности земли съ ускореніемъ g' внутри земли на глубинѣ h. Принимая радіусъ земли равнымъ $r + h$ и допуская, что она состоитъ изъ шара, радіусъ котораго r и плотность D и изъ слоя, толщина котораго h и плотность d, легко видѣть, что на поверхности земли

$$g = k\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 D}{(r+h)^2} + k\frac{\frac{4}{3}\pi[(r+h)^3 - r^3]d}{(r+h)^2},$$

гдѣ k множитель пропорціональности. Пренебрегая квадратомъ дроби $\frac{h}{r}$, получаемъ

$$g = \frac{4}{3}\pi k[(r-2h)D + 3hd].$$

Далѣе очевидно $g' = k\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 D}{r^2} = \frac{4}{3}\pi krD$.

Отсюда

$$D = \frac{d}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g}{g'}\right)\frac{r}{3h}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Опредѣленіе g и g' производилось по способу Borda, причемъ часы съ секунднымъ маятникомъ стояли на поверхности земли, а другіе часы, находившіеся подъ землею, были соединены электрически съ первыми, такъ что тѣ и другіе имѣли вполнѣ одинаковый ходъ. Для опредѣленія D необходимо знать среднюю плотность d поверхностнаго слоя и въ этомъ заключается недостатокъ метода. Airy принялъ $d = 2{,}5$; далѣе при его опытахъ $\frac{r}{h} = 16000$, а для $1 - \frac{g}{g'}$ Airy нашелъ $\frac{1}{19200}$. Эти числа даютъ

$$D = 6{,}57.$$

Позже Haughton ввелъ поправку въ вычисленія Airy и нашелъ $D = 5{,}48$.

Carlini (1824) и Mendenhall (1880) наблюдали качанія маятника на вершинѣ горъ (первый на Монтъ-Сени, второй на горѣ Фузіама около Токіо); Carlini нашелъ $D = 4{,}837$, Mendenhall $D = 5{,}77$.

Wilsing (1885—87) наблюдалъ боковое отклоненіе весьма чувствительнаго маятника, вызванное притягивающей массой и нашелъ сперва $D = 5{,}594$, а послѣ введенія различныхъ улучшеній въ устройствѣ прибора $D = 5{,}579 \pm 0{,}012$.

Jolly (1881) измѣрялъ притягательное дѣйствіе свинцовой массы (5775 кгр.) на тѣло, поставленное на чашку вѣсовъ. Онъ нашелъ $D = 5{,}692$.

Далѣе Koenig и Richarz измѣряли D такимъ способомъ: непосредственно надъ большою свинцовою массою находились чашки вѣсовъ; другія чашки, соединенныя съ первыми при помощи стержней (длина 226 см.), проходившихъ черезъ вертикальные каналы, пробуравленные въ свинцовой массѣ, находились какъ разъ подъ этой послѣдней. Тѣло клалось сперва напр. на лѣвую верхнюю чашку, а гири на правую нижнюю; потомъ тѣло на лѣвую нижнюю, а гири на правую верхнюю. Повторяя то же самое при отсутствіи свинцовой массы, чтобы исключить вліяніе измѣненія силы тяжести съ высотою, можно опредѣлить величину притяженія этой массы, а отсюда и среднюю плотность D земли.

Окончательные результаты публиковали (1896) Richarz и Krigar-Menzel. Они нашли для средней плотности D земли

$$D = 5{,}505 \pm 0{,}0009.$$

Для коэффиціента C въ формулѣ Нютона, см. (1) стр. 177, т.-е. для взаимнаго притяженія грамма и грамма, находящихся на разстояніи 1 см. другъ отъ друга, выраженнаго въ динахъ, они даютъ число

$$C = (6{,}685 \pm 0{,}011)\, 10^{-8}\,.$$

Свинцовая масса, которой они пользовались, имѣла вѣсъ свыше 100.000 кгр.

Poynting (1890) привѣшивалъ къ концамъ коромысла вѣсовъ шары, вѣсомъ каждый около 21,57 кгр. Поперемѣнно подъ одинъ и другой изъ этихъ шаровъ помѣщался шаръ, вѣсъ котораго равнялся 153,41 кгр. Наблюдалось измѣненіе положенія равновѣсія вѣсовъ вслѣдствіе притяженія между шарами. Poynting получилъ $D = 5{,}4934$.

Berget изучалъ притяженіе водяного слоя на поверхности озера, уровень котораго можно было мѣнять на 1 метръ. Онъ нашелъ $D = 5{,}41$.

Сравнивая результаты различныхъ изслѣдованій, мы видимъ, что они весьма значительно отличаются другъ отъ друга. Наиболѣе заслуживаютъ довѣрія слѣдующія числа:

	D
Cornu и Baille (1878)	5,50
Boys (1893)	5,527
Poynting (1890)	5,493
Richarz и Krigar-Menzel (1896)	5,505

Придавая этимъ числамъ одинаковый вѣсъ (стр. 246), получаемъ какъ среднее

$$D = 5{,}51,$$

т. е. меньше числа 5,55, которое обыкновенно прежде принималось.

Плотность поверхностнаго слоя земли, какъ извѣстно, въ среднемъ не болѣе 2,3; отсюда слѣдуетъ, что внутреннія части земли обладаютъ гораздо большею плотностью, чѣмъ поверхностныя. Roche далъ формулу для плотности D земли на разстояніи x отъ ея центра, а именно

$$d = 10{,}6\left(1 - 0{,}8\frac{x^2}{R^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ R радіусъ земли; эта формула была упомянута на стр. 333. Въ центрѣ земли она даетъ $d_0 = 10{,}6$; на ея поверхности $d = 2{,}1$.

Здѣсь будетъ мѣсто сказать нѣсколько словъ о замѣчательныхъ приборахъ Eötvös'а, хотя, повидимому, и не предназначенныхъ для опредѣленія величины D. Одинъ изъ этихъ приборовъ состоитъ изъ однонитныхъ крутильныхъ вѣсовъ, помѣщенныхъ между двумя свинцовыми столбами. Время качанія стерженька оказалось равнымъ 641 сек., когда его положеніе равновѣсія совпадало съ прямой, соединяющей столбы и равнымъ 860 сек., когда положеніе равновѣсія было перпендикулярно къ этой прямой. Это дало для

коеффиціента C въ формулѣ всемірнаго тяготѣнія, т.-е. для силы притяженія грамма и грамма, находящихся на разстояніи 1 см. другъ отъ друга.

$$C = 6{,}65 \,.\, 10^{-8} \,.$$

Другой приборъ (гравитаціонный компенсаторъ) обнаруживалъ притяженіе массы въ 300 кгр., находившейся на разстояніи 5 метровъ отъ прибора. Въ третьемъ приборѣ (гравитаціонный мультипликаторъ) Eötvös перемѣщалъ притягивающія массы то въ одну, то въ другую сторону отъ стерженька; такимъ образомъ ему удавалось такъ сказать раскачать стерженекъ и получить отклоненія, въ 150 разъ превышающія тѣ, которыя обнаруживаются вслѣдствіе непосредственнаго притяженія тѣхъ же массъ.

ЛИТЕРАТУРА.

Maskelyne and Hutton. Phil. Trans. 1775 и 1778.

Cavendish. Phil. Trans. T. 83 p. 388, 1798; Gilb. Ann. 2.

Reich. Versuche über d. mittlere Dichtigkeit der Erde. Freiberg 1838; Abhandl. d. saechs. Ges. d. Wiss. I, 1852.

Baily. Mem. of the R. Astron. Soc. Lond. 14 (1843); Annales chim. et phys. (3) 5, p. 338, 1842.

Cornu et Baille. C. R. 86 p. 571, 699, 1001 (1878).

Airy. Phil. Trans. 1856.

Wilsing. Berl. Sitz-Ber. 1885 p. 13; Publ. d. Astrophys. Observ. Potsd. № 22. VI, 2 p. 35. 1887; № 23, VI, p. 133, 1889.

Jolly. Abh. d. bayr. Acad. 2 Kl. 13 и 14; Wied. Ann. 14 p. 331, 1881.

Koenig und Richarz. Wied. Ann. 24 p. 664, 1885; Berl. Ber. 1884 p. 1203.

Richarz und Krigar-Menzel. Berl. Ber. 1896 p. 1305.

Berget. C. R. 116 p. 1501, 1893.

Poynting. Phil. Trans. London. 182 (A), p. 565, 1891; отдѣльная книга: The mean density of the earth. London, 1894.

Boys. Nature (англ.) 50 p. 330, 366, 417; Proc. R. Soc. 46 p. 296; 56 p. 131; Phil. Trans. London. 186 p. 1, 1895.

Guillaume. Séances Soc. fr. d. Phys. 1893 p. 238.

R. v. Eötvös. W. A. 59 p. 385, 1896.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

УЧЕНІЕ О ГАЗАХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Плотность газовъ.

§ 1. Физика частичныхъ силъ. Основныя свойства газовъ. Идеальный газъ. Въ настоящее время вошло въ обычай выдѣлять ученія о газахъ, жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ въ особый отдѣлъ физики подъ названіемъ «Физики частичныхъ силъ». Однако это названіе не вполнѣ соотвѣтствуетъ обычному содержанію отдѣла, такъ какъ при весьма скудныхъ нашихъ свѣдѣніяхъ о роли междучастичныхъ силъ въ различныхъ физическихъ явленіяхъ, мы во многихъ случаяхъ не можемъ сказать, играютъ ли эти силы какую-либо роль въ данномъ явленіи. Подозрѣвать же участіе этихъ силъ мы можемъ въ очень многихъ явленіяхъ, обыкновенно разсматриваемыхъ въ ученіяхъ о теплотѣ, свѣтѣ, магнетизмѣ и даже въ ученіи объ электричествѣ. Въ виду такой неопредѣленности названія «Физика частичныхъ силъ», мы его и не вводимъ вовсе, но ограничиваемся выдѣленіемъ трехъ особыхъ отдѣловъ, подъ названіемъ ученій о газахъ, жидкостяхъ и твердыхъ тѣлахъ.

Слѣдуя примѣру многихъ новѣйшихъ курсовъ, мы начинаемъ съ тѣлъ газообразныхъ, какъ наиболѣе простыхъ во всѣхъ отношеніяхъ. Внутреннее строеніе газовъ, согласно современнымъ воззрѣніямъ, сравнительно очень простое; то же самое относится и къ законамъ, управляющимъ тѣми явленіями, которыя происходятъ въ газахъ. Характерныя свойства газовъ суть:

1. Газы противоставляютъ весьма малое сопротивленіе всякой внѣшней причинѣ, стремящейся измѣнить ихъ форму.

2. Газы противоставляютъ сравнительно небольшое сопротивленіе всякой внѣшней причинѣ, стремящейся уменьшить ихъ объемъ.

3. Газы, не подверженные внѣшнимъ вліяніямъ (напр. силѣ тяжести), равномѣрно наполняютъ весь предоставленный имъ объемъ, производя на

поверхность тѣла, ограничивающаго этотъ объемъ, опредѣленное давленіе, которое мы условились измѣрять въ килограммахъ на квадратный метръ поверхности, или въ миллиметрахъ ртутнаго столба (стр. 32) и называть упругостью газа.

4. Другъ къ другу всѣ газы относятся почти индифферентно, если конечно исключить случаи химическихъ взаимодѣйствій; это значитъ, что два газа, помѣщенные въ произвольныхъ относительныхъ количествахъ въ одномъ сосудѣ, смѣшиваются вполнѣ, какъ бы проникая другъ друга и образуя нѣчто однородное во всѣхъ частяхъ.

Рядомъ съ этими, такъ сказать въ глаза бросающимися признаками, газы обладаютъ еще другими свойствами, а именно:

1. Газы приблизительно слѣдуютъ закону Бойля-Маріотта: упругость даннаго количества газа при неизмѣнной температурѣ мѣняется обратно пропорціонально его объему.

2. Газы приблизительно слѣдуютъ закону Гей-Люссака, по которому объемъ v даннаго количества газа при температурѣ t^0, и объемъ v_0 при 0^0 связаны равенствомъ $v = v_0(1 + \alpha t)$, гдѣ для всѣхъ газовъ $\alpha = 0{,}00366$.

3. Газы приблизительно слѣдуютъ закону Авогадро: въ одинаковыхъ объемахъ различныхъ газовъ, находящихся при одинаковой температурѣ и одинаковомъ давленіи, заключается одинаковое число молекулъ.

4. Газы приблизительно удовлетворяютъ условію отсутствія внутренней работы (стр. 95—96) при измѣненіи объема, или, что то же самое, сцѣпленіе между частицами въ нихъ весьма мало.

Мы оставляемъ въ сторонѣ вопросъ о томъ, насколько эти четыре свойства самостоятельны или представляютъ одно — слѣдствіе другихъ.

Реально существующіе газы не удовлетворяютъ ни одному изъ послѣднихъ перечисленныхъ четырехъ свойствъ. Замѣчаются «отступленія» отъ этихъ законовъ и притомъ оказывается, что эти отступленія тѣмъ больше, чѣмъ ближе газы къ состоянію ожиженія. Для сгущеннаго углекислаго газа эти отступленія громадны; для разрѣженнаго водорода они въ высшей степени ничтожны. Идя въ этомъ направленіи мысленно еще немного дальше, мы получаемъ представленіе о фиктивномъ, т.-е. въ природѣ повидимому не существующемъ веществѣ, съ абсолютною точностью удовлетворяющемъ законамъ Бойля-Маріотта, Гей-Люссака и Авогадро, между частицами котораго не существуетъ никакого сцѣпленія, такъ что внутренняя работа равна нулю. Такое вещество называется «идеальнымъ или совершеннымъ газомъ».

§ 2. Плотность газовъ (и перегрѣтыхъ паровъ) и молекулярный вѣсъ. Мы видѣли (стр. 35), что слѣдуетъ отличать двѣ плотности газовъ: плотность D относительно воды, въ широчайшихъ предѣлахъ мѣняющуюся при сгущеніи и разрѣженіи газа, и плотность δ относительно воздуха, находящагося при одинаковыхъ съ газомъ давленіи и температурѣ. Вторая величина почти постоянна для даннаго газа; она мѣняется лишь настолько, насколько воздухъ и разсматриваемый газъ неодинаково отступаютъ отъ законовъ Бойля-Маріотта и Гей-Люссака; эти законы для

краткости будемъ обозначать буквами Б.-М. и Г.-Л. Иногда, говоря о плотности, разсматриваютъ способы опредѣленія этой величины для газовъ и для паровъ отдѣльно другъ отъ друга, относя послѣдніе къ ученію о теплотѣ. Изъ начальнаго курса физики, однако, извѣстно, что пары всякой жидкости при температурѣ, значительно превышающей температуру кипѣнія, соотвѣтствующую наличному давленію, т.-е. пары, далекіе отъ насыщенія, ничѣмъ не отличаются отъ газовъ и что, наоборотъ, всѣ «газы» въ обыденномъ смыслѣ слова (*H*, *O*, *N*, *Cl*, *CO* и т. д.) могутъ быть разсматриваемы, какъ пары нѣкоторыхъ жидкостей, далекіе отъ насыщенія. Поэтому, говоря о плотности газовъ, мы разсмотримъ заодно и способы опредѣленія плотности паровъ такихъ веществъ, которыя при обыкновенной комнатной температурѣ находятся въ жидкомъ состояніи. Во всякомъ случаѣ полагаемъ, что пары находятся далеко отъ насыщенія.

Изъ закона Авогадро вытекаетъ, какъ очевидное слѣдствіе, что вѣсъ одной молекулы различныхъ газовъ пропорціоналенъ плотности δ этого газа. При измѣреніи молекулярнаго вѣса μ принято, однако, за единицу вѣса считать вѣсъ одного атома водорода; такъ какъ молекула водорода состоитъ изъ двухъ атомовъ, то для него $\mu = 2$. Кислородъ въ 15,88 разъ тяжелѣе водорода, а потому для него $\mu = 31{,}76$. Вообще для произвольнаго газа, обладающаго плотностью δ относительно воздуха и слѣд. плотностью $14{,}44\delta$ относительно водорода, молекулярный вѣсъ μ равенъ

$$\mu = 28{,}88\,\delta \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

Переходимъ къ обзору способовъ опредѣленія плотности газа или пара.

§ 3. Способъ Regnault опредѣленія δ и D. Идея этого способа заключается въ слѣдующемъ: стеклянный шаръ, емкость котораго около 10 литровъ, наполняется сухимъ газомъ при 0° и давленіи H; опредѣляется его вѣсъ P и затѣмъ при 0° газъ выкачивается до весьма малаго давленія h; пусть теперь вѣсъ шара p. Тогда вѣсъ Π газа, наполняющаго при 0° и 760 мм. объемъ v шара

$$\Pi = (P - p)\frac{760}{H - h} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

и отсюда плотность D

$$D = \frac{(P - p)760}{v(H - h)} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Если для сухого воздуха тѣ-же наблюденія дали числа P', p', H' и h', то для него

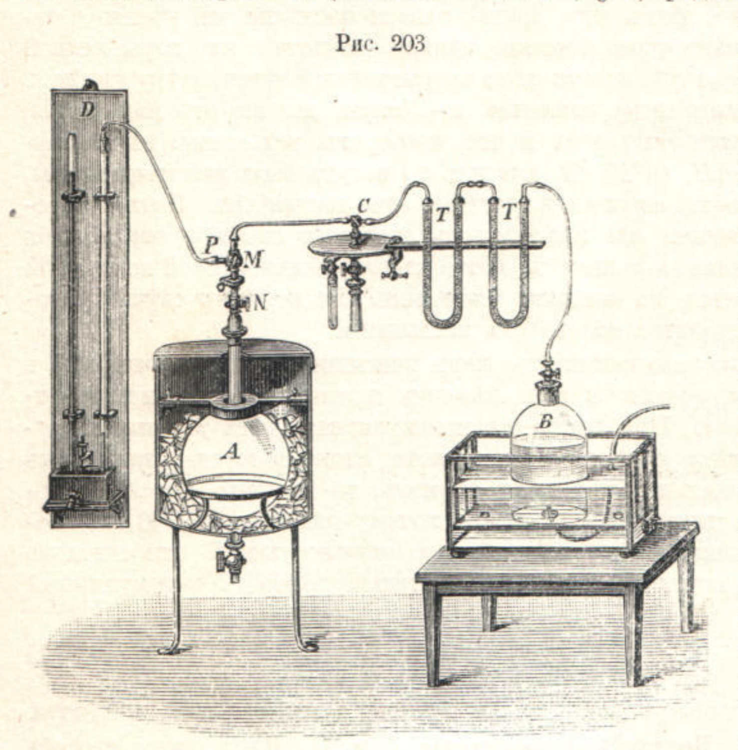
$$D' = \frac{(P' - p')760}{v(H' - h')} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

Наконецъ плотность δ испытуемаго газа

$$\delta = \frac{D}{D'} = \frac{P - p}{P' - p'} \cdot \frac{H' - h'}{H - h} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Regnault помѣстилъ шаръ A (рис. 203) въ тающій ледъ и соединилъ его съ манометромъ D (см. ниже глава III, § 7; рядомъ на той же доскѣ находится барометръ), съ насосомъ C, высушивающими трубками T и резервуаромъ B, въ которомъ накоплялся испытуемый газъ. При второмъ измѣреніи (давленіе h) ртуть въ обѣихъ трубкахъ D находилась на почти одинаковой высотѣ. При взвѣшиваніи шара приходится вводить поправку на потерю вѣса въ воздухѣ (стр. 295), мѣняющуюся съ измѣненіемъ давленія, температуры и влажности воздуха. Чтобы избѣжать необходимости вводить эту поправку,

Рис. 203



весьма важную ввиду малости опредѣляемаго вѣса $P-p$, Regnault уравновѣшивалъ шаръ A другимъ шаромъ B, внѣшній объемъ котораго съ точностью равнялся внѣшнему объему шара A. Эти шары подвѣшивались подъ чашками вѣсовъ (рис. 204) въ особыхъ шкапикахъ, для избѣжанія вліянія на нихъ потоковъ воздуха. Разъ установленное равновѣсіе уже не нарушается, какъ бы ни мѣнялось состояніе воздуха, ибо потеря вѣса шаровъ остается одинаковою, и потому упомянутой выше поправки совсѣмъ не приходилось вводить.

Рис. 204.

Для опредѣленія плотности D' воздуха относительно воды по формулѣ (4) необходимо знать объемъ v шара при 0°. Regnault поступилъ слѣд. образомъ. Сперва онъ взвѣсилъ **открытый** шаръ A, неуравновѣшенный

шаромъ B. Полученный вѣсъ P состоялъ изъ вѣса P_1 самого шара, вѣса Π_1 содержащагося въ немъ воздуха, минусъ потеря вѣса ω всей системы въ воздухѣ; и такъ

$$P = P_1 + \Pi_1 - \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Затѣмъ шаръ наполнялся чистой водой при 0^0 и опредѣлялся его вѣсъ

$$Q = P_1 + E_0 - \omega' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ E_0 вѣсъ воды и ω' потеря вѣса въ воздухѣ. Величины ω и ω' весьма мало отличаются другъ отъ друга: ихъ разность $\omega' - \omega = \omega_0$ можетъ быть опредѣлена съ достаточною точностью. Вычитая (6) изъ (7) имѣемъ

$$Q - P + \omega_0 = E_0 - \Pi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Предыдущія измѣренія дали вѣсъ Π' сухого воздуха, наполняющаго шаръ при 0^0 и 760 мм. давленія; аналогично (2) имѣемъ для воздуха

$$\Pi' = (P' - p')\frac{760}{H' - h'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Если первое взвѣшиваніе (6) было произведено при t^0, давленіи H и влажности h, то

$$\Pi_1 = \Pi' \frac{\left(H - \frac{3}{8}h\right)(1 + kt)}{(1 - \alpha t)760} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ k и α коеффиціенты расширенія стекла и воздуха, $\frac{3}{8}$ есть плотность водяного пара (см. стр. 297). Вѣсъ воды E_0 равенъ объему v, помноженному на плотность 0,999881 воды при 0^0; (8) даетъ

$$0{,}999881v = Q - P + \omega_0 + \Pi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Зная v, находимъ плотность D' воздуха по формулѣ (4).

Опыты Regnault дали для вѣса e_0 литра воздуха въ Парижѣ $e_0 = 1{,}293187$ гр. Поправки, введенныя Д. И. Менделѣевымъ въ вычисленія Regnault дали число $e_0 = 1{,}29347 \pm 0{,}00028$ гр. Вѣсъ e_0 мѣняется съ измѣненіемъ силы тяжести; онъ пропорціоналенъ ускоренію g.

Послѣднее число для e_0 можно написать въ видѣ $e_0 = 0{,}131852g$ гр. Позднѣйшія изслѣдованія Leduc'a (1892) и Rayleigh'a привели къ числамъ весьма мало отличающимся отъ чиселъ Regnault. Критическій разборъ всѣхъ работъ привелъ Д. И. Менделѣева къ окончательному результату, что вѣсъ литра сухого воздуха при 0^0 и 760 мм. равенъ

$$e_0 = 0{,}131844g \text{ гр.} \pm 0{,}00010 \text{ гр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

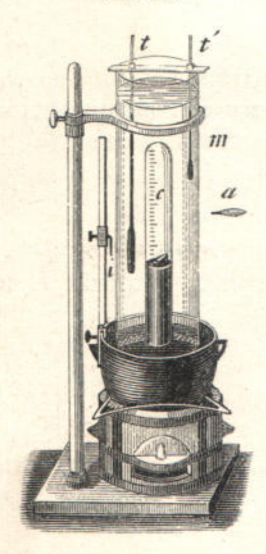
Зависимость g отъ высоты и широты мѣста указана на стр. 331.

Для Петербурга Д. И. Менделѣевъ даетъ число

$$c_0 = 1{,}29455 \text{ гр.} \pm 0{,}00010 \text{ гр.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

§ 4. Способъ Гей-Люссака и Hofmann'a опредѣленія плотности паровъ. Въ чугунный котелокъ, содержащій ртуть, погружены тщательно прокалибрированная трубка c (рис. 205) и стеклянный цилиндръ m, наполненный водою. Котелокъ поставленъ на небольшую печь; температура воды опредѣляется термометрами t и t'. Въ пространство c надъ ртутью вводится стеклянный запаянный пузырекъ a, содержащій извѣстное вѣсовое количество P жидкости. При нагрѣваніи прибора пузырекъ лопается и жидкость испаряется. Пусть V емкость при 0° той части трубки, которая занята паромъ; t его температура и H его упругость, равная барометрическому давленію, сложенному съ давленіемъ водяного столба, минусъ давленіе ртутнаго столба, находящагося въ трубкѣ c. Для плотности D пара имѣемъ при условіяхъ опыта

Рис. 205.



$$D = \frac{P}{V(1+kt)},$$

гдѣ k коффиціентъ расширенія стекла; для плотности δ получаемъ

$$\delta = \frac{P}{V(1+kt)} : \frac{c_0 H}{(1+\alpha t)760} = \frac{P(1+\alpha t)760}{V(1+kt)c_0 H} \quad . \quad . \quad (14)$$

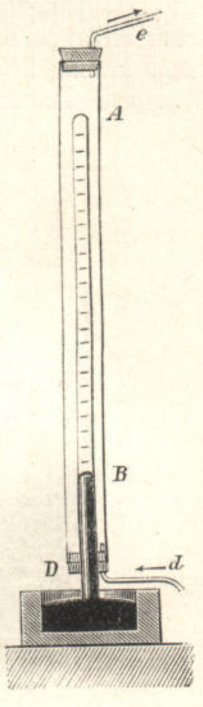
c_0 дано въ (12) и (13); V должно быть выражено въ литрахъ, P и c_0 въ граммахъ.

Недостатки этого метода, въ особенности неопредѣленность температуры воды, устранилъ Hofmann, приборъ котораго изображенъ на рис. 206. Трубка, содержащая пары, окружена болѣе широкою трубкою ABD, черезъ которую пропускаются пары какой-либо кипящей жидкости, выбираемой соотвѣтственно температурѣ, до которой желаютъ нагрѣть изслѣдуемый паръ. Когда эта температура высока, то слѣдуетъ вводить поправку на упругость паровъ ртути, которая при 100° равна 0,28 мм., при 120° — 0,77 мм., при 140° — 1,9 мм. и при 160° — 4,3 мм.

§ 5. Способъ Dumas основанъ на опредѣленіи вѣса извѣстнаго объема пара. Въ стеклянный шаръ B (рис. 207), снабженный вытянутой трубкой, и вѣсъ котораго p, помѣщаютъ нѣкоторое количество жидкости, плотность δ паровъ которой желаютъ опредѣлить. Шаръ продолжительное время удерживаютъ при температурѣ, значительно превышающей температуру кипѣнія жидкости при обыкновенномъ атмосферномъ давленіи; для этого во многихъ случаяхъ достаточно опустить шаръ въ сосудъ съ водою (см. рис. 207), которую доводятъ до кипѣнія. Тогда жидкость, налитая въ шаръ, испаряется и струя пара выходитъ изъ отверстія. Когда выдѣленіе этого пара прекратится, запаиваютъ кончикъ вытянутой трубки и

опредѣляють для этого момента барометрическое давленіе H', равное упругости пара, и температуру T пара помощью обыкновеннаго или вѣсового (на рис. 207, t; см. Часть Третья) термометра. Затѣмъ высушиваютъ шаръ снаружи и опредѣляютъ его вѣсъ p', который отличается отъ предварительно опредѣленнаго вѣса p. Далѣе опускаютъ трубку шарика въ воду и отламываютъ ея кончикъ; тогда вода наполняетъ весь шаръ, если только пары вполнѣ выгнали содержавшійся въ немъ воздухъ. Остается опредѣлить вѣсъ P шара, наполненнаго водою. Пусть t и H температура и давленіе воздуха при опредѣленіи вѣса p открытаго шара.

Рис. 206.



Объемъ шара можно принять равнымъ $P-p$; слѣд. вѣсъ пара $D(P-p)$; вѣсъ того же объема воздуха при первомъ взвѣшиваніи (t^0, H мм.) равенъ $D'(P-p)$.

Разность вѣса пара и вѣса воздуха равна $p'-p$; итакъ

$$(D-D')(P-p)=p'-p,$$

откуда

$$D=\frac{p'-p}{P-p}+D'.$$

D' есть плотность воздуха при t^0 и H мм.; искомая же величина $\delta=\frac{D}{D_1'}$, гдѣ D_1' плотность воздуха при тѣхъ условіяхъ, при которыхъ находился паръ въ моментъ, когда мы запаяли кончикъ трубки. Имѣемъ слѣд.

$$D_1'=D'\frac{H'(1+\alpha t)}{H(1+\alpha T)},$$

гдѣ α коеффиціентъ расширенія воздуха. Искомая плотность пара относительно воздуха окончательно получается равною:

$$\delta=\frac{D}{D_1'}=\left(\frac{p'-p}{P-p}\,\frac{1}{D'}+1\right)\frac{H(1+\alpha T)}{H'(1+\alpha t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

При опредѣленіи D' можно принять во вниманіе и упругость h водяныхъ паровъ, т.-е. воспользоваться общей формулой

$$D'=D_0\frac{H-\frac{3}{8}h}{760(1+\alpha t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ D_0 численно равно вѣсу куб. сант. сухого воздуха при 0° и 760 мм., т. е. равно 0,001 e_0, см. (12) и (13); приблизительно $D_0=0{,}0012946$ гр.

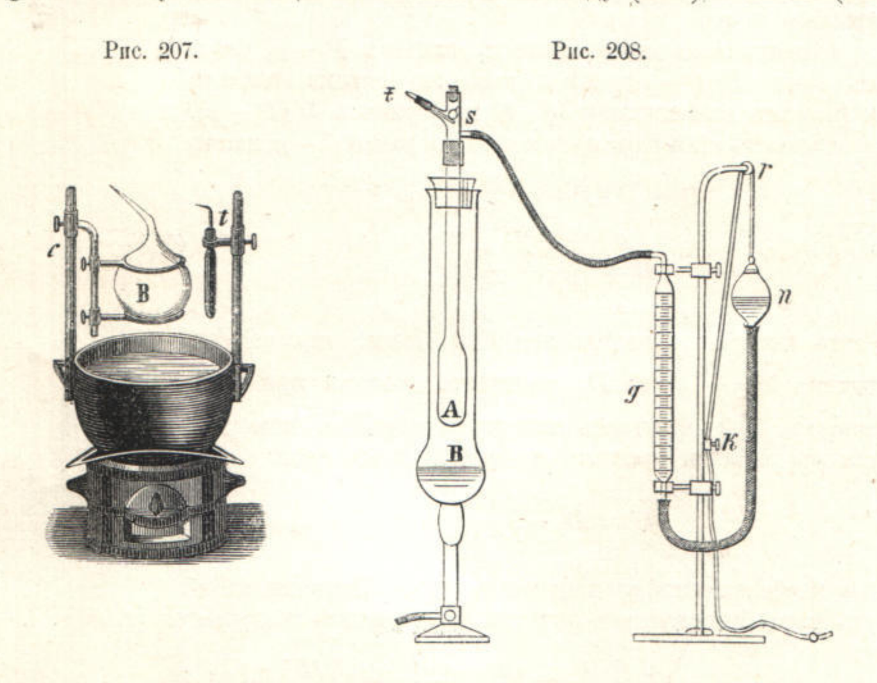
При выводѣ (14) мы пренебрегали измѣненіемъ объема шара при нагрѣваніи отъ t до T^0 и приняли плотность воды, наполнявшей шаръ, равной единицѣ. Не трудно ввести соотвѣтствующія поправки. Если при наполненіи шара водою въ немъ обнаружится пузырекъ воздуха, то приходится вводить еще новую поправку, величину которой легко опредѣлить.

Pawlewski предложилъ закрывать отверстіе вытянутой трубки колпачкомъ, который просто снимается при наполненіи шара водою.

Deville и Troost приспособили приборъ Dumas для случая, когда требуются болѣе высокія температуры. Стеклянный шаръ замѣненъ фарфоровымъ, помѣщаемымъ въ парахъ кипящихъ *Hg*, *S*, *Cd* или *Zn*.

§ 6. Способъ вытѣсненія (способъ Victor Mayer'а). Идея этого способа принадлежитъ Dulong'у. Главную часть прибора представляетъ длинный, внизу расширенный сосудъ *A* (рис. 208), помѣщаемый въ парахъ какой-либо кипящей жидкости, которую выбираютъ соотвѣтственно температурѣ испаренія испытуемаго вещества. Можно взять воду (100°), ксилолъ (140°),

Рис. 207. Рис. 208.



анилинъ (185°), дифениламинъ (310°) и т. д. Температуру кипѣнія этой жидкости, налитой въ *B*, знать не нужно. Верхняя часть сосуда *A* соединена помощью тонкой трубки съ калибрированной трубкой *g*, въ которой находится вода; она соединена съ сосудомъ *n*, который удобно поднимается и опускается, такъ что уровни воды въ *g* и въ *n* можно удерживать на одной высотѣ. Въ верхней части трубки *A* находится отверстіе, закрытое пробкою и кромѣ того иногда особое приспособленіе, чтобы въ данный моментъ заставить упасть на дно этого сосуда маленькій шарикъ, наполненный вѣсовымъ количествомъ *m* испытуемаго вещества. Шарикъ опирается на палочку *t*, которую снаружи можно вытянуть настолько, что шарикъ упадетъ на дно, покрытое азбестомъ, чтобы самый сосудъ *A* не былъ поврежденъ при паденіи шарика. Сперва кипятятъ жидкость въ *B* такъ долго, пока выдѣленіе воздуха изъ сосуда *A* не прекратится, т.-е. уровень воды въ *g* не перестанетъ мѣняться. Тогда вводятъ вѣсовое количество *m* испытуемаго вещества въ сосудъ *A*.

заставляя падать шарикъ, или открывая на мгновенье пробку. Вещество быстро испаряется и вытѣсняетъ нѣкоторое количество воздуха, которое переходитъ въ g; опуская сосудъ n, удерживаютъ уровень воды въ g и n опять къ одинаковой высотѣ. Пусть v объемъ воздуха, появившагося въ g, t комнатная температура и p давленіе воздуха въ g, равное барометрическому давленію минусъ давленіе паровъ воды, насыщающихъ воздухъ въ g. Воздухъ, перейдя въ g, принимаетъ температуры t^0. Допуская, что пары, образовавшіеся въ A, настолько перегрѣты, т.-е. настолько находятся выше температуры насыщенія, что къ нимъ можно приложить законы Б.-М. и Г.-Л., мы заключаемъ, что эти пары при t^0 и p мм. занимали бы какъ разъ объемъ v. Отсюда ихъ плотность δ равна

$$\delta = \frac{m}{v} : \frac{0{,}001295p}{760(1+\alpha t)} = \frac{m(1+\alpha t)760}{0{,}001295pv}.$$

Такъ какъ воздухъ насыщенъ парами воды, то принимаютъ $\alpha = 0{,}004$. Окончательно

$$\delta = 587800 \frac{m}{pv}(1 + 0{,}004t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Вмѣсто прибора gn можно употреблять и обыкновенный мѣрительный цилиндръ, наполненный водой и опрокинутый надъ пневматической ванной. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ при опредѣленіи p принять во вниманіе давленіе водяного столба, оставшагося въ цилиндрѣ.

Не останавливаемся на другихъ способахъ опредѣленія плотности газовъ и перегрѣтыхъ паровъ, основанныхъ на наблюденіи вытѣсненнаго ими объема жидкости, скорости ихъ истеченія черезъ узкіе каналы (см. ниже глава VI, § 3) и т. д. Nilsson и Petterson построили весьма удобное видоизмѣненіе прибора V. Mayer'а.

Въ табл. II и III въ концѣ этой книги помѣщены числовыя величины плотности воздуха и другихъ газовъ.

ЛИТЕРАТУРА.

Опредѣленіе плотности газовъ и паровъ.

Arago et Biot Mém. Acad. Fr. 1806.
Regnault. Mém. Acad. Fr. 21.—Relation des expériences t. I. p. 221, 1847: Ann. ch. et phys. (3) 63, p. 45, 1861; Pogg. Ann. 65.
Д. И. Менделѣевъ. Временникъ Главн. Палаты. I, стр. 57.
Bunsen. Gasometrische Methoden, 1847. p. 128.
Dumas. Ann. ch. et phys. (2) 33, 1827; Pogg. Ann. 9, 1827.
Pawlewski. Chem. Ber. 16, p. 1293, 1883.
Deville et Troost Ann. ch. et phys. (3) 58, p. 257, 1858; C. R. 45 p. 821.
Gay-Lussac. Ann. ch. et phys. (1) 80, p. 118, 1811.
V. Mayer Chem. Ber. 9, p. 1216; 11, p. 2068 и др.
Nilsson et Petterson. Journ. f. pract. Chem. 33 p. 1, 1886.
Методы, не разсмотрѣнные нами:
Graham. Trans. R. Soc. 1846, p. 573; 1863, p. 385.
Lux. Instr. 1885 p. 411; 1886 p. 255.
Lommel. Instr. 1886 p. 109; Wied. Ann. 27 p. 144, 1886.
Moissan et Gautier. Ann. ch. et phys. (7) 5, p. 568, 1895.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Упругость газовъ.

§ 1. Законъ Бойля-Маріотта. Двѣ правильныя формулировки этого закона уже были приведены нами на стр. 34. Обозначая упругость газа, равную внѣшнему давленію, черезъ p и объемъ газа черезъ v, мы имѣемъ при неизмѣнной температурѣ для даннаго количества газа

$$pv = \text{Const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Упругость p будемъ выражать въ килогр. на кв. метръ поверхности, объемъ v въ куб. метрахъ, относя его къ вѣсовой единицѣ газа, такъ что v будетъ обозначать удѣльный объемъ. Если на координатныхъ осяхъ откладывать по абсциссамъ объемъ v, а по ординатамъ давленіе p, то кривая, выражающая связь между этими двумя величинами при постоянной температурѣ будетъ равностороннею гиперболой, ассимптоты которой—координатныя оси; ея уравненіе $p = \frac{c}{v}$. Законъ сжатія газовъ былъ открытъ Бойлемъ (Boyle) въ 1662 г.; опытное изслѣдованіе впервые подробно произвелъ Маріоттъ (Mariotte) въ 1676 г. Не останавливаемся на обыкновенныхъ пріемахъ повѣрки закона для давленій выше и ниже одной атмосферы, пріемахъ, которые излагаются въ элементарныхъ курсахъ.

На стр. 342 мы упомянули, что газы приблизительно слѣдуютъ закону Б.-М.; дѣйствительно, формула (1) не оказывается съ точностью соблюденной; произведеніе pv, съ измѣненіемъ давленія p не остается величиною постоянной. Уклоненія отъ закона Б.-М. могутъ происходить въ двухъ направленіяхъ:

Если съ увеличеніемъ давленія p произведеніе pv уменьшается, то это значитъ, что объемы v получаются слишкомъ малые, т.-е. что газъ сжимается болѣе, чѣмъ того требуетъ законъ Б.-М.

Если, наоборотъ, съ возростаніемъ p произведеніе pv увеличивается, то это указываетъ, что газъ сжимается менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М.

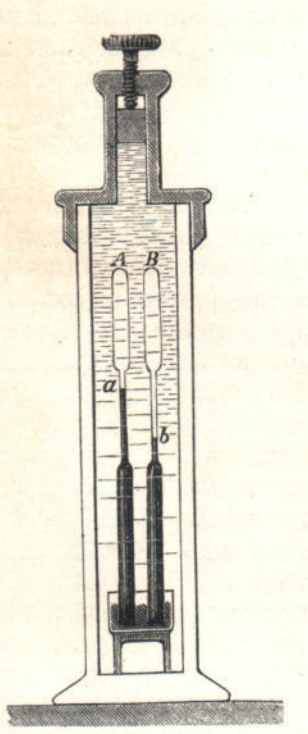
§ 2. Изслѣдованія, произведенныя до Regnault (1847 г.). Весьма многіе ученые занимались вопросомъ о сжатіи газовъ. Наиболѣе важныя работы, произведенныя до Regnault, суть слѣдующія:

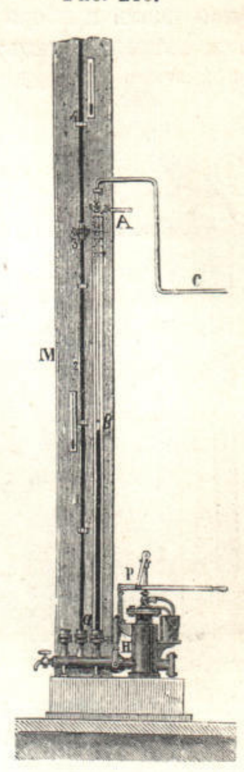
Oersted и Svendsen (1826 г.) не нашли отступленія отъ закона Б.-М. для воздуха до 60 атм. Для газовъ же, которые Faraday превратилъ въ жидкое состояніе (HN_3, SO_2 и др.), они нашли отступленія въ сторону большей сжимаемости.

Depretz (1827) первый доказалъ весьма простымъ опытомъ, что различные газы сжимаются не одинаково. Двѣ одинаковыя трубки A и B (рис. 209) наполнялись двумя различными газами. Нижніе концы трубокъ были погружены въ сосудъ со ртутью; весь приборъ находился

внутри піезометра (Отдѣлъ пятый, Глава III, § 3), т.-е. сосуда, наполненнаго водой, которую можно было сжимать, вдавливая поршень (см. рис.). Оказалось, что ртуть поднималась до неодинаковой высоты *a* и *b* въ обѣихъ трубкахъ, среднія части которыхъ сдѣланы были весьма узкими, чтобы малыя разности объемовъ были замѣтнѣе. Подобнымъ же образомъ Pouillet (1837) нашелъ, что CO_2, SO_2, NH_3, NO_2, CH_4 и C_2H_4 сжимаются сильнѣе,

Рис. 209. Рис. 210.





чѣмъ воздухъ, и что N, O, H, N_2O_2, CO и воздухъ сжимаются вполнѣ одинаково.

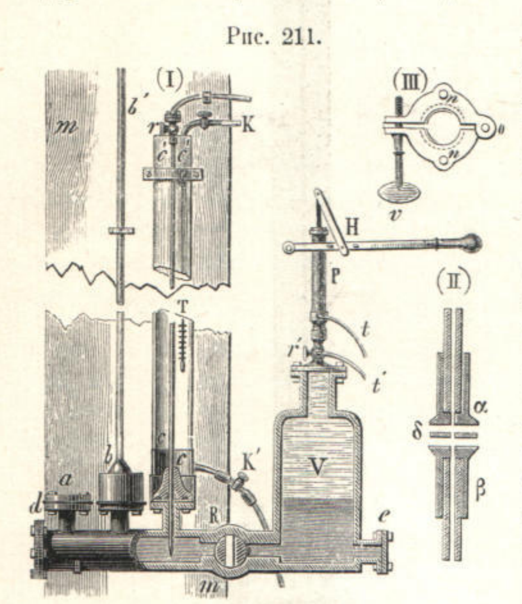
Dulong и Arago (1830) сжимали газъ, заключенный въ трубкѣ (длина 1,7 метра) обыкновеннымъ способомъ, увеличивая длину ртутнаго столба въ другой трубкѣ, соединенной съ первой, и измѣряя длину этого столба и уменьшающійся объемъ газа. Они для воздуха до 27 атм. не нашли отступленій отъ закона Б.-М.

§ 3. Изслѣдованія Regnault (1847 и 1862 г.). Главный недостатокъ методовъ, которые примѣнялись до Regnault, заключался въ томъ, что по мѣрѣ увеличенія давленія, объемъ газа непрерывно уменьшался, вслѣдствіе чего относительная точность измѣренія этого объема должна была также уменьшаться. Небольшія отклоненія отъ закона Б.-М., вслѣдствіе этого, могли быть не замѣчены. Существенная черта опытовъ Regnault заключалась въ томъ,

что онъ подвергалъ сжатіямъ тѣмъ бо́льшія количества газа, чѣмъ выше было достигнутое имъ давленіе, такъ что начальный объемъ v_0 газа, до дальнѣйшаго его сжатія, во всѣхъ опытахъ былъ одинъ и тотъ же; сжатіе же доводилось всегда до объема $v = \frac{1}{2} v_0$, причемъ давленіе, до сжатія равное p_0, дѣлалось бы равнымъ $p = 2p_0$, еслибы газъ строго слѣдовалъ закону Б.-М. Измѣряя давленія p_0 и p, Regnault и могъ открыть отступленія отъ этого закона.

Главная часть прибора Regnault изображена на рис. 210. Трубка $A\alpha$ содержитъ испытуемый газъ; ея длина 3 метра, внутренній діаметръ 10 мм.; черта β раздѣляетъ ее на двѣ части равной емкости. Она окружена трубкою, черезъ которую непрерывно протекаетъ вода опредѣленной температуры. Въ верхнемъ концѣ трубка снабжена краномъ и трубкой c, служащей для наполненія $A\alpha$ при помощи нагнетательнаго насоса сухимъ газомъ. Нижнимъ концомъ она погружена въ чугунный резервуаръ, наполненный ртутью. Въ этотъ же резервуаръ погружена нижняя часть другой трубки, длиною въ 24 метра, которая была расположена вдоль стѣны башни и мачты въ Collège de France. Цилиндръ H содержитъ ртуть и надъ ней воду, количество которой можно было увеличивать, дѣйствуя насосомъ P. Соединительный кранъ (см. вертикальную ручку налѣво отъ H) закрывался, какъ только въ приборѣ достигалось желаемое давленіе. Трубка $A\alpha$ наполнялась газомъ до черты α при давленіи въ 1 атм.; газъ сжимался до черты β и измѣрялось давленіе, близкое къ 2 атм. Затѣмъ накачивался газъ, и вся трубка до α наполнялась газомъ при 2 атм.; опять газъ сжимался до черты β, т.-е. приблизительно до 4 атм. Вновь накачивался газъ и сдавливаніе производилось отъ начальнаго давленія 4 атм. и т. д. На рис. 211 изображена нижняя часть прибора въ разрѣзѣ и въ увеличенномъ масштабѣ. Значеніе отдѣльныхъ частей понятно изъ предыдущаго описанія. Отдѣльный рис. II показываетъ способъ скрѣпленія трубокъ, изъ которыхъ состоитъ лѣвая трубка bb'. Оправы α и β соединяются зажимами nn, изображенными на рис. III.

Рис. 211.



Главнѣйшія поправки суть:

1. Давленіе атмосферы, которое слѣдуетъ прибавить къ давленію ртутнаго столба, должно быть взято для мѣста верхняго конца этого столба.

2. Высота ртутнаго столба должна быть приведена къ 0°; для этого служилъ рядъ термометровъ, изъ которыхъ два видны на черт. 210.

3. Ртуть въ открытомъ столбѣ сжималась подъ вліяніемъ собственнаго вѣса и потому ея плотность возростала сверху внизъ.

4. Объемъ трубки, содержащей газъ, нѣсколько увеличивался когда давленіе возрастало вдвое.

5. Температура потока воды не оставалась вполнѣ постоянною.

Regnault получилъ нижеслѣдующіе результаты. Пусть p_0 и v_0 начальныя значенія въ одномъ изъ опытовъ; p_1 и v_1 значенія послѣ сжатія, причемъ v_1 было весьма близко къ $\frac{1}{2}v_0$. Regnault опредѣлялъ дробь $\alpha = \frac{p_0v_0}{p_1v_1}$. Изъ предыдущаго ясно, что если

$$\frac{p_0v_0}{p_1v_1}\begin{cases} > 1, \text{ то газъ сжимается болѣе,} \\ < 1, \text{ » » » менѣе,}\end{cases} \text{ чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М.}$$

Оказалось, что для воздуха, N и CO_2 дробь $\alpha > 1$, для H она < 1; первые сжимаются больше, H — меньше, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М. Въ слѣдующей табличкѣ сведены эти результаты:

Воздухъ.		Азотъ.		CO_2.		Водородъ.	
p_0 (мм.)	$\frac{p_0v_0}{p_1v_1}$	p_0 (мм.)	$\frac{p_0v_0}{p_1v_1}$	p_0 (мм.)	$\frac{p_0v_0}{p_1v_1}$	p_0 (мм.)	$\frac{p_0v_0}{p_1v_1}$
739,19	1,00142	753,96	1,00101	763,86	1,00764	—	—
2111,63	1,00276	2159,12	1,00125	2164,31	1,01901	—	—
4219,05	1,00350	3030,22	1,00195	3186,13	1,02870	3989,47	0,99758
9332,82 (12,30 атм.)	1,00613	9772,99 (12,85 атм.)	1,00482	9620,06 (12,66 атм.)	1,09983	9175,25	0,99313
—	—	—	—	—	—	10361,88 (13,62 атм.)	0,99233

Отступленія отъ закона Б.-М. особенно наглядно видны изъ слѣдующей таблицы:

v	Воздухъ.		Азотъ.		CO_2		Водородъ.	
	p	pv	p	pv	p	pv	p	pv
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\frac{1}{2}$	1,9978	0,9989	1,9986	0,9993	1,9829	0,9914	2,0011	1,0006
$\frac{1}{8}$	7,9457	0,9932	7,9641	0,9955	7,5194	0,9399	8,0339	1,0042
$\frac{1}{20}$	19,7199	0,9860	19,7886	0,9894	16,7054	0,8353	20,2687	1,0134

Еслибы газы слѣдовали закону Б.-М., то числа p были бы 1, 2, 8 и 20, а всѣ числа pv были бы равны единицѣ.

Regnault выразилъ результаты своихъ наблюденій эмпирической формулою вида

$$\frac{p_0 v_0}{pv} = 1 + A\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) + B\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ A и B постоянныя, различныя для различныхъ газовъ.

Позже Regnault остановился на другой формулѣ

$$\frac{0{,}76v_0}{pv} = 1 + A(p - 0{,}76) + C(p - 0{,}76)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Для воздуха въ формулѣ (2) $A = -0{,}0011054$, $B = 0{,}000019381$; для водорода $A = +0{,}00054723$, $B = 0{,}0000084155$; p въ (3) давленіе въ метрахъ.

§ 4. Давленія меньшія одной атмосферы. Работы Siljestroem'a, Менделѣева, Amagat и Fuchs'a. Siljestroem (1873) заставлялъ данное количество газа расширяться и наблюдалъ новые объемы и давленія. Онъ нашелъ, что при слабыхъ давленіяхъ (меньше 76 мм.) водородъ сжимается болѣе, чѣмъ по закону Б.-М; воздухъ же слѣдуетъ этому закону тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше давленіе.

Д. И. Менделѣевъ (1874—76) пришелъ къ совершенно другому результату, а именно, что въ предѣлахъ давленій отъ 5 мм. до 650 мм. воздухъ сжимается менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М. Отступленія уменьшаются по мѣрѣ приближенія къ 650 мм., при каковомъ давленіи $\frac{d(pv)}{dp} = 0$; при $p > 650$ мм. сжимаемость воздуха превышаетъ указанную закономъ Б.-М. Вотъ нѣкоторыя числа, данныя Менделѣевымъ:

p	pv	p	pv
646,185 мм.	1,00000	104,805 мм.	0,99730
486,215	0,99960	16,395	0,97114
207,430	0,99867	14,555	9,96551

Приборъ, которымъ пользовался Менделѣевъ, изображенъ на рис. 212. Большой яйцевидный сосудъ A можно наполнить ртутью, открывая кранъ D и сообщая его съ резервуаромъ ртути E; для выпусканія ртути служилъ кранъ C. Сосудъ A соединенъ помощью тонкой трубки со «ртутнымъ краномъ» OM и съ барометрической сифонной трубкой mnl, играющей роль манометра (глава III, § 8). Въ верхнемъ концѣ широкой трубки Z находится черта, до которой при всѣхъ измѣреніяхъ доводится ртуть приливаніемъ таковой черезъ воронку R, или выливаніемъ черезъ кранъ T. Устройство ртутнаго крана OM легко понять изъ рисунка: если опустить трубку XY, то нижній конецъ трубки kc откроется и черезъ P можно ввести въ OM, ch и A испытуемый газъ; если затѣмъ поднять XY, то ck внизу закроется и тогда газъ, введенный въ приборъ, находится въ

замкнутомъ со всѣхъ сторонъ пространствѣ. Если Y опущено и P открыто, то ртуть въ N стоитъ выше, чѣмъ въ Z на величину, равную барометрическому давленію. Но когда Y приподнято и газъ въ $kchA$ разрѣженъ, то ртуть въ N опускается и разность высотъ ртути въ N и Z даетъ давленіе p газа. Опытъ производился слѣд. образомъ: черезъ P вводился газъ, причемъ кранъ C открывался, такъ что газъ могъ наполнить часть сосуда A. Затѣмъ C закрывалось, Y поднималось и опредѣлялось давленіе p_1 газа (на манометрѣ ZN), и его объемъ v_1, равный объему соединительныхъ трубокъ (часть kc и ahb) и объему ртути, вылившейся черезъ C, который опредѣлялся взвѣшиваніемъ. Затѣмъ выпускалась опять часть ртути черезъ C и взвѣшиваніемъ ея опредѣлялся новый объемъ v_2; давленіе p_2 опять измѣрялось на манометрѣ ZN. Такимъ образомъ можно было слѣдить за измѣненіями произведенія pv, которое, какъ видно изъ приведенной таблички, уменьшается съ уменьшеніемъ давленія; оказалось, что $p_2v_2 < p_1v_1$.

Рис. 212.

Понятно, что были введены всѣ необходимыя поправки на вліяніе температуры и т. д.

Amagat (1876—83) пришелъ къ мало вѣроятному результату, что воздухъ при слабыхъ давленіяхъ, отъ 0,245 мм. до 12,297 мм., строго слѣдуетъ закону Б.-М.

Fuchs (1888) подтвердилъ результаты Менделѣева; онъ нашелъ, что воздухъ при давленіяхъ ниже 600 мм. сжимается менѣе, CO_2 и SO_2 между 1000 мм. и 250 мм. напротивъ болѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б. М. Для H отступленій отъ закона Б.-М. не оказалось.

§ 5. Весьма сильныя давленія. Работы Natterer'а и Cailletet. Всѣ изслѣдованія привели къ результату, что для газовъ, которые при обыкновенной температурѣ не ожижаются (см. § 7), напр. для N, O, H и т. д. сжимаемость при весьма сильныхъ давленіяхъ съ возростаніемъ давленія быстро уменьшается.

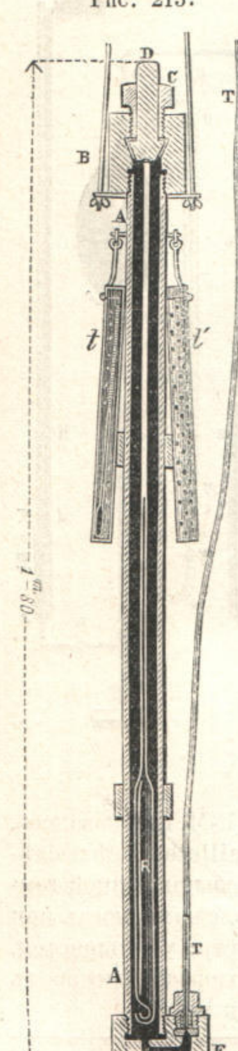
Natterer (1850—54) изслѣдовалъ воздухъ, азотъ, водородъ, кислородъ и окись углерода. Вотъ нѣкоторыя изъ полученныхъ имъ чиселъ:

Водородъ.		Азотъ.		Воздухъ.		Окись углерода.		Кислородъ.	
p атм.	$\frac{p_0v_0}{pv}$	p атм.	$\frac{p_0v_0}{pv}$	p атм.	$\frac{p_0v_0}{pv}$	p атм.	$\frac{p_0v_0}{pv}$	p атм.	$\frac{p_0v_0}{pv}$
78	1,000	75	1,000	76	1,000	77	1,000	77	1,000
248	0,879	252	0,962	252	0,933	248	0,955	254	0,972
505	0,788	515	0,747	504	0,785	515	0,810	517	0,864
1015	0,619	1035	0,507	1047	0,512	1016	0,538	1010	0,590
2790	0,361	2790	0,253	2790	0,260	2790	0,261	1354	0,485

При этихъ громадныхъ давленіяхъ произведеніе pv быстро ростетъ и слѣд. сжимаемость меньше требуемой закономъ Б.-М.

Cailletet (1870) сжималъ при первыхъ своихъ изслѣдованіяхъ газъ въ длинной трубкѣ, позолоченной внутри; объемъ, занимаемый газомъ, опредѣлялся положеніемъ края позолоты, не растворенной ртутью. Въ общихъ чертахъ его изслѣдованія подтвердили результаты Natterer'а. Для воздуха онъ нашелъ максимумъ сжимаемости при 70 атм. Позднѣйшія работы (1877 и 1879) Cailletet производилъ съ приборомъ изображеннымъ на рис. 213. Стеклянный сосудъ R, внутри позолоченный (см. выше), наполнялся испытуемымъ газомъ; верхняя его часть капилярная, такъ что ртуть проникала въ нее лишь при высокихъ давленіяхъ; онъ помѣщался внутри стального цилиндра AA, наполненнаго ртутью и сообщеннаго со стальною трубкою TT, длина которой 250 метровъ. Эта трубка была расположена вдоль склона горы (въ Chatillon sur Seine); позже онъ опускалъ свой приборъ въ артезіанскій колодезь (въ Butte-aux-Cailles), глубина котораго доходитъ до 500 метровъ. Два максимумъ-термометра t и t' давали возможность опредѣлить температуру слоя воды, до котораго былъ опущенъ приборъ. Для азота (при 15°) Cailletet нашелъ такія числа:

Рис. 213.



p атм.	pv	p атм.	pv
1	1,0000	130,52	1,0120
51,79	0,9789	143,68	1,0345
64,83	0,9595	163,31	1,0592
77,84	0,9449	196,33	1,0653
91,28	0,9583	215,99	1,0801
104,35	0,9762	239,46	1,1159
117,41	0,9955		

До 75 атм. азотъ сжимается сильнѣе, чѣмъ по зак. Б.-М.; далѣе онъ сжимается слабѣе, и при 125 атм. имѣетъ такой объемъ, какъ еслибы онъ строго слѣдовалъ этому закону; при еще большемъ давленіи объемы оказываются уже слишкомъ великими. Произведеніе pv имѣетъ минимумъ. Сжимаемость смѣсей воздуха и CO_2, а также воздуха и H изслѣдовалъ U. Lala.

§ 6. Опыты Amagat (начало работъ 1878). Этотъ ученый пользовался приборомъ, напоминающимъ приборъ Cailletet. Однако у него стеклянная трубка съ газомъ помѣщалась своею верхнею частью въ стеклянномъ

цилиндрѣ, наполненномъ водою, такъ что отчеты уровня ртути могли дѣлаться непосредственно.

Ртуть вгонялась въ трубку съ газомъ и рядомъ въ трубку манометрическую посредствомъ насоса, подобно тому, какъ это дѣлалъ Regnault. Опыты производились отчасти на каменной лѣстницѣ укрѣпленія въ Ліонѣ, отчасти въ шахтѣ Saint-Etienne, гдѣ на глубинѣ 326 метровъ подъ землею былъ установленъ приборъ. Онъ нашелъ слѣдующее:

Для азота произведеніе pv уменьшается до 50 атм. и затѣмъ увеличивается; около 100 атм. оно равно единицѣ (т.-е. тому же, что и при 1 атм.); при 430,8 атм. $pv = 1,2696$.

Сравнивая сжатіе другихъ газовъ съ сжатіемъ азота, Amagat нашелъ, что воздухъ, O, CO, CH_4 и C_2H_4 также при давленіяхъ выше 1 атм. сперва сжимаются болѣе, а при весьма сильныхъ давленіяхъ менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б. М. Минимумъ произведенія pv или максимумъ сжимаемости находится для

воздуха	при p =	65	метрамъ ртутнаго столба.
N	» » »	50	» » »
O	» » »	100	» » »
CO	» » »	50	» » »
CH_4	» » »	120	» » »
C_2H_4	» » »	65	» » »

Особенно замѣчателенъ C_2H_4, сжимаемость котораго (при обыкновенной температурѣ) при нѣкоторыхъ давленіяхъ въ 2,2 раза больше, а при другихъ (весьма высокихъ) въ 3 раза менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б. М.

Для водорода Amagat наблюдалъ непрерывное возростаніе произведенія pv до весьма высокихъ давленій.

Впослѣдствіи Amagat нашелъ, что азотъ при громадныхъ давленіяхъ въ нѣсколько тысячъ атмосферъ занимаетъ до трехъ разъ большій объемъ, чѣмъ слѣдовало бы по закону Б. М.

Leduc изслѣдовалъ отступленіе нѣкоторыхъ газовъ отъ закона Б. М., главнымъ образомъ около 0° и около 76 см. Подобно Regnault, онъ пользовался эмпирическою формулою

$$\frac{p_0 v_0}{pv} - 1 = A(p - p_0).$$

гдѣ v_0 и v объемы, приведенные къ 0° при давленіяхъ p см. и $p_0 = 76$ см. Приводимъ его результаты:

Газъ:	CO_2	N_2O	HCl	NH_3	SO_2
A :	$102 . 10^{-6}$	$11 . 10^{-5}$	$120 . 10^{-6}$	$243 . 10^{-6}$	$323 . 10^{-6}$
»	—	—	$107 . 10^{-6}$ при 15°	$190 . 10^{-6}$ при 14°	—

Значенія A въ первой строкѣ относятся къ 0°.

§ 7. Критическая температура. Чтобы вполнѣ понять результаты, полученные Cailletet и въ особенности Amagat, необходимо познакомиться съ понятіемъ о критической температурѣ, которое болѣе подробно будетъ разсмотрѣно въ ученіи о теплотѣ.

Andrews (1869) открылъ, что для всякаго газа существуетъ особая температура, выше которой онъ ни при какомъ сжатіи не можетъ быть превращенъ въ жидкость и слѣд. единственное возможное состояніе вещества есть газообразное. Эта температура называется критическою для даннаго вещества. Критическая температура CO_2 находится при $+31°$, азота при $-146°$, кислорода при $-119°$, CO при $-140°$, водорода вѣроятно около $-235°$ и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что при обыкновенной температурѣ (комнатной) воздухъ, N, O, CO, H находятся выше, а CO_2 ниже критической температуры.

§ 8. Вліяніе температуры на сжимаемость газовъ. Въ § 6 было сказано, что Amagat не нашелъ минимума сжимаемости для H, столь рѣзко выраженнаго для нѣкоторыхъ другихъ газовъ. Wroblewski открылъ, однако, что если сжимать H при весьма низкой температурѣ, то и для него, подобно какъ для O, N, CO и т. д., существуетъ минимумъ произведенія pv, т.-е. что при весьма низкой температурѣ и H сначала сжимается больше, чѣмъ по закону Б. М.

При температурахъ выше обыкновенной комнатной изслѣдовали сжимаемость газовъ Regnault, Amagat, Winkelmann и Roth.

Regnault еще въ 1847 нашелъ, что для CO_2 отступленія отъ закона Маріотта при $100°$ значительно меньше, чѣмъ при $0°$.

Amagat изслѣдовалъ прежде всего (1869—72) сжатіе CO_2 и SO_2 отъ 1 до 2 атмосферъ при температурахъ, возроставшихъ отъ $8°$ (CO_2) и $15°$ (SO_2) до $250°$, и нашелъ, что съ повышеніемъ температуры отступленія отъ закона Б.-М. (слишкомъ большое сжатіе) настолько уменьшаются, что при $250°$ они дѣлаются почти незамѣтными. Вслѣдъ затѣмъ Amagat изслѣдовалъ сжатіе воздуха (до $320°$) и водорода (до $250°$) и нашелъ, что и для этихъ газовъ отступленія отъ закона Б.-М. (въ разныхъ направленіяхъ) уменьшаются съ повышеніемъ температуры.

Тотъ же результатъ нашелъ Winkelmann (1878) для C_2H_4, который онъ подвергалъ сжатіямъ отъ 1 до 2-хъ и отъ 1 до 3-хъ атм. при $0°$ и $100°$.

Roth (1880) изслѣдовалъ CO_2, SO_2, C_2H_4 и NH_3 при давленіяхъ до 60 атм. и температурахъ до $183°$, и также нашелъ по мѣрѣ повышенія температуры приближеніе сжимаемости газовъ къ требуемой закономъ Б. М. Для CO_2 онъ нашелъ при $183°$ непрерывное уменьшеніе произведенія pv до 130,55 атм., не получивъ того минимума, который Cailletet нашелъ для другихъ газовъ.

Новая работа Amagat (1881) разъяснила это кажущееся противорѣчіе. Онъ изслѣдовалъ H, N, CH_4, C_2H_4 и CO_2 при температурахъ отъ комнатной до $100°$ и нашелъ, что эти газы раздѣляются на три группы или типа. Къ первому принадлежитъ H, который при всѣхъ указанныхъ температурахъ въ одинаковомъ направленіи отступаетъ отъ закона Б.-М., сжимаясь менѣе, чѣмъ бы

слѣдовало. Противоположный типъ представляютъ CO_2 и C_2H_4, для которыхъ pv съ увеличеніемъ p сперва быстро уменьшается, а затѣмъ опять ростетъ. Однако минимумъ величины pv находится при тѣмъ высшемъ давленіи, чѣмъ выше температура; для CO_2 онъ находится при $p = 70$ метрамъ, когда $t = 35{,}1^\circ$ и при $p = 170$ метрамъ, когда $t = 100^\circ$; подобное получилось и для C_2H_4. Этимъ объясняется результатъ, найденный Roth'омъ. Третій типъ представляютъ N и CH_4; при низкихъ температурахъ минимумъ для pv замѣтенъ; при болѣе высокихъ онъ для N исчезаетъ (pv только ростетъ), для CH_4 переходитъ къ все меньшимъ давленіямъ и вообще дѣлается менѣе рѣзкимъ.

Всѣ эти изслѣдованія приводятъ къ такому заключенію:

При температурѣ, которая значительно выше критической, всѣ газы сжимаются менѣе, чѣмъ слѣдуетъ по закону Б.-М.; pv ростетъ съ возростаніемъ p.

Ближе къ критической температурѣ (наприм. H по опытамъ Wroblewsk'аго, см. выше) всѣ газы при возростаніи p сжимаются сперва болѣе, потомъ менѣе, чѣмъ по закону Б. М.; pv имѣетъ минимумъ.

Ниже критической температуры газъ сжимается болѣе, чѣмъ того требуетъ законъ Б. М.; сжимаемость ростетъ съ увеличеніемъ давленія до момента ожиженія, когда она почти внезапно дѣлается весьма малою, равною сравнительно ничтожной сжимаемости жидкости.

Witkowski находитъ для воздуха при различныхъ и притомъ весьма низкихъ температурахъ t слѣдующія значенія давленія p въ атмосферахъ, при которыхъ pv минимумъ:

$t = +100^\circ$	16°	0°	-35°	$-78^\circ{,}5$	$-103^\circ{,}5$	-130°	-135°
$p = < 10$	79	95	115	123	106	66	57

§ 9. Уравненіе состоянія для идеальныхъ газовъ, уравненіе Клапейрона. Уравненіемъ состоянія для даннаго вещества называется выраженіе вида

$$F(v, p, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

связывающее удѣльный объемъ v, упругость или внѣшнее давленіе p и температуру t даннаго количества этого вещества. Для идеальныхъ газовъ связь между v, p и t опредѣляется законами Б.-М. и Г.-Л. (Бойля-Маріотта и Гей-Люссака). Пусть v_1, p_1, t_1 и v_2, p_2, t_2 величины, относящіяся къ двумъ различнымъ, произвольнымъ состояніямъ одного и того же количества газа. Охладимъ газъ въ обоихъ случаяхъ до 0° безъ измѣненія давленія; тогда получаемъ два новыхъ состоянія:

$$\frac{v_1}{1+\alpha t_1},\ p_1,\ 0^\circ \qquad \text{и} \qquad \frac{v_2}{1+\alpha t_2},\ p_2,\ 0^\circ,$$

гдѣ $\alpha = \frac{1}{273}$ коэффиціентъ расширенія газа. Температура въ этихъ двухъ состояніяхъ одинаковая, слѣд. по закону Б.-М. имѣемъ

$$\frac{v_1 p_1}{1+\alpha t_1} = \frac{v_2 p_2}{1+\alpha t_2}.$$

Умножимъ оба знаменателя на 273 и обозначимъ абсолютныя температуры (стр. 30) большими T съ соотвѣтствующими значками, т.-е. положимъ $273 + t_1 = T_1$ и $273 + t_2 = T_2$; получаемъ

$$\frac{v_1 p_1}{T_1} = \frac{v_2 p_2}{T_2},$$

или, въ виду произвольности двухъ состояній, $\frac{vp}{T} = \text{Const.}$; обозначивъ Const. буквою R, имѣемъ

$$pv = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

это и есть уравненіе Клапейрона (Clapeyron), уравненіе состоянія идеальнаго газа. Численное значеніе R зависитъ отъ рода газа, отъ взятаго его количества и отъ единицъ, коими измѣряются p, v и T. При неизмѣнныхъ p и T объемъ v пропорціоналенъ вѣсовому количеству P газа и обратно пропорціоналенъ его плотности δ, если различные газы брать въ равныхъ вѣсовыхъ количествахъ P; отсюда слѣдуетъ, что и постоянная R пропорціональна взятому вѣсовому количеству P газа и обратно пропорціональна его плотности δ при равныхъ P.

Разсмотримъ два случая опредѣленія численнаго значенія величины R.

I. Беремъ 1 килогр. газа и измѣряемъ v въ куб. метрахъ, p въ килогр. на кв. метръ поверхности. Для воздуха вычислимъ R, полагая $p = 1$ атмосф. $= 10333$ клгр. на кв. м. и $t = 0°$, т.-е. $T = 273°$. Объемъ одного килограмма воздуха при 0° и 760 мм. давленія равенъ 0,7733 куб. метра; слѣд.

$$R = \frac{pv}{T} = \frac{10333 \cdot 0,7733}{273} = 29,27 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Для другихъ газовъ имѣемъ $R = 29,27\,\delta^{-1}$ и слѣд. ур. состоянія

$$\left.\begin{array}{c} pv = 29,27\,\delta^{-1}\,T. \\ \text{(килогр. газа, куб. метры, килогр. на кв. метръ.)} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

II. Беремъ для каждаго газа «граммъ-молекулу», т.-е. столько граммовъ, сколько единицъ заключается въ его молекулярномъ вѣсѣ, напр. 2 гр. водорода, 32 гр. кислорода, 18 гр. водяныхъ паровъ и т. д.; объемъ v измѣряемъ въ литрахъ, давленіе p въ атмосферахъ. Такъ какъ, при данныхъ p и t, объемы v одной граммъ-молекулы всѣхъ совершенныхъ газовъ одинаковы, то ясно, что для R получится одно число для всѣхъ газовъ. Изъ закона Авогадро (стр. 342) видно, что мы беремъ одинаковое число молекулъ различныхъ газовъ и слѣд. количества газовъ, пропорціональныя ихъ плотностямъ. Чтобы вычислить R, примемъ $v = 1$, $t = 0°$; тогда p будетъ давленіе въ атмосферахъ граммъ-молекулы газа, заключенной въ объемѣ 1 литра при 0° (напр. 2 гр. водорода). Вѣсъ литра воздуха при 0° и 1 атм. равенъ 1,294 гр., слѣд. вѣсъ литра водорода при 0° и

1 атм. равенъ $\frac{1,294}{14,44}$ гр. Отсюда давленіе p двухъ граммовъ водорода при 0°, занимающихъ объемъ одного литра,

$$p = 2 : \frac{1,294}{14,44} = \frac{28,88}{1,294} = 22,24 \text{ атм.}$$

Очевидно это и есть давленіе граммъ-молекулы всякаго газа, имѣющей при 0° объемъ $v = 1$ литру. Имѣемъ $p = 22,24$, $v = 1$, $T = 273$ и слѣд.

$$R = \frac{pv}{T} = \frac{22,24}{273} = 0,0815\cdot$$

слѣд. уравненіе Клапейрона

$$\left.\begin{array}{c} pv = 0,0815\,T \\ \text{(граммъ-молекула, литры, атмосферы.)} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

§ 10. Формула van der Waals'a (1879). Разсмотрѣнные выше опыты показываютъ, что газы далеко не слѣдуютъ съ точностью законамъ Б. М. и Г. Л., и что поэтому формула (5) Клапейрона не можетъ для нихъ выражать истиннаго соотношенія между p, v и T. Было предложено много различныхъ поправокъ формулы Клапейрона, т.-е. болѣе сложныхъ уравненій состоянія для реально существующихъ газовъ. Одно изъ самыхъ извѣстныхъ выражается формулою van der Waals'a. Она имѣетъ слѣдующій видъ

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

гдѣ a и b двѣ постоянныя, различныя для различныхъ газовъ.

Физическое ихъ значеніе слѣдующее. Мы видѣли (стр. 34), что давленіе газовъ объясняется ударами частицъ, налетающихъ на стѣнки, ограничивающія объемъ газа. Въ главѣ VI мы покажемъ, какъ формула $pv = RT$ выводится, если допустить, что молекулы газа суть точки и что между ними нѣтъ сцѣпленія. Однако молекулы занимаютъ нѣкоторый объемъ β, такъ что свободный для ихъ движенія объемъ оказывается уменьшеннымъ; вслѣдствіе этого онѣ чаще будутъ ударяться о преграду и упругость p будетъ больше $\frac{RT}{v}$; van der Waals показалъ, что p должно въ этомъ случаѣ равняться $\frac{RT}{v-b}$; гдѣ $b = 4\beta$, т.-е. b равно четырехкратному объему, занимаемому молекулами газа.

Сцѣпленіе уменьшаетъ давленіе, ибо частицы, находящіяся около преграды, какъ бы притягиваются во внутрь массы газа и это уменьшаетъ силу ихъ ударовъ. Уменьшеніе p должно быть пропорціонально числу ударяющихъ частицъ и числу частицъ, притягивающихъ первыхъ во внутрь газа, т.-е. оно должно быть пропорціонально квадрату плотности D газа или обратно пропорціонально квадрату объема v. Такимъ образомъ получается

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

что и приводится къ виду (9). Формула v. d. Waals'a можетъ быть написана въ видѣ

$$pv = RT - \frac{a}{v} + \left(\frac{ab}{v^2} + bp\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Эта формула вполнѣ выражаетъ результаты опытовъ; съ увеличеніемъ p объемъ v уменьшается и вся правая часть сперва уменьшается, достигаетъ минимума, когда $\frac{a}{v} = 2\frac{ab}{v^2} + bp$ и затѣмъ опять увеличивается. Для CH_4 Baynes (1880) нашелъ замѣчательное согласіе съ формулою (9); такое же согласіе нашли Roth и другіе для CO_2, SO_2, NH_3 и для воздуха. Численныя значенія для коеффиціентовъ a и b вычисляются на основаніи наблюденій.

Если за единицу давленія принять давленіе въ 1 м. ртутнаго столба и за единицу объема—объемъ 1 клгр. газа при 0° и давленіи въ 1 м., то для a и b получаются слѣдующія численныя значенія изъ опытовъ Regnault

	a	b
Воздухъ	0,0037	0,0026
CO_2	0,0115	0,003
H	0	0,00069

Принимая за единицу давленія 1 атмосферу, и объемъ 1 клгр. газа при 0° и при единицѣ давленія за единицу объема, Roth находитъ такія числа

	a	b
CO_2	0,00874	0,0023 при 18°,5
		0,0027 » 49°,5
		0,0029 » 99°,6 и 183°,8
SO_2	0,03002	0,0062 » 58°,0
		0,0094 » 96°,6
		0,0084 » 183°,2
NH_3	0,0169	0,00602 » 46°,6
		0,00631 » 99°,6 и 183°
C_2H_4	0,0142	0,00698 » 18°
		0,00666 » 50°,2
		0,00608 » 99°,6
		0,00587 » 182°,8

§ 11. Формулы Clausius'a и Regnault. Clausius предложилъ, какъ уравненіе состоянія газовъ, формулу

$$\left[p + \frac{a}{T(v+\beta)^2}\right](v - b) = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

содержащую три постоянныхъ a, b и β и выражающую, что т. наз. «внутреннее давленіе», которое по v. d. Waals'y равно $\frac{a}{v^2}$, зависитъ отъ

температуры T и находится въ болѣе сложной зависимости отъ объема v. Формула (12) можетъ быть приведена къ виду

$$\frac{p}{RT} = \frac{1}{v-b} - \frac{a}{RT^2(v+\beta)^2}.$$

Впослѣдствіи Clausius предложилъ еще болѣе сложную формулу, содержащую уже 5 постоянныхъ:

$$\frac{p}{RT} = \frac{1}{v-b} - \frac{AT^{-n} - B}{(v+\beta)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Изъ множества другихъ формулъ упомянемъ только данную Regnault и приведенную выше, см. (2) § 3 стр. 354. Такъ какъ эту послѣднюю можно привести къ виду

$$pv = (1 + A + B) - \frac{A+2B}{v} + \frac{B}{v^2},$$

а въ послѣднемъ членѣ формулы (11) v. d. Waals'а можно вмѣсто bp написать $\frac{b'}{v}$, то ясно, что формулы Regnault и v. d. Waals'а не отличаются существенно другъ отъ друга.

Формулы Clausius'а и многихъ другихъ не имѣютъ существенныхъ преимуществъ передъ знаменитою формулою v. d. Waals'а.

ЛИТЕРАТУРА.

Boyle. Nova experimenta physico-mechanica de vi aeris elastica. London. 1662.

Mariotte. De la nature de l'air. 1679.

Oerstedt and Svendsen. Edinb. Journ. of science. IV, p. 224, 1826.

Despretz. Ann. ch. et phys. (2) 34, p. 335 и 443, 1827; C. R. 14, p. 239; 21 p. 216.

Arago et Dulong. Mém. de l'Acad. Fr. 10, p. 193, 1831; Ann. ch. et phys. (2) 43, p. 74, 1830.

Pouillet. Elements de Phys. I p. 327 (4-е изд.).

Regnault. Mém. de l'Instit. 21 p. 329, 1847; 26 p. 229, 1862.

Jochmann. Schloemilch's Ztschr. 5 p. 106, 1860.

Schroeder v. d. Kolk. Pogg. Ann. 116 p. 429, 1862; 126 p. 333, 1865.

Natterer. Wien. Ber. 5 p. 351, 1850; 6 p. 557, 1850; 12 p. 199, 1854; Pogg. Ann. 62 p. 139; 94 p. 436.

Cailletet. C. R. 70 p. 1131; 83 p. 1211; 84 p. 82; 88 p. 61; Ann. chim. et phys. (5) 19 p. 386.

Amagat. C. R. 68 p. 1170; 71 p. 67; 73 p. 183; 87 p. 432; 88 p. 336; 89 p. 437. Ann. ch et phys. (4) 28 p. 274; 29 p. 246; (5) 8 p. 270; 19 p. 345; 22 p. 353; 23 p. 353 28 p. 480; (6) 29 p. 68, 1893.

A. Leduc. C. R. 123 p. 743. 1896.

Winkelmann. W. A. 5 p. 92; J. de phys. (2) 8 p. 183, 1880.

Roth. W. A. 11 p. 1, 1880.

Siljestroem. Pogg. Ann. 151 p. 451 и 573, 1874; Chem. Ber. 8 p. 576.

Менделѣевъ и *Кирпичевъ*. Bull. de l'Acad. de St. Petersb. 19 и 21, 1874; Ann. chim. et phys. (5) 2 p. 427; 9 p. 111. Объ упругости газовъ. Спб. 1875.

Fuchs. Wied. Ann. 35 p. 430. 1888.

Van der Waals. Ueber die Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes (перев. съ голландск.) 1873.
Clausius. Wied. Ann. 9 p. 337, 1880; 14 p. 701, 1881.
Baynes. Nature (англ.) 22 p. 186.
Andrews. Phil. Trans. 1869; Ann. ch. et phys. (4) 21 p. 208, 1870.
U. Lala. C. R. 111 p. 819, 1890; C. R. 112 p. 426, 1891.
A. Witkowski. Extraits du Bullet. de l'Acad. des Sc. de Cracovie. Mai 1891 p. 181.
E. Baly and W. Ramsay. Phil. Mag. (5) 37 p. 301, 1894.
C. Bohr. W. A. 27 p. 459, 1886.
К. Краевичъ. Новая метода изслѣдованія упругости газовъ. Ж. Ф. Х. О. 14 p. 395, 1882. Другія статьи объ упругости газовъ: Ж. Ф. Х. О. 16 p. 307, 1884; 17 p. 335, 1885.
Н. Н. Шиллеръ. Уравненіе состоянія газовъ. Ж. Ф. Х. О. 22 p. 110, 1890.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Барометры, манометры и насосы

§ 1. Атмосферное давленіе. Нормальнымъ считается атмосферное давленіе, равное давленію ртутнаго столба въ 760 мм. высоты при 0° на уровнѣ моря и на широтѣ 45°. Такъ какъ вѣсъ куб. сантим. ртути при 0° равенъ 13,596 гр., то это нормальное давленіе равно 1,0333 килогр. на кв. сантим. Если его выразить въ динахъ (стр. 77), то получается 1,013622 мегадина на кв. сант. Близость этого числа къ единицѣ привела къ предложенію вообще измѣрять атмосферное давленіе въ мегадинахъ на кв. сант. и за нормальное считать давленіе въ 1 мегадинъ на кв. мм.

Строго говоря, всякая мѣстность на земномъ шарѣ имѣетъ свое нормальное давленіе, равное среднему давленію за большой промежутокъ времени (нѣсколько лѣтъ). Въ этомъ смыслѣ нормальное давленіе на вершинѣ Монблана равно 420 мм.

Приборы, служащіе для измѣренія атмосфернаго давленія, называются барометрами. Барометры бываютъ ртутные, глицериновые, нефтяные, водяные и т. д., металлическіе и т. д.

§ 2. Ртутный барометръ. Отличаютъ ртутные барометры съ чашечкой, сифонные и вѣсовые. Не останавливаемся на способахъ изготовленія барометра, въ особенности наполненія его чистою ртутью, не содержащей воздуха.

На рис. 214 изображенъ барометръ съ чашечкой E, служащей резервуаромъ ртути; въ нее погруженъ нижній конецъ трубки $ABCE$, содержащей ртуть, надъ которой находится т. наз. Торричелліева пустота. Верхняя часть AB трубки отдѣльно изображена на рис. 215; она дѣлается болѣе широкою для уменьшенія волосности (Отдѣлъ пятый, глава V, § 4), которая дѣйствуетъ на ртутный столбъ, какъ давленіе сверху внизъ и заставляетъ тѣмъ болѣе понижаться верхній уровень ртути, чѣмъ тоньше трубка. Рядомъ съ трубкой находится латунная линейка, на высеребренной верхней части которой начерчена шкала, причемъ нуль этой шкалы, еслибы она была продолжена внизъ, пришелся бы у конца острія, прикрѣпленнаго

къ нижнему концу линейки. Помощью зубчатаго колесика, снабженнаго головкою F и небольшой шестерни, можно поднимать или опускать шкалу такъ, что остріе коснется поверхности ртути въ чашкѣ E; этого легко достигнуть наблюдая изображеніе острія во ртути. Остріе иногда замѣняется поплавкомъ съ горизонтальною чертою, которая должна приходиться на высотѣ другой черты, проведенной на нижнемъ продолженіи (иногда костяномъ) латунной полосы. Параллельно шкалѣ передвигается ноніусъ V, съ которымъ связаны двѣ призмы D, вилообразно обхватывающія трубку AB; обращенныя вверхъ ребра этихъ призмъ лежатъ въ одной плоскости, горизонтальной, когда барометрическая трубка вертикальна и проходящей черезъ нулевое дѣленіе ноніуса. При отчетѣ барометра слѣдуетъ сперва установить шкалу, какъ сказано выше, а затѣмъ ноніусъ такъ, чтобы эта плоскость сверху касалась ртутнаго мениска.

Рис. 214.

Иногда шкалу вычерчиваютъ не на латуни, но на стеклянной полоскѣ $CADB$ (рис. 216), половина (AB) которой покрыта амальгамой и служитъ зеркаломъ. Въ этомъ зеркалѣ наблюдатель видитъ изображеніе своего глаза; дѣлая отчетъ, слѣдуетъ помѣстить голову на такой высотѣ, чтобы дѣленіе шкалы, ближайшее къ вершинѣ ртутнаго мениска, дѣлило пополамъ изображеніе зрачка наблюдателя. Другой способъ отчета легко понять изъ рис. 217: трубка барометра окружена латунной трубкой, на которой начерченъ и ноніусъ (съ правой стороны дѣленія 1 до 20); въ трубкѣ сдѣланы, другъ противъ друга, два вырѣза, дающіе возможность видѣть верхній конецъ ртутнаго столба. Горизонтальная плоскость, проходящая черезъ верхніе края вырѣзовъ, должна касаться ртутнаго мениска.

Указаннымъ способомъ дѣлается отчетъ въ переносномъ барометрѣ Fortin'а, изображенномъ на рис. 218 въ томъ положеніи, въ которомъ онъ устанавливается при наблюденіяхъ; на рис. 219 изображенъ разрѣзъ его нижней части, замѣняющей чашечку. Она закрыта со всѣхъ сторонъ; уровень ртути приводится передъ каждымъ наблюденіемъ къ одной и той же высотѣ, а именно до соприкосновенія съ нижнимъ остріемъ A костяного стерженька. Дно сосуда, содержащаго ртуть, представляетъ мѣшокъ изъ замши, который можно поднимать и опускать, вращая винтъ Q. Около BB находится замшевое кольцо, плотно обхватывающее съуженную часть стеклянной трубки. Это кольцо не даетъ ртути вытечь, когда она при перевозкѣ наполняетъ сосудъ до верху, но пропускаетъ воздухъ, такъ что давленіе на ртуть всегда равно внѣшнему атмосферному давленію. Ноль шкалы находится у острія A. Когда приходится перевозить барометръ Fortin'а, вращаютъ винтъ Q такъ, чтобы замшевый мѣшокъ приподнялся. Весь воздухъ, находящійся внутри сосуда надъ ртутью, выйдетъ черезъ замшевое кольцо; ртуть сперва наполнитъ сосудъ и затѣмъ поднимется въ трубкѣ, заполняя бывшую надъ нею Торричелліеву пустоту.

Когда вся трубка наполнена ртутью, то лицо, вращающее винтъ Q, почувствуетъ сопротивленіе дальнѣйшему вращенію и тогда барометръ можно безопасно перевозить въ любомъ положеніи.

Въ сифонныхъ барометрахъ ртуть находится въ двухъ, параллельно другъ другу расположенныхъ колѣнахъ трубки, напоминающей перевернутый сифонъ; короткое колѣно сообщается съ внѣшнимъ воздухомъ. Измѣряется разность высотъ ртути въ двухъ колѣнахъ, которыя должны имѣть одинаковую ширину, чтобы волосность производила одинаковое давленіе на обѣ поверхности ртути, вслѣдствіе чего ея вліяніе уничтожается. На

Рис. 215.

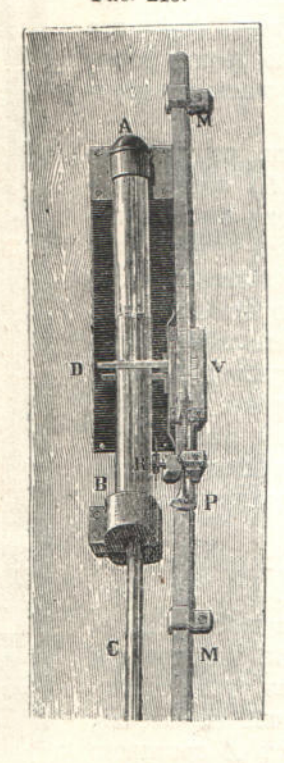


Рис. 216.

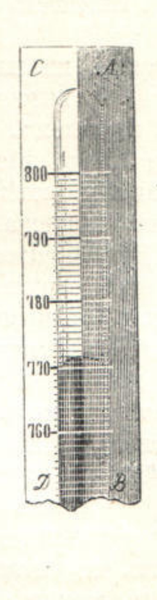


Рис. 217.

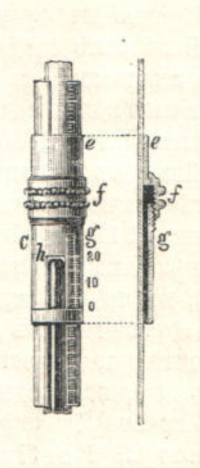


рис. 220 изображенъ слѣва сифонный барометръ Gay-Lussac'а (шкала не изображена); короткая трубка сверху также закрыта, но сбоку въ a оставлено небольшое отверстіе для доступа воздуха. Въ серединѣ изображенъ тотъ же барометръ въ положеніи, удобномъ для перевозки; ртуть не вытекаетъ изъ узкаго канала, находящагося на нижнемъ (при обыкновенномъ положеніи) концѣ длинной трубки. Чтобы воздуху не дать возможность проникнуть въ пустоту, Bunten предложилъ длинную часть барометра оканчивать волосною трубкою, доходящей почти до нижняго конца расширенной части d (на рис. 220 изображена съ правой стороны только нижняя часть барометра), въ которой и остается воздухъ, проникшій черезъ нижній изгибъ сифоннаго барометра.

Къ сифоннымъ относится и барометръ Вильда-Фюсса (Wild-Fuess). нынѣ весьма распространенный въ Россіи и за границей. Онъ изображенъ на рис. 221, слѣва верхняя часть, справа нижняя въ увеличенномъ масштабѣ. Цилиндръ C наполненъ ртутью; она снизу поддерживается кожанымъ мѣшечкомъ, который можно поднимать и опускать вращеніемъ винта G. Въ цилиндръ входятъ двѣ трубки: широкая B, оканчивающаяся расширеніемъ O, отдѣленнымъ впрочемъ особой перегородкой (нѣсколько выше S), и узкая трубка A, расположенная сбоку; пересѣкая расширеніе O, въ которое она впаяна, она изгибается и затѣмъ дѣлается одинаковой

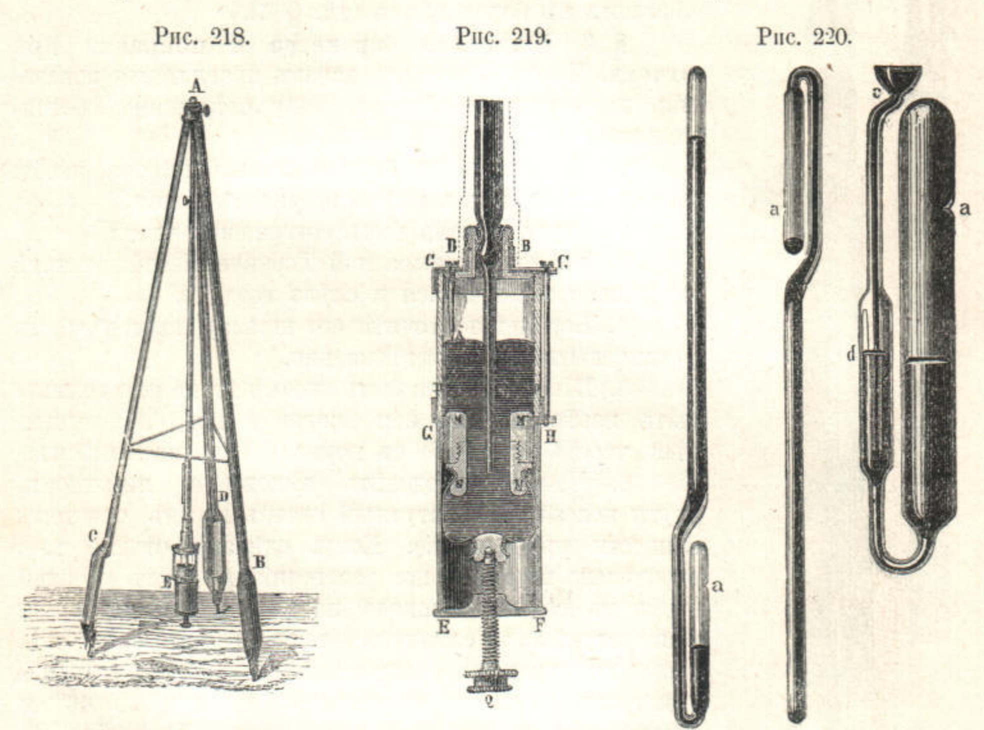
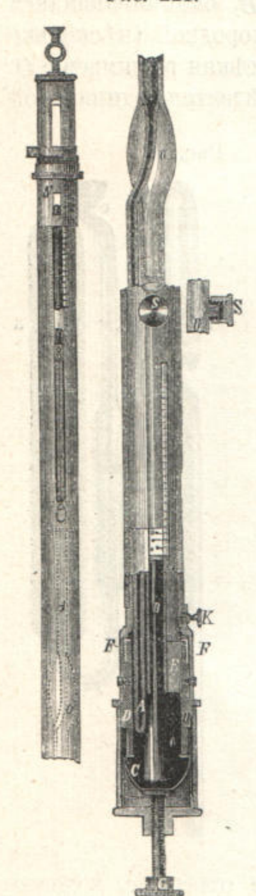


Рис. 218. Рис. 219. Рис. 220.

ширины съ трубкою B; эта послѣдняя имѣетъ боковое отверстіе, которое можетъ быть закрыто колпачкомъ S, отдѣльно изображеннымъ сбоку. На внѣшней латунной трубкѣ нанесено дѣленіе, нуль котораго находится внизу. При отчетѣ барометра приводятъ сперва уровень ртути въ трубкѣ B до высоты нижняго края маленькой пластинки, на которой проведены три черты, служащія для правильной установки самой пластинки; тогда уровень ртути въ B находится на высотѣ нулевого дѣленія шкалы. Затѣмъ перемѣщаютъ кольцо N вверхъ или внизъ, устанавливая его такъ, чтобы край N прорѣза находился на высотѣ уровня мениска ртути, и дѣлаютъ отчетъ по ноніусу. Когда приходится перевозить барометръ со ртутью, то завинчиваютъ G, пока ртуть не наполнитъ трубки A до верху и трубки B до бокового отверстія, которое затѣмъ закрываютъ навинчиваніемъ колпачка S.

Вѣсовой барометръ изображенъ на рис. 222; его трубка подвѣшена къ одному изъ концовъ коромысла вѣсовъ. Давленіе на точку A опредѣляется вѣсомъ всей ртути, находящейся надъ уровнемъ BB, если, конечно, не считать вѣса стеклянной трубки и верхней металлической оправы. Измѣненія давленія воздуха обнаруживаются или измѣненіемъ груза, который на другомъ концѣ коромысла необходимъ для его уравновѣшиванія, или величиною измѣняющагося наклона этого коромысла. Принципъ вѣсоваго барометра примѣняется главнымъ образомъ въ барографахъ (см. § 5).

Рис. 221.



§ 3. Установка барометра и поправки при отчетѣ. Чтобы барометръ давалъ правильныя показанія, необходимо имѣть въ виду слѣдующія обстоятельства:

1. Трубка должна быть настолько широка, чтобы волосность не могла имѣть вреднаго вліянія.

2. Ртуть должна быть совершенно чиста.

3. Въ такъ называемой Торричелліевой пустотѣ не должно заключаться и слѣда воздуха.

4. Барометръ (точнѣе его шкала) долженъ быть установленъ строго вертикально.

5. Шкала должна быть вполнѣ точна или должны быть извѣстны для нея поправки при 0°, полученныя черезъ сравненіе съ нормальнымъ масштабомъ.

6. Чтобы преодолѣть нѣкоторую инертность ртути полезно весь ртутный столбъ передъ отчетомъ привести въ движеніе. Когда сдѣланъ отчетъ, т.-е. опредѣлено вертикальное разстояніе H двухъ уровней ртути въ дѣленіяхъ шкалы на данномъ мѣстѣ и при температурѣ t^0, то слѣдуетъ ввести рядъ поправокъ, чтобы получить мѣру атмосфернаго давленія въ миллиметрахъ ртутнаго столба при 0°, широтѣ 45° и уровнѣ океана. Эти поправки суть слѣдующія:

I. Приведеніе ртутнаго столба къ 0°. Коеффиціентъ объемнаго расширенія ртути равенъ $\beta = 0{,}000181$; таковъ-же коеффиціентъ измѣненія плотности ртути и измѣненія высоты ртутнаго столба, производящаго на единицу площади своего основанія данное давленіе. Первая поправка даетъ вмѣсто H величину

$$H_0 = \frac{H}{1+\beta t}.$$

II. Приведеніе шкалы къ 0°. Предполагается, что поправки дѣленій шкалы при 0° извѣстны. Коеффиціентъ расширенія шкалы обозначимъ черезъ γ; для латуни $\gamma = 0{,}000019$, для стекла и для платины $\gamma = 0{,}000009$. Вслѣдствіе расширенія шкалы получается отчетъ слишкомъ

малый. Новая поправка будетъ $H_0 = H(1+\gamma t)$. Соединяя ее съ первой, получаемъ

$$H_0 = \frac{H(1+\gamma t)}{1+\beta t} = H[1-(\beta-\gamma)t] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Существуютъ готовыя таблички для величины $H(\beta-\gamma)t$ при различныхъ H и t для латунной шкалы. При $H = 760$ мм. и $t = 20^\circ$ эта поправка равна 2,46 мм., при стеклянной шкалѣ 2,60 мм.; эту поправку слѣдуетъ вычесть изъ наблюденнаго H, когда $t > 0^\circ$.

III. Поправка на депрессію (пониженіе) ртути, вызванную капилярностью. Эта поправка зависитъ отъ ширины трубки (отъ высоты мениска); въ сифонныхъ барометрахъ ширина трубки можетъ быть и не одинаковою въ двухъ колѣнахъ. Эта поправка также приводится въ табличкахъ и ею можно вообще пренебречь, когда ширина трубки не менѣе 16 мм.

Рис. 222.

IV. Поправка на измѣненіе силы тяжести съ высотою и широтою мѣста. Соотвѣтственно (22) стр. (332) имѣемъ

$$H_0 = H(1-0{,}00259\cos 2\varphi - 0{,}00000000314h) \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ φ широта мѣста, h его высота въ метрахъ надъ поверхностью земли. Если наблюденія производятся на плоскогоріи, то число 314 замѣняется числомъ 196. Поправка на широту равна примѣрно 2 мм. на полюсахъ и на экваторѣ; въ Петербургѣ она около 1 мм.

V. Поправка на давленіе ртутныхъ паровъ; это весьма малая величина, которая при 20° составляетъ 0,02 мм., при 40° — 0,03 мм.

VI. Приведеніе къ уровню моря. Эту поправку не слѣдуетъ вводить, когда требуется знать величину атмосфернаго давленія въ данномъ мѣстѣ. Ее вводятъ въ метеорологіи, когда желаютъ сравнить давленія въ различныхъ мѣстахъ обширной области. Она вычисляется по гипсометрическимъ формуламъ, связывающимъ давленіе воздуха съ высотою надъ уровнемъ океана.

Барометръ, въ которомъ съ величайшею осмотрительностью приняты всѣ мѣры для полученія величины атмосфернаго давленія съ крайнею достижимою точностію, называется нормальнымъ барометромъ. Два такихъ барометра устроены напр. въ Главной Физической Обсерваторіи въ Петербургѣ; одинъ находится въ Константиновской обсерваторіи въ Павловскѣ и одинъ въ Главной Палатѣ Мѣръ и Вѣсовъ въ Пететербургѣ.

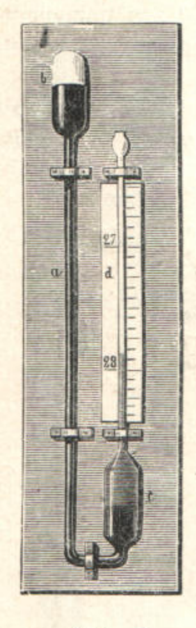
§ 4. Барометры съ другими жидкостями и барометры металлическіе. Для увеличенія чувствительности барометра замѣняли ртуть водою или глицериномъ. Барометръ съ глицериномъ имѣетъ высоту въ 8,22 метра и слѣд. онъ болѣе, чѣмъ въ 10 разъ чувствительнѣе барометра ртутнаго.

Барометръ смѣшанный изображенъ на рис. 223: часть bac наполнена

ртутью, часть dc водою. Понятно, что измѣненія уровней въ b и c вызовутъ увеличенныя перемѣщенія водяного столба въ тонкой трубкѣ d.

Д. И. Менделѣевъ построилъ весьма чувствительный нефтяной дифференціальный или относительный барометръ, дающій возможность измѣрить разность давленій въ двухъ точкахъ, вертикальное разстояніе которыхъ не болѣе 1 метра. Двѣ интересныя формы нефтяного барометра предложилъ П. Рейнботъ.

Рис. 223.



На рис. 224 изображенъ металлическій барометръ Bourdon'а. Главная его часть металлическая изогнутая тонкостѣнная трубка CAB съ эллиптическимъ сѣченіемъ, закрѣпленная въ A; изъ нея выкачанъ воздухъ. При увеличеніи или уменьшеніи внѣшняго давленія концы C и B соотвѣтственно сближаются или расходятся; эти движенія передаются концамъ стерженька DE, соединеннаго съ дугою, снабженною зубчиками, которые сцѣплены съ маленькимъ зубчатымъ колесомъ G; къ этому колесу прикрѣплена стрѣлка HI. Шкала наносится путемъ сравненія показаній прибора съ показаніями ртутнаго барометра.

Въ т. наз. анероидахъ Vidi, усовершенствованныхъ Breguet'омъ трубка замѣнена круглой металлической коробкой, изъ которой выкачанъ воздухъ. Желобчатое дно коробки выгибается или вдавливается, когда мѣняется внѣшнее давленіе. Рядъ рычаговъ и цѣпочекъ передаетъ движенія этого дна стрѣлкѣ.

§ 5. Барографъ. Приборы самопишущіе, болѣе или менѣе непрерывно записывающіе измѣненія атмосфернаго давленія, называются барографами. Существуютъ ртутные барографы, въ которыхъ движенія поплавка, находящагося въ открытомъ колѣнѣ сифоннаго барометра, передаются довольно сложнымъ механизмомъ карандашу, который перемѣщается влѣво или вправо, касаясь бумаги, движущейся сверху внизъ. Вѣсовой барометръ (стр. 368) можетъ служить для устройства барографа; пишущее остріе находится на концѣ длинной стрѣлки, прикрѣпленной къ коромыслу вѣсовъ. Такой барографъ находится въ Константиновской обсерваторіи въ Павловскѣ.

Весьма распространенъ барографъ Richard'а, изображенный на рис. 225. Его главная часть состоитъ изъ ряда наложенныхъ другъ на друга коробокъ, по устройству напоминающихъ коробку анероида. Верхняя крышка послѣдней коробки перемѣщается довольно значительно, когда мѣняется величина атмосфернаго давленія. Движенія передаются помощью системы рычаговъ острію карандаша или пера, перемѣщающемуся вверхъ и внизъ и чертящему кривую линію на поверхности равномѣрно вращающагося цилиндра, покрытаго разграфленой бумагой. Изъ рисунка понятно, какимъ образомъ отмѣчается время и величина давленія. Когда цилиндръ, приводимый въ движеніе особымъ часовымъ механизмомъ, сдѣлаетъ одинъ полный оборотъ, то слѣдуетъ снять съ его поверхности бумагу и замѣнить ее

новою. Замѣчательный по своей чувствительности вѣсовой барографъ былъ устроенъ К. Краевичемъ.

§ 6. Предѣлы измѣненія барометрическаго давленія. Мы не затрогиваемъ двухъ вопросовъ, какъ не относящихся непосредственно къ курсу физики: вопроса о причинахъ колебаній атмосфернаго давленія и вопроса о примѣненіи барометра къ измѣренію высотъ (гипсометрія). Первый изъ этихъ вопросовъ разсматривается въ метеорологіи, второй въ геодезіи.

Ограничиваемся указаніемъ на предѣлы, въ которыхъ колеблется атмосферное давленіе въ нѣкоторыхъ городахъ Россіи; это интересно въ виду

Рис. 224.

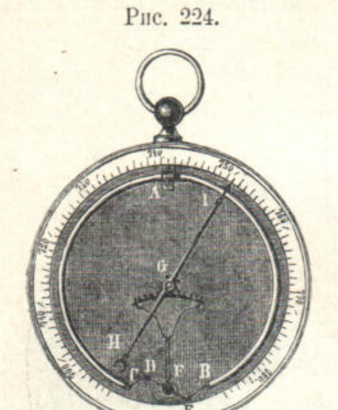
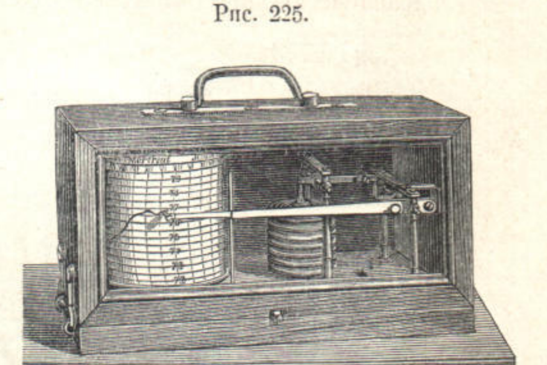


Рис. 225.



зависимости точки кипѣнія жидкостей, въ особенности воды отъ внѣшняго давленія. Данныя заимствуемъ изъ статьи А. Тилло.

Города.	Число лѣтъ наблюденій.	Наибольшее давленіе.	Наименьшее давленіе.	Разность.
Архангельскъ. . . .	40 лѣтъ	791,4 мм.	712,7 мм.	78,7 мм.
С.-Петербургъ. . . .	55 »	797,5 »	712,6 »	84,9 »
Москва	55 »	795,8 »	724,9 »	70,9 »
Екатеринбургъ . . .	55 »	796,8 »	725,8 »	71,0 »
Николаевъ.	55 »	787,5 »	737,0 »	50,5 »
Тифлисъ	46 »	784,3 »	746,5 »	37,8 »
Богословскъ	55 »	794,8 »	711,3 »	83,5 »

§ 7. Манометры. Приборы, служащіе для измѣренія упругости газовъ и паровъ называются манометрами. Съ нѣкоторыми изъ нихъ мы уже встрѣчались, напр. въ опытахъ Cailletet и Amagat (стр. 356). Смотря по величинѣ измѣряемаго давленія употребляютъ манометры весьма различнаго устройства.

Для давленій весьма слабыхъ употребляютъ укороченный барометръ или бароманометръ; это *U*-образная трубка, одно колѣно которой, содержащее немного ртути, соединено съ изслѣдуемымъ пространствомъ, а другое до верху наполнено ртутью. При достаточно маломъ давленіи h ртуть

во второмъ колѣнѣ опускается и тогда h измѣряется разностью уровней ртути въ обоихъ колѣнахъ. Такіе манометры находятся при обыкновенныхъ воздушныхъ насосахъ.

Для давленій, немного отличающихся отъ атмосфернаго, употребляется открытая U-образная трубка, въ которую налита ртуть до половины колѣнъ. Измѣряемое давленіе $h = H + h'$, гдѣ H давленіе атмосферное, h' разность высотъ ртути въ колѣнахъ трубки.

Для измѣренія весьма сильныхъ давленій можетъ служить манометръ Desgoffe'а, изображенный на рис. 226, и представляющій какъ бы обращенный гидравлическій прессъ. Испытуемое давленіе дѣйствуетъ черезъ трубку

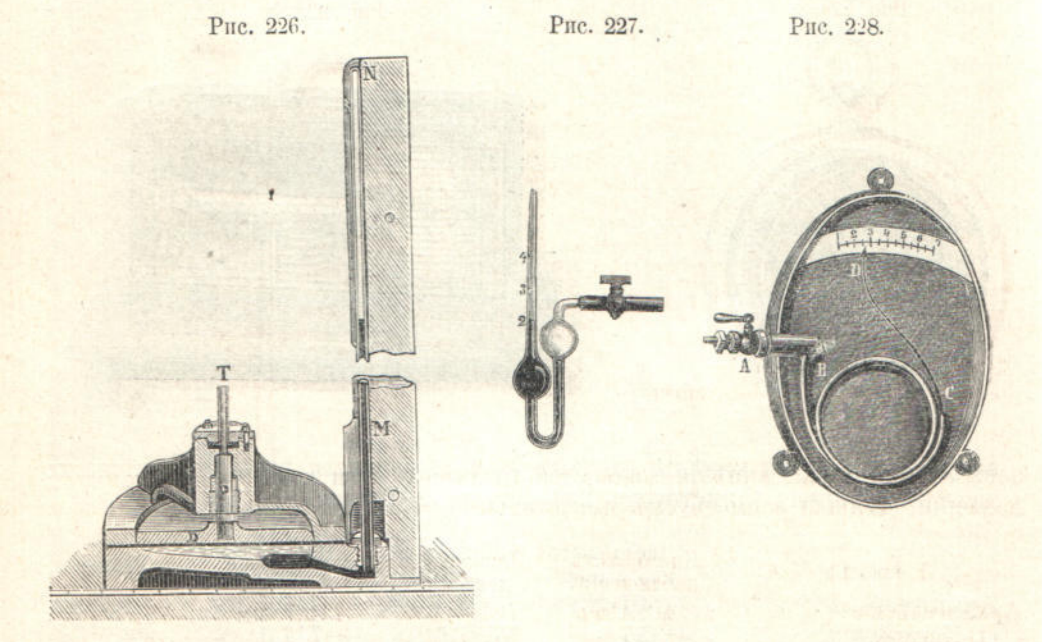


Рис. 226. Рис. 227. Рис. 228.

T на стальной цилиндръ P, оканчивающійся широкой пластинкой D. Подъ D находится большая каучуковая пластинка, вполнѣ закрывающая короткое колѣно манометра, содержащаго воду, а подъ нею ртуть, которая вдавливается въ открытое сверху колѣно MN. Пусть h высота ртути въ MN, H измѣряемое давленіе, s площадь сѣченія цилиндра P, S площадь пластинки D. Тогда $H = h\frac{S}{s}$. Если $S = 100\,s$, то можно огромное давленіе измѣрять сравнительно невысокимъ столбомъ ртути.

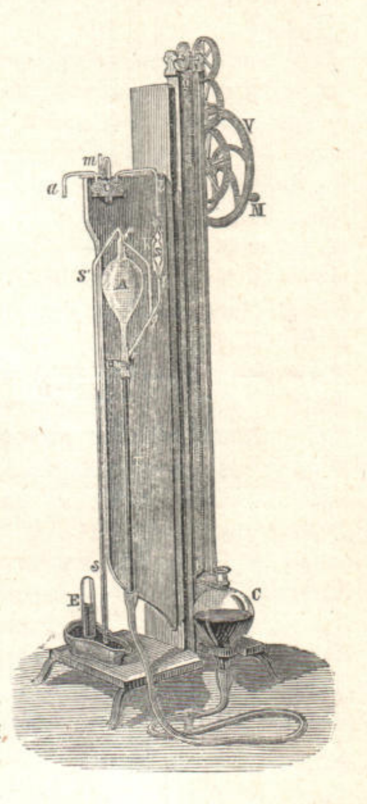
Для сильныхъ давленій можетъ служить закрытый манометръ вродѣ того, которымъ пользовался Cailletet; онъ наполненъ воздухомъ, по уменьшенію объема котораго и судятъ объ измѣряемомъ давленіи. Для сохраненія одинаковой чувствительности и при болѣе сильныхъ давленіяхъ, съуживаютъ трубку къ ея закрытому концу. Такой манометръ изображенъ на рис. 227. Числа обозначаютъ давленіе въ атмосферахъ.

Весьма распространенъ металлическій манометръ Bourdon'а,

основанный на томъ же принципѣ, какъ и его барометръ (стр. 370). Онъ изображенъ на рис. 228. Изогнутая латунная трубка BC снабжена на закрытомъ концѣ стрѣлкою CD; открытый конецъ соединенъ черезъ трубку A, снабженную краномъ, съ изслѣдуемымъ пространствомъ. Чѣмъ больше давленіе въ этомъ пространствѣ, тѣмъ болѣе трубка BC раскручивается, причемъ конецъ D стрѣлки перемѣщается вдоль шкалы, дѣленія которой наносятся по сравненію съ ртутнымъ или другимъ провѣреннымъ манометромъ.

§ 8. Ртутные насосы. Устройство обыкновенныхъ выкачивающихъ и нагнетательныхъ насосовъ извѣстно изъ начальнаго курса физики. Разсмотримъ устройство нѣкоторыхъ ртутныхъ насосовъ, получившихъ въ настоящее время весьма широкое примѣненіе.

Рис. 229.



На рис. 229 изображенъ одинъ изъ видовъ ртутнаго насоса. Большой грушевидный сосудъ A соединенъ при помощи каучуковой трубки съ сосудомъ C, который при помощи цѣпи PQ, ряда зубчатыхъ колесъ и рукоятки M можетъ быть приподнятъ выше точки p и опущенъ до положенія, показаннаго на рисункѣ. Трубка T и сосудъ C содержатъ ртуть. Пространство, изъ котораго желаютъ выкачать воздухъ, соединяется съ концомъ a трубки $attq$. На пути этой трубки находятся расширенныя части U и K; U содержитъ вещества, поглощающія водяные пары и маленькій бароманометръ m, дающій возможность судить о степени достигнутаго разрѣженія. Въ расширеніи K находится стеклянная подвижная часть S, не дающая ртути проникнуть выше K; ея верхняя, тщательно отшлифованная часть вполнѣ закрываетъ верхнее отверстіе расширенія K, когда подступающая черезъ qt ртуть поднимаетъ ее вверхъ. Двѣ трубки pq и rq соединяютъ трубку att съ сосудомъ A, отъ котораго идетъ еще трубка ss'; черезъ послѣднюю выгоняется выкачанный газъ, который можно обыкновеннымъ способомъ собрать надъ ртутью въ цилиндрѣ E.

Положимъ, что сначала въ a и A имѣемъ атмосферное давленіе. Поднимаемъ C; тогда ртуть, поднявшись по T и дойдя до q, прекратитъ сообщеніе между A и a; дойдя до t, она подниметъ поплавокъ S и закроетъ верхнее отверстіе расширенія K. Заполняя весь сосудъ A и трубку qp, она выгонитъ весь воздухъ черезъ ss. Затѣмъ опускаемъ C; когда ртуть въ Ktr понизится до q, то возстановится соединеніе между a и A, ртуть понизится до нѣкотораго мѣста въ трубѣ T и въ A перейдетъ часть воздуха (или другого газа) изъ разрѣжаемаго пространства. При новомъ поднятіи C ртуть вновь сперва прерветъ въ q сообщеніе между A и a и затѣмъ

выгонить весь перешедшій въ *A* газъ черезъ трубку *ss*. Повторяя поднимание и опусканіе сосуда *C* можно достичь высокой степени разрѣженія.

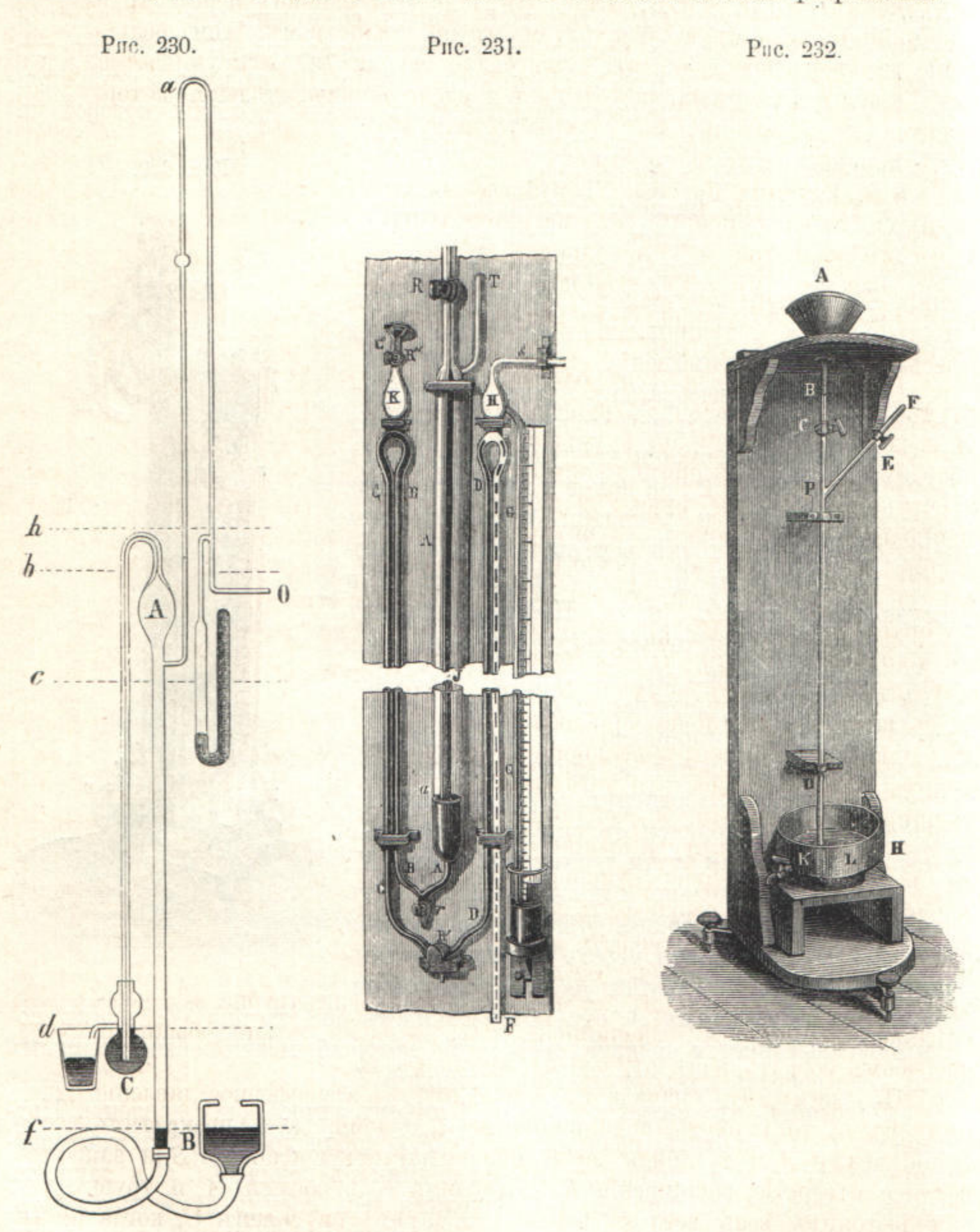


Рис. 230. Рис. 231. Рис. 232.

На рис. 230 изображенъ насосъ Д. И. Менделѣева. Отъ резервуара *A* идетъ внизъ трубка, нижній конецъ которой соединенъ при помощи каучуковой трубки съ сосудомъ *B*, содержащимъ ртуть. Тонкая трубка идетъ отъ верхней части резервуара *A* и оканчивается внутри ртути, содержа-

щейся въ C. Наконецъ трубка aO соединяетъ резервуаръ A съ тѣмъ пространствомъ, изъ котораго желаютъ выкачать воздухъ. Къ нисходящей трубкѣ aO припаянъ манометръ; $bd = 780$ мм. и $cf = 760$ мм. Когда резервуаръ B достаточно поднятъ, то ртуть заполняетъ резервуаръ A, выгоняя воздухъ черезъ C, куда переливается и часть ртути, причемъ ея излишекъ, перешедшій въ d, отъ времени до времени переливается обратно въ B. Если понижать сосудъ B, то воздухъ черезъ Oa переходитъ изъ разрѣжаемаго пространства въ резервуаръ A и затѣмъ выгоняется въ C, причемъ ртуть въ трубкѣ a поднимается на высоту, соотвѣтствующую достигнутому разрѣженію.

Насосъ Sprengel'я, главная часть котораго изображена на рис. 231, основанъ на совершенно другомъ началѣ, а именно на томъ, что отдѣльныя капли ртути, падающія внизъ по узкой трубкѣ, увлекаютъ съ собою попадающій между ними воздухъ. Сухая ртуть спускается изъ резервуара (или воронки), находящагося надъ R по узкой трубкѣ J, оканчивающейся въ нижней части широкой трубки AaA, которая въ T сообщена съ внѣшнимъ воздухомъ. Далѣе ртуть проходитъ трубки BB, CC и DD; послѣдняя въ верхней части съужена и соединена съ H, откуда трубка s ведетъ къ пространству, изъ котораго желаютъ выкачать воздухъ. Далѣе ртуть каплями выливается черезъ длинную трубку FF; краны R и R' служатъ для регулированія быстроты теченія ртути. Между каждыми двумя каплями увлекается часть воздуха изъ H и такимъ образомъ достигается довольно быстро весьма высокая степень разрѣженія, которая измѣряется барометрической трубкой GG, соединенной съ H. Трубки AaA и T и пространство K служатъ для того, чтобы въ нихъ собирался весь воздухъ, могущій попасть черезъ R въ трубку J; такимъ образомъ ртуть въ CC и DD уже не содержитъ воздуха. На рис. 232 изображена простая форма насоса Sprengel'я; ртуть наливается въ воронку A, а трубка F соединяется съ тѣмъ пространствомъ изъ котораго требуется выкачать воздухъ.

Существуютъ и водяные насосы, основанные на томъ же принципѣ.

Интересный «ротаціонный» ртутный насосъ построилъ Schulze-Berge.

Предѣлъ разрѣженія, достижимаго ртутнымъ насосомъ, опредѣлялъ Bessel-Hagen.

ЛИТЕРАТУРА.

Thurot. Note historique sur l'éxperience de Torricelli. J. de phys. (1) 1, p. 171 и вторая статья p. 267.

Torricelli и *Descartes*, письма къ разнымъ лицамъ.

Pascal. Expériences touchant le vide. Paris, 1647 и 1648.

Pascal. Traité de la pesanteur de la masse de l'air. 1663.

Wild. Repert. f. Meteorologie. 3, № 1, 1874.

Краевичъ. Rep. d. Phys. 23, p. 339, 1887; Ж. Ф.-Х. Общ. 9, стр. 319, 1877; 13, стр. 335, 1881.

Л. Рейнботъ. Ж. Ф.-Х. О. 12 стр. 243, 1880.

К. Краевичъ (барометрографъ). Ж. Ф.-Х. О. 14 стр. 213, 1882.

А. Тилло. Метеор. Вѣстникъ. 1894, стр. 1.

Д. Дьяконовъ. Ж. Ф.-Х. О. 14 стр. 476, 1882

Много статей о барометрахъ встрѣчается въ Ztschr. für Meteorologie, въ Ztschr. für Instr.-Kunde и въ другихъ журналахъ.

F. Schulze-Berge. Rotationsluftpumpe. W. A. 50, p. 368, 1893.

Д. И. Менделѣевъ (насосъ). Ж. Ф.-Х. Общ. 6, стр. 120, 1874.

Д. Лачиновъ (насосъ). Ж. Ф.-Х. Общ. 6, стр. 17, 1874.

М. Рытовъ (центробѣжный насосъ) Ж. Ф.-Х. Общ. 14, стр. 10, 1882.

В. Кароводинъ (насосъ Теплера) Ж. Ф.-Х. Общ. 14 стр. 255, 1882.

И. Усагинъ (насосъ Шпренгеля) Ж. Ф.-Х. Общ. 22 стр. 229, 1890.

Bessel-Hagen. W. A. 12 p. 425, 1881.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Соприкосновеніе газовъ съ газами, жидкостями и твердыми тѣлами.

§ 1. Смѣси газовъ съ газами. Законъ Dalton'а. Если газы не дѣйствуютъ химически другъ на друга, то они смѣшиваются во всѣхъ пропорціяхъ; это смѣшеніе, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, происходитъ даже само собою, если соединить сосуды, содержащіе различные газы (глава VI, § 4). Давленіе, производимое смѣсью газовъ, опредѣляется весьма простымъ закономъ Dalton'а: давленіе смѣси нѣсколькихъ газовъ равно суммѣ давленій ея составныхъ частей, т.-е. тѣхъ давленій, которыя каждый изъ газовъ обнаружилъ бы, еслибы онъ одинъ занималъ объемъ, занимаемый смѣсью. Давленія отдѣльныхъ частей смѣси называются парціальными давленіями. Положимъ, что при одинаковой температурѣ t газы сперва отдѣльно занимали объемы $v_1, v_2, v_3, \ldots$ при давленіяхъ $p_1, p_2, p_3, \ldots$; эти газы затѣмъ были смѣшаны при той же температурѣ t въ объемѣ V, въ которомъ они обладали бы парціальными давленіями $P_1 = \frac{p_1 v_1}{V}$, $P_2 = \frac{p_2 v_2}{V}, \ldots$ Законъ Dalton'а гласитъ, что давленіе P смѣси равно

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$$

т.-е.

$$P = \frac{p_1 v_1}{V} + \frac{p_2 v_2}{V} + \frac{p_3 v_3}{V} + \ldots = \sum \frac{pv}{V} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

или

$$PV = \sum pv \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Законъ этотъ приближенный, какъ и законъ Бойля-Маріотта. Если при смѣшеніи не мѣнять объема, занимаемаго газами, т.-е. если $V = \sum v$ и если всѣ p равны между собою, то (2) даетъ $P = p$; т.-е. при смѣшеніи не мѣняется давленіе. Это подтверждается опытомъ Berthollet, который соединилъ два шара, наполненные одинъ водородомъ, другой углекислымъ газомъ при давленіяхъ въ 1 атм.; смѣсь обладала тѣмъ же самымъ давленіемъ.

Когда всѣ v равны между собою и равны V, то $P=\sum p$.

Формулу (1) можно переписать въ видѣ

$$V=\sum \frac{p}{P} v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

обозначающемъ, что объемъ смѣси равенъ суммѣ тѣхъ объемовъ, которые были бы заняты составными частями при давленіи P смѣси.

Важный вопросъ объ отношеніи смѣси газовъ къ закону Бойля-Маріотта при сильныхъ давленіяхъ еще мало разработанъ. Изслѣдованія Regnault надъ смѣсью воздуха и CO_2 показали, что для нея законъ Dalton'а остается вѣренъ въ предѣлахъ отъ 1 до 2 атмосферъ. Однако позже Andrews и Cailletet нашли, что для всякой смѣси газовъ существуетъ особый законъ измѣненія объема при большихъ давленіяхъ, который не можетъ быть выведенъ изъ законовъ, управляющихъ сжимаемостью составныхъ частей.

Не вдаваясь въ дальнѣйшія подробности о законѣ Dalton'a, ограничиваемся обстоятельнымъ указаніемъ литературы въ концѣ этой главы.

§ 2. Растворимость газовъ въ жидкостяхъ. Когда газъ находится въ соприкосновеніи съ жидкостью, то часть газа въ ней растворяется. Количество газа, могущее раствориться въ жидкости, имѣетъ нѣкоторый предѣлъ; когда онъ достигнутъ, то мы говоримъ, что жидкость насыщена газомъ. Этотъ предѣлъ зависитъ отъ рода и объема жидкости, отъ рода и давленія газа, остающагося нерастворенными надъ жидкостью и отъ температуры; его достиженіе ускоряется, если сильно встряхивать сосудъ, содержащій жидкость и газъ. Количество растворимаго газа опредѣляется закономъ Henry.

Законъ Henry (1803): Количество газа, растворимаго при данной температурѣ въ единицѣ объема жидкости, пропорціонально давленію газа, остающагося нерастворенныхъ.

Пусть U объемъ жидкости, P давленіе оставшагося газа, Q вѣсовое количество растворенная газа, v объемъ, который занималъ бы этотъ газъ при давленіи P. Законъ Henry говоритъ, что

$$\frac{Q}{U}=kP \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ k постоянное число, т.-е. зависящее уже только отъ рода газа и жидкости и отъ температуры. Но съ другой стороны Q пропорціонально v и P, т.-е. можно положить

$$Q=k_1 vP \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Сравнивая это съ $Q=kUP$, см. (4), и полагая $\frac{k}{k_1}=\alpha$, получаемъ

$$v=\alpha U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ α новая постоянная; (6) показываетъ, что объемъ растворенная

газа не зависитъ отъ его давленія P, разумѣя тотъ объемъ, который онъ бы занялъ подъ давленіемъ P.

Величина

$$\alpha = \frac{v}{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

т.-е. отношеніе объема раствореннаго газа (при давленіи нерастворѳннаго) къ объему жидкости есть величина постоянная при данной температурѣ, она называется коэффиціентомъ растворимости даннаго газа въ данной жидкости.

Обозначимъ черезъ p упругость раствореннаго газа при занимаемомъ имъ объемѣ U; имѣемъ $pU = Pv$, откуда $v = \frac{pU}{P}$; вставляя это въ (7), находимъ

$$\alpha = \frac{p}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

т.-е. отношеніе упругости раствореннаго газа къ упругости нерастворѳннаго есть величина постоянная при данной температурѣ; она также равна коэффиціенту растворимости.

Если до растворенія газъ занималъ объемъ V_1 при давленіи P_1, а послѣ растворенія остающаяся часть газа объемъ V при давленіи P, а растворенная заняла бы объемъ v при давленіи P, то по закону Б.-М. имѣемъ, см. (6),

$$V_1 P_1 = (V + v)P = VP + vP = VP + \alpha UP.$$

Отсюда коэффиціентъ растворимости

$$\alpha = \frac{1}{U}\left(V_1 \frac{P_1}{P} - V\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

§ 3. Приборы, служащіе для изслѣдованія растворимости газовъ въ жидкостяхъ. Такіе приборы называются абсорбціометрами. На рис. 233 изображенъ абсорбціометръ Bunsen'a. Стеклянная трубка e, снабженная дѣленіями и тщательно калиброванная, закрыта сверху, а внизу вдѣлана въ винтовую нарѣзку b (см. справа отдѣльный рисунокъ), которой соотвѣтствуетъ гайка въ верхней изъ двухъ пластинокъ a; нижняя пластинка a покрыта каучукомъ, такъ что, вращая трубку въ ту или другую сторону, можно нижній ея конецъ открыть, или закрыть, плотно прижимая его къ каучуку. Если ее вставить въ цилиндръ g, то выступы cc (см. рисунокъ справа) входятъ въ боковыя углубленія, находящіяся внутри f, вслѣдствіе чего вращеніе трубки e не вызываетъ вращенія нижней оправы aa. Цилиндръ g наполняется водою, температура которой измѣряется термометромъ k; внизу наливается немного ртути черезъ воронку r, а нижній кранъ r служитъ для ея выпусканія.

Внѣ цилиндра g наполняютъ всю трубку e ртутью и надъ ртутною ванною впускаютъ въ нее объемъ V_1 газа; отмѣчаютъ его давленіе P_1;

затѣмъ впускаютъ объемъ U жидкости и, закрывъ нижній конецъ, какъ указано выше, вставляютъ трубку во внутрь цилиндра g; наконецъ закрываютъ крышку p, въ углубленіе которой упирается верхній конецъ трубки. Далѣе подвергаютъ весь приборъ такъ долго встряхиваніямъ, пока при открываніи нижняго конца трубки уровень b ртути не перестанетъ подниматься, т.-е. не прекратится дальнѣйшее раствореніе газа. Остается опредѣлить объемъ V оставшагося газа и давленіе P, подъ которымъ онъ находится. Давленіе P легко найти, зная величину атмосфернаго давленія и высоты уровней

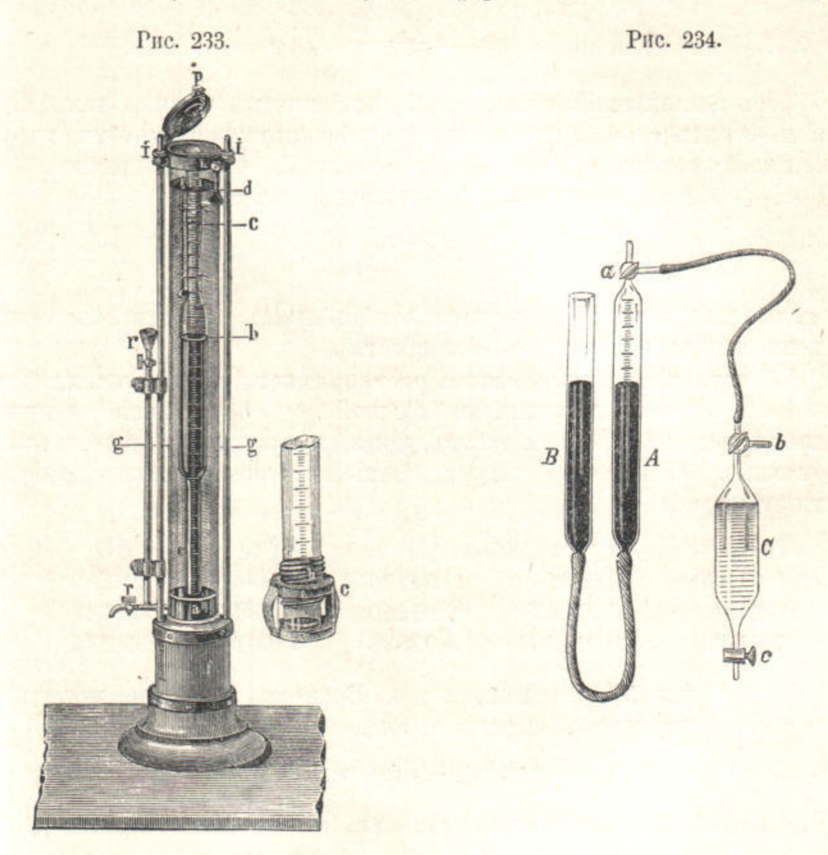


Рис. 233. Рис. 234.

ртути въ a и b, воды въ d и взятой жидкости въ c. Зная V, V_1, U, P_1 и P, находимъ α по формулѣ (9).

Гораздо болѣе простой приборъ изображенъ на рис. 234. Его устройство понятно изъ рисунка; достаточно прибавить, что C наполняется испытуемой жидкостью, что трубка, идущая отъ a наверхъ, соединяется съ резервуаромъ испытуемаго газа и что въ a и налѣво отъ b находятся краны съ тремя каналами ($\perp$). Сперва ртуть наполняетъ всю калиброванную трубку A, а жидкость весь сосудъ C. Затѣмъ поворачиваютъ два крана такъ, чтобы только соединительная трубка ab наполнилась газомъ; далѣе соединяютъ A съ резервуаромъ газа и, опуская B, заставляютъ въ A войти

объемъ v_1 газа, причемъ уровень ртути въ A и B удерживается на одинаковой высотѣ; соединяютъ A съ C и выливаютъ черезъ c объемъ V жидкости. Встряхиваютъ при закрытомъ кранѣ b сосудъ C, пока уровень ртути въ A не перестанетъ подниматься и перемѣщаютъ B такъ, чтобы уровень ртути въ A и B былъ на одинаковой высотѣ. Пусть v_2 объемъ газа, оставшагося въ сосудѣ A.

Если V' емкость сосуда C, то объемъ U жидкости равенъ $U = V' - V_0$. Давленія P и P_1 въ (9) равны между собою, и слѣд. (9) даетъ

$$\alpha = \frac{V_1 - V}{U}.$$

$V_1 - V$ есть исчезнувшій объемъ газа; въ нашемъ случаѣ газъ сначала занималъ объемъ $v_1 + w$, гдѣ w емкость соединительной трубки; въ концѣ онъ занимаетъ объемъ $v_2 + w + V_0$, а потому $V_1 - V$ здѣсь равно $v_1 + w - (v_2 + w + V_0) = v_1 - v_2 - V_0$. Окончательно имѣемъ

$$\alpha = \frac{v_1 - v_2 - V_0}{V' - V_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

[v_1 и v_2 объемы газа въ A въ началѣ и въ концѣ; V' емкость сосуда C; V_0 объемъ выпущенной черезъ c жидкости].

§ 4. Результаты изслѣдованій растворимости газовъ въ жидкостяхъ. Bunsen и его ученики произвели большой рядъ опредѣленій величины α для различныхъ жидкостей и газовъ. Оказывается, что α уменьшается съ повышеніемъ температуры. Вотъ нѣкоторыя числа α для растворимости въ водѣ:

t^0	H	N	O	CO_2	SO_2	NH_3
0°	0,01930	0,02035	0,04114	1,7967	79,789	1050
10°	0,01930	0,01607	0,03250	1,1847	56,647	813
20°	0,01930	0,01403	0,02838	0,9014	39,374	654

При 70° для NH_3 имѣемъ $\alpha = 0$. Величина α вообще можетъ быть представлена эмпирической формулой вида

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 t + \alpha_2 t^2.$$

Числа перваго ряда и суть величинъ α_0. Оказывается, что для различныхъ газовъ отношеніе $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ есть величина, мѣняющаяся въ довольно тѣсныхъ предѣлахъ (отъ нѣкотораго значенія до удвоеннаго), между тѣмъ какъ α_0 измѣняется въ широкихъ предѣлахъ (какъ числа 1 до 4000). На это обстоятельство указалъ Э. Видеманъ.

Для растворимости въ алкоголѣ Бунзенъ нашелъ

H . . . . . $\alpha = 0{,}06925 - 0{,}0001487t + 0{,}000001t^2$

N . . . . . $\alpha = 0{,}126338 - 0{,}000418t + 0{,}000006t^2$

O . . . . . $\alpha = 0{,}2825$

CO_2 . . . . $\alpha = 4{,}32955 - 0{,}09395t + 0{,}00124t^2$

SO_2 . . . . $\alpha = 328{,}62 - 16{,}95t + 0{,}312t^2$.

Растворимость хлора въ водѣ имѣетъ максимумъ при 8°. Въ литрѣ H_2O растворяются 40 куб. см. аргона при 12° — 14°, т.-е. въ $2^1/_2$ раза больше, чѣмъ азота.

Наименьшею растворимостью въ водѣ обладаетъ гелій; α для него при 18°,2 равно 0,0073.

Сѣченовъ нашелъ, что растворимость газовъ въ водѣ, содержащей растворенныя соли, меньше, чѣмъ въ водѣ чистой. Это же самое подтвердилъ Kumpf для растворимости хлора въ растворѣ поваренной соли и Steiner для водорода въ растворахъ различныхъ солей.

При сильныхъ давленіяхъ и для хорошо растворимыхъ газовъ замѣчаются весьма сильныя отступленія отъ закона Henry. Такъ при 20° въ одномъ граммѣ воды растворяется амміакъ при давленіи $h = 100$ мм. въ количествѣ $q = 0{,}158$ гр.; при $h = 200$ мм. имѣемъ $q = 0{,}232$ гр.; при $h = 500$ мм. — $q = 0{,}403$ гр.; при $h = 1000$ мм. — $q = 0{,}613$ гр. и при $h = 2000$ мм. всего только $q = 0{,}992$ гр. Для CO_2 коеффиціентъ α при постоянной температурѣ уменьшается, когда давленіе ростетъ, какъ показалъ Wroblewski (1882). При 0° и давленіи $p = 1$ атм. мы имѣли $\alpha = 1{,}797$; оказывается, что при $p = 5$ атм. — $\alpha = 1{,}730$; при $p = 10$ атм. — — $\alpha = 1{,}603$; при $p = 20$ атм. — $\alpha = 1{,}332$ и при $p = 30$ атм. — $\alpha = 1{,}124$.

Richard построилъ приборъ, при помощи котораго оказалось возможнымъ доказать, что въ водѣ, находящейся въ океанѣ на значительной глубинѣ и слѣдовательно подъ большимъ давленіемъ, растворено такое же количество газа, какъ и въ поверхностныхъ слояхъ.

Объемъ жидкости при раствореніи въ ней газа всегда увеличивается; плотность иногда увеличивается, иногда уменьшается. Этимъ вопросомъ занимались Angstroem, Bluemke, Mackenzie, Nichols, Wheeler и др.

При раствореніи газовъ въ жидкостяхъ весьма часто выдѣляется больше тепла, чѣмъ при ихъ ожиженіи (скрытая теплота испаренія); отсюда слѣдуетъ, что раствореніе нерѣдко сопровождается химическими процессами, усложняющими это явленіе.

При раствореніи смѣсей газовъ объемы $v_1, v_2 \ldots$ растворяющихся отдѣльныхъ частей смѣси пропорціональны парціальнымъ давленіямъ $p_1, p_2 \ldots$ и пропорціональны коеффиціентамъ растворимости. Итакъ

$$v_1 : v_2 : v_3 : \ldots = p_1\alpha_1 : p_2\alpha_2 : p_3\alpha_3 : \ldots \qquad (11)$$

Для воздуха при 0° имѣемъ: для азота $p_1 = 0.7904h$, для кислорода $p_2 = 0.2096h$, гдѣ h атмосферное давленіе; далѣе при 0° для азота $\alpha_1 = 0.2035$, для кислорода $\alpha_2 = 0{,}04114$. Отсюда отношеніе объемовъ азота v_1 и кислорода v_2, растворенныхъ въ водѣ,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{0.7904 \times 0{,}2035}{0{,}2096 \times 0{,}04114} = \frac{0{,}016151}{0{,}008625} = 1{,}87 \qquad (12)$$

Коеффиціентъ растворимости воздуха при 0° въ водѣ равенъ $\alpha = 0{,}08625 + 0{,}016151 = 0{,}024776$. Изъ (12) слѣдуетъ, что растворенный воздухъ содержитъ 34% O и 66% N.

§ 5. Выдѣленіе растворенныхъ газовъ изъ жидкостей. Растворенные газы выдѣляются изъ жидкостей при слѣдующихъ условіяхъ:

1. При уменьшеніи давленія нерастворѣннаго газа, оставшагося надъ жидкостью, или при замѣнѣ его непрерывною струею другого газа, уносящаго растворенный газъ по мѣрѣ его выдѣленія; тотъ же результатъ получится, если растворъ оставить открытымъ въ воздухѣ, если конечно растворенный газъ не входитъ въ составъ воздуха; растворъ «выдыхается».

2. При повышеніи температуры. При кипяченіи воды выдѣляются растворенные въ ней газы.

3. При затвердѣваніи раствора. При замерзаніи воды выдѣляются растворенные въ ней газы. Расплавленныя мѣдь и серебро растворяютъ кислородъ, который при быстромъ охлажденіи выдѣляется такъ энергично, что мелкія капли металла выбрасываются вмѣстѣ съ газомъ.

4. Если въ насыщенный растворъ газа ввести твердыя тѣла съ приставшими къ нимъ слоями воздуха (или иного газа; см. ниже § 6), то эти слои образуютъ какъ бы центры, около которыхъ собирается растворенный газъ, выдѣляясь въ видѣ пузырьковъ. Это явленіе особенно рѣзко замѣчается, если взять растворъ, насыщенный при высокомъ давленіи и сперва уменьшить внѣшнее давленіе, причемъ выдѣляется меньше газа, чѣмъ слѣдовало бы соотвѣтственно новому давленію и растворъ остается пересыщеннымъ. Вотъ почему шипучіе напитки (сельтерская вода, пиво), вылитые въ стаканъ и переставшіе выдѣлять пузырьки углекислоты, вновь какъ-бы закипаютъ, если въ нихъ насыпать сахарный порошокъ, песокъ, мелкія кусочки хлѣба и т. под.

§ 6. Явленія, обнаруживающіяся при соприкосновеніи газовъ съ твердыми тѣлами Когда твердое тѣло соприкасается съ газообразнымъ, то могутъ обнаруживаться два явленія: сгущеніе газа на поверхности твердаго тѣла (адсорбція), которое особенно велико для тѣлъ пористыхъ, обладающихъ огромною поверхностью (абсорбція), и непосредственное поглощеніе газа сплошною массою твердаго тѣла (окклюзія), которое по своему характеру напоминаетъ раствореніе.

Сгущеніе газовъ внутри пористыхъ тѣлъ впервые изслѣдовалъ Saussure (1814). Онъ нашелъ, что прокаленный уголь буковаго дерева при 12° поглощаетъ объемовъ: NH_3—90, HCl—85, SO_2—65, CO_2—35, O—9,2, N—7,5, H—1,75; морская пѣнка при 15°: NH_3—15, CO_2—5,26, O—1,45, N—1,60, H—0,44; гипсъ при 15° около 0,5 объемовъ H, N и O (0,58).

Законъ Henry мало подтверждается, но коеффиціентъ поглощенія не убываетъ, какъ для жидкостей, но ростетъ съ возростающимъ давленіемъ. Для амміака и угля кокосоваго орѣха онъ ростетъ отъ 170,7 при давленіи въ 760 мм. до 209,8 при 2609 мм. Для угля бересклета (Evonymus) и CO_2 онъ растетъ даже отъ 0,7 при давленіи въ 1,13 мм. до 77,1 при 763 мм., какъ показалъ Chappuis. Съ возростающей температурой сгущающая способность пористыхъ тѣлъ быстро уменьшается.

Для изслѣдованія сгущающей способности пористыхъ тѣлъ ихъ помѣщаютъ вмѣсто жидкостей въ абсорбціометръ (стр. 378). Губчатая прока-

ленная платина сгущаетъ въ себѣ до 250 объемовъ кислорода; струя *H*, направленная на губчатую платину, воспламеняется, такъ какъ первая содержитъ въ себѣ сгущенный *O* изъ воздуха; на этомъ основано водородное огниво Doebereiner'а.

Сильное сгущеніе газовъ внутри пористыхъ тѣлъ по всей вѣроятности представляетъ лишь частный случай сгущенія газовъ на поверхности твердыхъ тѣлъ вообще. Оказывается, что всякое твердое тѣло въ соприкосновеніи съ газомъ покрывается очень тонкимъ, но повидимому весьма уплотненнымъ слоемъ этого газа.

По мнѣнію Quincke плотность слоя увеличивается по мѣрѣ приближенія къ поверхности твердаго тѣла, достигая около самой поверхности плотности самаго тѣла.

Jamin и Bertrand помѣщали въ сосудѣ толченое стекло и выкачивали изъ него воздухъ; черезъ нѣкоторое время въ немъ увеличивалось давленіе, вслѣдствіе того, что часть воздуха, приставшаго къ поверхности стекла, постепенно освобождалась. Chappuis (1878) нашелъ, что кв. метръ поверхности стекла удерживаетъ 0,27 куб. см. *H*, 0,35 куб. см. воздуха, 0,63 куб. см. SO_2 и 0,25 куб. см. NH_3.

На воздухѣ тѣла покрываются тонкимъ слоемъ водяного пара (вапоризація); этимъ объясняется замѣчаемое иногда сильное поглощеніе CO_2 поверхностью твердыхъ тѣлъ.

Изображенія Moser'а объясняются существованіемъ сгущеннаго слоя воздуха на поверхности тѣлъ. Если на вычищенную стеклянную пластинку положить монету или медаль (можно наоборотъ вычистить послѣднюю, а стекло оставить не тронутымъ), снять ее и затѣмъ дохнуть на стекло, то ясно выступаетъ изображеніе медали. Объясняется это тѣмъ, что въ точкахъ соприкосновенія часть сгущеннаго газа переходитъ къ вычищенному тѣлу, вслѣдствіе чего плотность оставшагося или образовавшагося слоя на стеклѣ будетъ мѣняться соотвѣтственно рисунку монеты или медали. Это повліяетъ на величину и форму мельчайшихъ капель воды, пристающихъ къ стеклу, если на него дохнуть, такъ что контуры изображенія на монетѣ дѣлаются замѣтными. Если деревянной палочкой чертить по поверхности стекла или металла и затѣмъ дохнуть на него, то вычерченная фигура также дѣлается видимою.

Любопытный случай поглощенія газа твердымъ тѣломъ представляетъ открытое Divers'омъ (1873) поглощеніе аммiачнаго газа азотноамміачною солью. При этомъ получается жидкій растворъ этой соли въ амміакѣ. Изслѣдованіемъ этого явленія занимались Raoult, Troost и Куриловъ.

Поглощеніе газовъ сплошными металлами (окклюзія) зависитъ отъ рода металла и газа и отъ температуры.

Особенный интересъ представляетъ поглощеніе водорода палладіемъ. Палладіевая проволока поглощаетъ объемъ водорода, который при атмосферномъ давленіи до 1000 разъ превышалъ бы объемъ самой проволоки. Способность палладія поглощать водородъ растетъ съ повышеніемъ температуры до 100° и затѣмъ уменьшается. Поглощая водородъ, палладіевая проволока удлиняется до 1,6%; объемъ ея увеличивается на 10%.

Вычисленіе показываетъ, что поглощенный водородъ долженъ сгущаться настолько, что его плотность достигаетъ числа 1.7. Упругость этого поглощеннаго водорода должна быть огромная; она измѣряется по всей вѣроятности десятками тысячъ атмосферъ.

Н. Гезехусъ произвелъ весьма тщательное и интересное изслѣдованіе поглощенія водорода палладіемъ и его сплавами съ *Pt*, *Au* и *Ag* (75% *Pd* и 25% одного изъ этихъ металловъ). Между прочимъ онъ измѣрялъ удлиненіе проволоки (длина 500 мм., толщина 0,4 мм.) при поглощеніи ею водорода. Когда проволока, служа катодомъ, поглощала водородъ, то удлиненіе въ теченіе первыхъ 8-ми минутъ равнялось для палладія и его сплавовъ:

$Pd+Ag$	$Pd+Pt$	Pd	$Pd+Au$
7,2 мм.	6,4 мм.	5 мм.	0,9 мм.

При этихъ опытахъ Н. Гезехусъ пользовался весьма остроумнымъ приборомъ для измѣренія малыхъ удлиненій проволоки. Далѣе онъ изслѣдовалъ явленіе выдѣленія водорода изъ палладія и его сплавовъ при различныхъ условіяхъ и, наконецъ, вліяніе поглощеннаго водорода на упругость проволоки.

Никкель также поглощаетъ H, но гораздо меньше, чѣмъ палладій; подобное же явленіе обнаруживаютъ калій и натрій. Платина, нагрѣтая въ O, поглощаетъ немного этого газа. Чугунъ содержитъ немного H; желѣзо — CO (до 12 объемовъ); алюминій — H и CO_2.

Особенно интересно, что метеоритное желѣзо содержитъ въ себѣ до трехъ объемовъ газовъ; изъ нихъ $^5/_6$ по объему составляетъ водородъ; кромѣ него еще находится азотъ и окись углерода.

Присутствіе газовъ въ металлахъ можетъ сдѣлаться источникомъ погрѣшностей при опредѣленіи ихъ удѣльнаго вѣса, какъ показалъ Dumas (1878).

ЛИТЕРАТУРА.

I. Законъ Дальтона.

Dalton. Manch. phil. Soc. V, p. 535, 1802; Gilb. Annal. 12 p. 385, 1802; 15 p. 21, 1803.
Henry. Nicholsons J. 8 p. 297, 1804; Gilb. Annal. 21 p. 393, 1805.
Gay-Lussac. Ann. ch. et phys. 95 p. 314, 1815; Biot, Traité de physique I p. 298.
Magnus. Pogg. Ann. 38 p. 488. 1836.
Regnault. Ann. ch. et phys. (3) 15 p. 129, 1845; Mém. de l'Ac. des sciences. 26, p. 679.
Andrews. Phil. Mag. (5) 1 p. 84, 1876.
Cailletet. J. de phys. (1) 9 p. 192, 1880.
Springmuehl. Pogg. Ann. 148 p. 540, 1873.
Herwig. Pogg. Ann. 137 p. 592, 1869.
Wuellner und Grotrian. W. A. 11 p. 545, 1880.
Kroenig. Pogg. Ann. 123 p. 299, 1864.
Braun. W. A. 34 p. 943, 1888.
B. Galitzine. Das Daltonische Gesetz. Diss. Strassburg. 1890.
B. Galitzine. W. A. 41 p. 588, 1890.

II. Газы и жидкости:

Henry. Phil. Trans. 1803, I p. 29; Gilb. Ann. 20, 1805.

Bunsen. Gasometrische Methoden. Braunschweig. 1857; Liebig's Annal. 93, 1855.

Сѣченовъ. Mém. de l'Acad. d. St. Petersb. (7) T. 22 № 6; 34 № 3, 35 № 7; Zeitschr f. phys. Chem. 4 p. 117; Ann. chim. et phys. (6) 25 p. 226, 1892; Ber. Chem. Ges. 1877, p. 972; О. Ф. Н. Об. Л. Е. 5, вып. 2, стр. 6; 1893.

Kumpf. Absorption von Chlor durch NaCl-Lösung. Diss. Graz, 1881.

Wroblewski. Wied. Ann. 8 p. 29, 1880; 17 p. 103, 1882; 18 p. 290, 1893; J. d. phys. (2) 1 p. 452, 1882.

Richard. C. R. 123 p. 1088, 1896.

E. Wiedemann. W. A. 17 p. 349, 1882.

Khanikoff et Louguinine. Ann. ch. et phys. (4) 11 p. 412, 1867.

Mackenzie und Nichols. W. A. 3 p. 134, 1878.

Nichols and Wheeler. Phil. Mag. (5) 11 p. 113, 1881.

Angström. W. A. 15 p. 297, 1882; 17 p. 297, 1882.

Bluemcke. W. A. 23 p. 404, 1884; 30 p. 243, 1887.

Steiner. W. A. 52 p. 275, 1894.

Д. П. Коноваловъ. Ж. Ф. Х. Общ. 26, 1894, Отд. Хим. стр. 48.

III. Газы и твердыя тѣла.

Saussure. Gilb. Annalen, 47, 1814.

Chappuis. W. A. 8 p. 1 и 671, 1879; 12 p. 160, 1881; Arch. Sc. phys. (3) 3 p. 439, 1878.

Jamin et Bertrand. Ann. ch. et phys. (3) 34 p. 344, 1852.

Moser. Pogg. Ann. 56 и 57, 1842.

Dumas. C. R. 86 p. 65, 1878.

Quinke. Pogg. Ann. 108, p. 326, 1859.

Joulin. C. R. 90 p. 741; 1880.

Pfeiffer. Verdichtung v. Gasen durch feste Körper. Diss. Erlangen. 1882.

Kayser. W. A. 12 p. 528; 14 p. 450, 1881; 21 p. 495, 1884; 23 p. 416, 1884.

Bunsen. W. A. 20 p. 545, 1883; 22 p. 145, 1884; 24 p. 321, 1885.

O. Schumann. W. A. 27 p. 91, 1886.

Troost et Hautefeuille. C. R. 78 p. 686, 1874 (H и Pd).

Divers. C. R. 77 p. 788, 1873.

Raoult. C. R. 76 p. 1261, 1887; 94 p. 1117, 1882.

Troost. C. R. 94 p. 789, 1882.

Куриловъ. Ж. Ф. Х. Общ. 25, 1893, Отд. Хим. р. 170.

Н. Гезехусъ. Ж. Ф. Х. О. 11 p. 78, 1879.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Основанія кинетической теоріи газовъ.

§ 1. Характеръ движенія газовыхъ молекулъ. Основателями кинетической теоріи газовъ слѣдуетъ считать Kroenig'a (1856) и Clausius'a (1857), хотя тѣ идеи и представленія, которыя лежатъ въ ея основаніи, уже раньше были высказываемы и развиваемы многими учеными.

Кинетическая теорія газовъ, въ ея простѣйшемъ видѣ, безъ тѣхъ дополненій и исправленій, которыя мало-по-малу были введены въ

нее, предполагаетъ, что газовыя молекулы, не дѣйствуя вовсе другъ на друга (кромѣ какъ при столкновеніяхъ), движутся каждая, какъ вполнѣ свободное тѣло, прямолинейно съ нѣкоторою скоростью, зависящею, какъ мы увидимъ, только отъ рода газа и отъ температуры. Направленіе движенія рѣзко мѣняется, когда молекула встрѣчаетъ на своемъ пути стѣнку сосуда, въ которомъ газъ заключенъ, или вообще преграду, или когда сталкиваются между собою двѣ молекулы. Въ обоихъ случаяхъ перемѣна направленія движенія происходитъ согласно съ законами удара упругихъ тѣлъ.

Кромѣ прямолинейнаго въ каждый данный моментъ движенія молекулы, существуютъ въ газѣ, однако, и еще другія движенія. Во-первыхъ, молекула, какъ цѣлое, можетъ вращаться около какой-либо оси; такія движенія должны возникать при нецентральныхъ ударахъ молекулъ другъ о друга; во-вторыхъ, возможны такъ наз. интрамолекулярныя движенія, т. е. движенія (колебанія, вращенія) атомовъ, составляющихъ молекулу, около нѣкоторыхъ среднихъ положеній. Объемомъ, занимаемымъ молекулами, мы пренебрегаемъ, принимая ихъ за точки, допуская, однако, возможность столкновеній между ними; иначе говоря, мы пренебрегаемъ линейными размѣрами молекулъ сравнительно съ ихъ среднимъ разстояніемъ другъ отъ друга. Далѣе мы предположимъ, что молекулы не подвержены никакимъ внѣшнимъ силамъ; пренебрегаемъ слѣд. и вліяніемъ на нихъ силы тяжести.

Изложенный здѣсь взглядъ на характеръ движенія газовыхъ молекулъ, а именно прямолинейность движенія, непосредственно объясняетъ основныя два свойства газовъ: ихъ стремленіе занять, и притомъ равномѣрно, весь предоставленный имъ объемъ, и ихъ упругость, т.-е. то давленіе, которое они производятъ на тѣла, ограничивающія этотъ объемъ. Первое изъ этихъ свойствъ прежде объясняли взаимнымъ отталкиваніемъ частицъ газа. Ясно, что если рядомъ съ пространствомъ A, занимаемымъ газомъ, окажется пустое пространство B, то всѣ частицы, движущіяся по направленію къ этому пространству B, не встрѣчая препятствія, перейдутъ въ него, пока не будетъ достигнуто равномѣрное распредѣленіе молекулъ, при которомъ въ единицу времени столько же частицъ перелетаетъ изъ A въ B, сколько изъ B въ A. Равномѣрное распредѣленіе есть слѣд. условіе равновѣсія, не соотвѣтствующаго однако покою, но, напротивъ, непрерывному обмѣну частицъ безъ измѣненія ихъ числа въ каждой части пространства, не черезмѣрно малой. Въ подобныхъ случаяхъ, часто встрѣчающихся въ различныхъ областяхъ физическихъ явленій, говорятъ объ установившемся подвижномъ равновѣсіи.

Упругость газовъ въ смыслѣ давленія, дѣйствующаго на сосѣднія съ ними тѣла, объясняется тѣми толчками, которые эти тѣла претерпѣваютъ отъ налетающихъ на нихъ и отскакивающихъ молекулъ, отъ «молекулярной бомбардировки», которой они подвергаются.

Чтобы получить съ самаго начала болѣе правильное представленіе о характерѣ движенія молекулъ газа, укажемъ на слѣдующія данныя, къ которымъ мы ниже вернемся. Скорость газовыхъ молекулъ весьма велика; она напр. равна почти 500 метрамъ въ секунду для молекулъ воз-

духа, возростая для всѣхъ газовъ съ температурою. Столкновенія между частицами газа происходятъ невообразимо часто; такъ напр. молекула воздуха при обыкновенномъ давленіи успѣваетъ, въ среднемъ, пройти не болѣе 0,0001 мм. отъ одного столкновенія до слѣдующаго. Принимая во вниманіе быстроту движенія, мы видимъ, что всякая молекула претерпѣваетъ въ каждую секунду до 5000 милліоновъ столкновеній и столько же разъ, вообще говоря, мѣняетъ направленіе своего движенія. При сдавливаніи газа, число этихъ столкновеній должно возрости пропорціонально плотности; когда воздухъ сжатъ до 100 атмосферъ, мы имѣемъ уже 500.000 милліоновъ столкновеній въ секунду. Все это вмѣстѣ взятое рисуетъ намъ картину невообразимо хаотическаго состоянія, въ которомъ находится совокупность огромнаго числа молекулъ, весьма быстро движущихся по всевозможнымъ направленіямъ, непрерывно между собою сталкиваясь.

§ 2. Законъ Бойля-Маріотта. Кинетическая теорія не только легко объясняетъ, почему давленіе p газа обратно пропорціонально объему v, но и даетъ весьма интересное выраженіе для произведенія pv, не зависящее, какъ и слѣдуетъ ожидать, отъ температуры.

Вотъ простое объясненіе самого закона. Если мы объемъ v газа, въ которомъ находились n молекулъ, уменьшимъ въ k разъ, то въ объемѣ $\frac{v}{k}$ будутъ находиться всѣ n молекулъ. Давленіе будетъ въ этомъ случаѣ такое же, какъ и въ случаѣ, еслибы въ объемѣ v находились kn молекулъ, ибо раздѣливъ этотъ объемъ перегородками на k равныхъ частей, мы давленія не измѣнимъ, а между тѣмъ получимъ объемы $\frac{v}{k}$, содержащіе каждый n молекулъ. Но если въ объемѣ v число молекулъ увеличилось въ k разъ, то на единицу поверхности стѣнки частицы будутъ налетать въ k разъ чаще; бомбардировка, а слѣд. и давленіе газа увеличится въ k разъ.

Другое объясненіе слѣдующее: если мы уменьшимъ объемъ въ q^3 разъ, то линейные размѣры, а слѣд. и среднее разстояніе частицъ другъ отъ друга уменьшится въ q разъ; поэтому частицы, расположенныя вдоль единицы поверхности стѣнки въ тонкомъ прилегающемъ къ ней слоѣ, отскочивъ отъ нея, пройдутъ въ q раза болѣе короткій путь до вѣроятной встрѣчи съ другими частицами, о которыя онѣ ударятся и вновь получатъ движеніе, направленное къ стѣнкѣ. Каждая частица будетъ поэтому въ q разъ чаще ударять въ стѣнку, чѣмъ прежде. Число частицъ въ слоѣ, толщину котораго теперь слѣдуетъ взять въ q разъ меньше, увеличится въ q^2 разъ, и потому полное число ударовъ, претерпѣваемыхъ единицей поверхности стѣнки, увеличится въ q^3, т.-е. во столько разъ, во сколько разъ уменьшился объемъ.

Перейдемъ къ выводу формулы, которую слѣдуетъ назвать основною въ кинетической теоріи газовъ. Эта формула имѣетъ видъ:

$$pv = \frac{1}{3} N m u^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Здѣсь v объемъ, занимаемый газомъ, p его упругость, N число молекулъ, содержащихся въ объемѣ v, m масса одной молекулы и u скорость молекулъ.

Для вывода этой формулы вспомнимъ теорему стр. 74: импульсъ K внѣшней силы равенъ геометрическому приращенію L количества движенія. Положимъ, что молекула C (рис. 235), масса которой m, двигаясь по направленію FC, ударяетъ въ стѣнку AB со скоростью $u = CD$, составляющей уголъ φ съ нормалью CN. По закону удара упругихъ тѣлъ (Отдѣлъ шестой, Глава IV, § 7) она отлетитъ отъ стѣнки съ тою же скоростью u по направленію CE, составляющему тотъ же уголъ φ съ нормалью. Геометрическое приращеніе L количества движенія будетъ равно $m \times DE$. Но $DE = 2u\cos\varphi$, слѣд.

$$L = 2mu\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Импульсъ силы можно положить равнымъ $K = f\tau$, гдѣ f средняя величина силы, съ которою стѣнка давитъ на молекулу, мѣняя величину и направленіе ея скорости, и τ продолжительность соприкосновенія между молекулой и стѣнкой. По закону равенства дѣйствій и противодѣйствій на стѣнку дѣйствуетъ втеченіе времени τ сила f. Вышеупомянутый законъ даетъ

$$K = f\tau = 2mu\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Если составимъ подобныя равенства для всѣхъ частицъ, встрѣчающихъ данную часть s поверхности стѣнки втеченіе какого либо времени t, и просуммируемъ всѣ эти равенства, то мы получимъ съ лѣвой стороны $\sum f\tau$. Величина $\sum\tau$ не равна t, ибо удары не слѣдуютъ одинъ непосредственно за другимъ: между ними могутъ быть промежутки времени и нѣсколько ударовъ могутъ происходить одновременно. Но сумма импульсовъ силъ за промежутокъ времени t, т.-е. $\sum f\tau$ можетъ быть представлена въ видѣ Ft, гдѣ опять по закону равенства дѣйствій и противодѣйствій F представляетъ собою среднюю величину силы, непрерывно дѣйствующей въ теченіе времени t на часть s поверхности стѣнки. Итакъ мы имѣемъ

$$Ft = \sum_{t,\,s} 2mu\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Буквы t и s, поставленныя подъ знакомъ суммы, обозначаютъ, что надо взять сумму величинъ $2mu\cos\varphi$ для всѣхъ частицъ, ударяющихъ втеченіе времени t на поверхность s.

Если положить $t = 1$ и $s = 1$, то лѣвая сторона превратится въ упругость газа p, т. е. въ среднюю силу, дѣйствующую непрерывно на единицу поверхности стѣнки. При чрезвычайной громадности числа ударовъ можно эту силу p считать за величину постоянную.

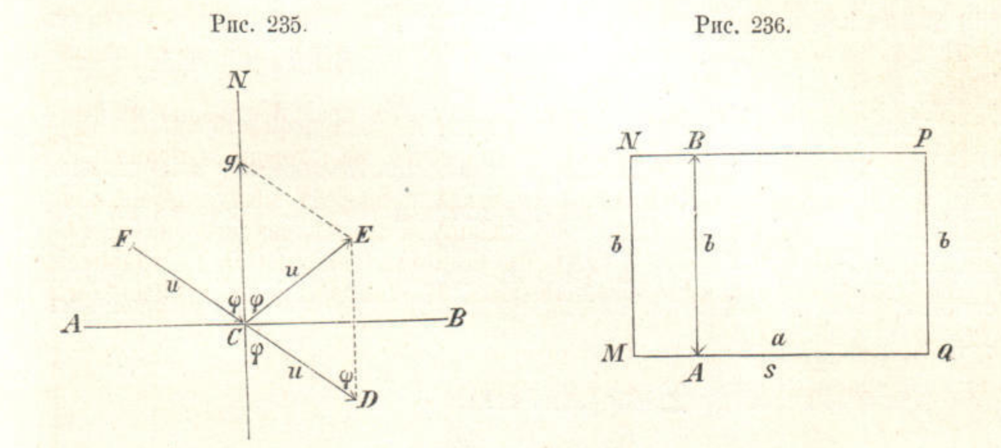
Итакъ мы имѣемъ

$$p = \sum_{\substack{t=1\\ s=1}} 2mu\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Упругость газа получится, если мы вычислимъ сумму выраженій вида $2mu\cos\varphi$ для всѣхъ частицъ газа, ударяющихъ въ единицу времени ($t=1$) на единицу поверхности ($s=1$) стѣнки. Существуютъ разные выводы основной формулы (1) изъ общей формулы (2). Приведемъ два такихъ вывода.

I. Выводъ Joule'a (1851 и 1857). Допустимъ, что сосудъ, содержащій газъ, имѣетъ форму прямоугольнаго параллелепипеда, стороны котораго $a=MQ$ (рис. 236), $b=MN$ и c, перпендикулярная къ рисунку. Ребро b примемъ за высоту, а за основаніе сторону $ac=s$; объемъ $v=sb$. Вводимъ слѣдующія два допущенія:

1) Допускаемъ, что молекулы газа вовсе не сталкиваются между собою, но свободно летятъ отъ стѣнки до стѣнки. Это допущеніе не можетъ имѣть вліянія



на результатъ вычисленія суммы количествъ движенія частицъ, долетающихъ до стѣнки, ибо, какъ мы увидимъ ниже (Отдѣлъ VI, Глава IV, § 7), при ударѣ вполнѣ упругихъ тѣлъ, каковыми считаются молекулы газа, количество движенія, идущее въ данномъ направленіи, отчасти передаваясь другому тѣлу, какъ бы продолжаетъ идти въ томъ же направленіи. Оно дойдетъ до противоположной стѣнки и отъ него отразится, не мѣняясь количественно, но какъ бы распредѣляясь между многими молекулами. Полное количество движенія, доходящее до единицы поверхности остается одинаковымъ, будутъ ли молекулы сталкиваться между собою, или нѣтъ.

2) Положимъ, что въ разсматриваемомъ объемѣ газа содержится N молекулъ. Каждую молекулу, масса которой m, и скорость u которой имѣетъ произвольное направленіе, составляющее углы α, β и γ съ ребрами a, b и c, замѣняемъ мысленно тремя молекулами, движущимися параллельно этимъ ребрамъ со скоростями $u\cos\alpha$, $u\cos\beta$ и $u\cos\gamma$. Энергія движенія отъ этого не измѣнится, ибо $\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}m(u\cos\alpha)^2+\frac{1}{2}m(u\cos\beta)^2+\frac{1}{2}m(u\cos\gamma)^2$. Формула (5) показываетъ, что давленіе p зависитъ только отъ нормальной слагаемой, а потому при вычисленіи этого давленія напр. на сторону s

указанная замѣна не можетъ имѣть вліянія на результатъ. Если замѣну произвести со всѣми частицами, то въ результатѣ мы получимъ три группы частицъ; каждая группа содержитъ N молекулъ движущихся параллельно одному изъ реберъ a, b и c. Такъ какъ число молекулъ очень велико и всѣ направленія движенія одинаково часто встрѣчаются, то ясно, что каждая изъ трехъ группъ обладаетъ одною третью той энергіи, которая въ дѣйствительности заключается въ поступательномъ движеніи всѣхъ молекулъ, т.-е. можно допустить, что всѣ N молекулъ каждой группы движутся со скоростью $\frac{u}{\sqrt{3}}$. Но такою же энергіей обладала бы группа, еслибы она состояла изъ $\frac{1}{3}N$ молекулъ, движущихся со скоростью u. Второе допущеніе, которое ввелъ Joule, выражается тѣмъ, что для вычисленія давленія p по формулѣ (5) онъ предполагаетъ, что $\frac{1}{3}$ всѣхъ молекулъ движется перпендикулярно къ сторонѣ s, а остальныя двѣ трети параллельно этой сторонѣ, не ударяясь вовсе въ нее.

Теперь легко вычислить сумму, стоящую съ правой стороны въ формулѣ (5). Каждая изъ $\frac{1}{3}N$ молекулъ ударяется въ сторону s нормально, слѣд. $\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 1$. Она движется взадъ и впередъ между двумя точками A и B; отъ одного удара объ стѣнку s до слѣдующаго она пробѣгаетъ путь $AB + BA = 2b$, и слѣд. въ единицу времени ($t = 1$) ударится столько разъ въ стѣнку s, сколько разъ $2b$ содержится въ пройденномъ пути u, т.-е. $\frac{u}{2b}$ разъ.

Для одной частицы $\sum 2mu$ равно слѣд.

$$\frac{u}{2b} \cdot 2mu = \frac{mu^2}{b}.$$

Для всѣхъ частицъ эта сумма будетъ въ $\frac{1}{3}N$ разъ больше, т.-е.

$$\frac{1}{3}N\frac{mu^2}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Чтобы окончательно получить выраженіе суммы, соотвѣтствующее символу, стоящему съ правой стороны въ формулѣ (5), намъ остается удовлетворить условію $s = 1$. Такъ какъ (6) относится ко всей площади s, то для единицы поверхности получаемъ

$$p = \frac{1}{3}N\frac{mu^2}{sb}$$

Но $sb = v$ и слѣд.

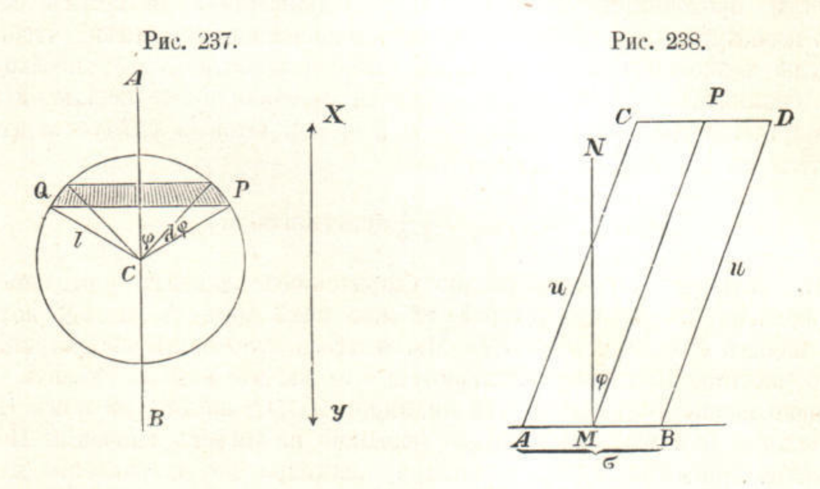
$$pv = \frac{1}{3}Nmu^2,$$

что и требовалось вывести.

II. Выводъ Clausius'а (1857). Рѣшимъ сперва такой вопросъ: положимъ, что имѣется n (весьма большое число) газовыхъ молекулъ, движущихся

по всевозможнымъ направленіямъ, притомъ такъ, что всѣ направленія одинаково часто встрѣчаются и ни одно не имѣетъ перевѣса надъ другими; пусть XY (рис. 237) какое либо направленіе; спрашивается, какъ велико число n_φ частицъ, направленія движеній которыхъ составляетъ съ направленіемъ XY уголъ, содержащійся между φ и $\varphi + d\varphi$?

Для рѣшенія этого вопроса проведемъ черезъ какую либо точку C прямую $AB \parallel XY$; изъ C проведемъ далѣе n прямыхъ, произвольной, но равной длины l, параллельныхъ направленіямъ движеній n газовыхъ молекулъ. Концы этихъ прямыхъ равномѣрно распредѣлятся по поверхности шара, радіусъ котораго l. Если около CA, какъ около оси, описать конусы, образующія которыхъ составляютъ съ этою осью углы φ и $\varphi + d\varphi$, то они ограничатъ на поверхности шара поясъ PQ, внутри



котораго будутъ расположены концы всѣхъ прямыхъ l, соотвѣтствующихъ искомому числу n_φ молекулъ. Въ виду равномѣрности распредѣленія этихъ концовъ линій l, число n_φ должно относиться ко всему числу n, какъ поверхность пояса PQ, т.-е. $2\pi l^2 \sin\varphi d\varphi$, ко всей поверхности шара $4\pi l^2$.

Итакъ $n_\varphi : n = 2\pi l^2 \sin\varphi d\varphi : 4\pi l^2$, откуда

$$n_\varphi = \frac{1}{2} n \sin\varphi d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Рѣшивъ поставленный вопросъ, разсмотримъ элементъ $AB = \sigma$ (рис. 238) поверхности стѣнки. Пусть MN нормаль къ σ; построимъ надъ σ, какъ надъ основаніемъ, цилиндръ $ACDB$, образующія котораго составляли бы уголъ φ съ нормалью и имѣли бы длину, равную скорости u частицъ. Высота цилиндра $u \cos\varphi$, его объемъ $\sigma u \cos\varphi$; число n молекулъ, содержащихся въ немъ, равно

$$n = \frac{N}{v} \sigma u \cos\varphi,$$

если во всемъ объемѣ v содержится N молекулъ, а слѣд. въ единицѣ объема

ихъ содержится $\frac{N}{v}$. Эти молекулы движутся по всевозможнымъ направленіямъ, слѣд.

$$n_\varphi = \frac{1}{2} n \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{N}{v} \sigma u \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

есть число молекулъ, содержащихся въ цилиндрѣ *ACDB* и движущихся по направленіямъ, составляющимъ съ нормалью *MN* уголъ, заключающійся между φ и $\varphi + d\varphi$.

Опредѣлимъ, какое число n'_φ этихъ частицъ движется по направленіямъ, составляющимъ безконечно малый уголъ съ осью *MP* цилиндра. Пусть плоскость *NMP* составляетъ уголъ ψ съ какою либо начальною плоскостью, проходящею черезъ нормаль *MN*. Нормальныя къ σ плоскости, проходящія черезъ направленія движеній n_φ молекулъ, составляютъ всевозможные углы отъ 0 до 2π съ начальною плоскостью; чтобы эти молекулы безконечно мало выходили изъ плоскости *NMP*, необходимо, чтобы упомянутыя нормальныя плоскости составляли съ начальной плоскостью углы, содержащіеся между ψ и $\psi + d\psi$. Отсюда слѣдуетъ, что n'_φ относится къ n_φ, какъ $d\psi$ къ 2π, т.-е.

$$n'_\varphi = \frac{d\psi}{2\pi} n_\varphi = \frac{N\sigma}{4\pi v} u \cos\varphi \sin\varphi d\varphi d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Всѣ эти n'_φ частицъ очевидно ударятся объ элементъ σ втеченіе единицы времени, къ концу которой тѣ изъ нихъ дойдутъ до *AB*, которыя въ ея началѣ находились въ *CD*. Мы и здѣсь не обращаемъ вниманія на то, что частицы взаимно сталкиваются; что мы это можемъ сдѣлать, было объяснено выше. Возраженіе, что цилиндръ *ACDB* можетъ не помѣститься въ объемѣ v, занимаемомъ газомъ, очевидно не имѣетъ значенія. Потокъ количества движенія, идущаго внутри цилиндра по направленію къ *AB* втеченіе единицы времени, не зависитъ отъ величины объема v. Впрочемъ можно было бы разсматривать и цилиндръ произвольной длины l, пробѣгаемый газовыми частицами во время $t = \frac{l}{u}$. Переходя затѣмъ къ опредѣленію суммы (5) для $t = 1$, мы бы получили тотъ же результатъ, какой получимъ и теперь. Каждая изъ n'_φ частицъ дастъ одинъ изъ членовъ суммы (5), и такъ какъ φ для нихъ общее, то онѣ дадутъ часть всей суммы, равную

$$n'_\varphi \cdot 2mu\cos\varphi = \frac{Nm\sigma}{2\pi v} u^2 \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi d\psi.$$

Если мы проинтегрируемъ это выраженіе по ψ отъ 0 до 2π и по φ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, то получимъ сумму (5) для $t = 1$ и $s = \sigma$; чтобы получить p, намъ останется перейти отъ $s = \sigma$, къ $s = 1$, т.-е. раздѣлить полученный результатъ на σ. Итакъ

$$p = \frac{Nmu^2}{2\pi v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{Nmu^2}{v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{3} \frac{Nmu^2}{v}.$$

Отсюда получается

$$pv = \frac{1}{3} Nmu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

т.-е. формула (1).

Главный недостатокъ этого вывода Clausius'a заключается въ допущеніи, что всѣ молекулы движутся съ одинаковою скоростью u, что, какъ мы увидимъ, невѣрно.

Величины p, v, m и u въ (10) должны быть измѣряемы соотвѣтствующими другъ другу единицами. Если пользоваться *C. G. S.* единицами, то p должно быть выражено въ динахъ на кв. см. поверхности, v къ куб. см., m въ граммахъ, а за единицу скорости слѣдуетъ принять скорость 1 см. въ сек. Однако чаще принимаютъ за единицу силы килограммъ, за единицу длины метръ, за единицу времени секунду. Въ этомъ случаѣ p выражается въ килограммахъ на кв. метръ поверхности, v въ куб. метрахъ; за единицу массы слѣдуетъ принять массу g килогр. $=9{,}81$ килогр. и за единицу скорости — скорость метръ въ сек.

§ 3. Слѣдствія, вытекающія изъ основной формулы (10). Вспомнимъ формулу Клапейрона (2) стр. 360:

$$pv = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

гдѣ T абсолютная температура, R величина постоянная для даннаго количества даннаго газа. Введемъ далѣе живую силу J поступательнаго движенія газовыхъ молекулъ; она равна

$$J = \frac{1}{2} Nmu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Наконецъ, пусть $M = Nm$ масса газа, $Q = gM$ его вѣсъ, и δ плотность газа, притомъ, какъ мы всегда обозначаемъ этой буквой, плотность относительно воздуха при томъ же давленіи и той же температурѣ.

Комбинируя (10), (11) и (12), получаемъ замѣчательный рядъ равенствъ

$$pv = \frac{1}{3} Nmu^2 = \frac{1}{3} Mu^2 = RT = \frac{2}{3} J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

При постоянной температурѣ произведеніе pv для даннаго количества газа есть величина постоянная по закону Б.-М. Теперь мы видимъ, что эта постоянная $pv = \mathrm{Const.}$ равна двумъ третямъ энергіи поступательнаго движенія газовыхъ молекулъ.

При $v = 1$ имѣемъ

$$p = \frac{2}{3} J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13,a)$$

т.-е. давленіе газа равно двумъ третямъ энергіи поступательнаго движенія, заключающейся въ единицѣ объема газа.

Равенство $RT = \frac{2}{3} J$ показываетъ далѣе, что энергія поступа-

тельнаго движенія газовыхъ молекулъ пропорціональна абсолютной температурѣ газа.

§ 4. Скорость газовыхъ частицъ. Равенства (13) даютъ

$$u = \sqrt{\frac{3pv}{M}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Предположимъ, что мы имѣемъ дѣло съ вѣсовою единицею газа; тогда вѣсъ $Q = gM = 1$, откуда $M = \frac{1}{g}$; пусть далѣе v_0 объемъ вѣсовой единицы, а именно килограмма, воздуха при данныхъ температурѣ T и давленіи p газа; тогда $v = \frac{v_0}{\delta}$ и (14) даетъ

$$u = \sqrt{3gpv} = \sqrt{\frac{3gpv_0}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Наконецъ пусть R_0 постоянная формулы Клапейрона для одного килограмма воздуха; тогда $pv_0 = R_0 T$. Мы видѣли, (6) стр. 360, что $R_0 = 29{,}27$, если принять килограммъ, метръ и сек. за единицы силы, длины и времени; (15) даетъ

$$u = \sqrt{3gR_0 \frac{T}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Изъ этой формулы вытекаютъ два важнѣйшихъ закона:

I. Скорость молекулъ даннаго газа пропорціональна корню квадратному изъ абсолютной температуры газа.

II. Скорости молекулъ различныхъ газовъ при одинаковой температурѣ обратно пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ плотностей газовъ.

Чѣмъ легче газъ, тѣмъ быстрѣе движутся его молекулы. Отъ упругости, какъ и слѣдуетъ ожидать, не зависитъ скорость молекулъ. Если мы сожмемъ газъ при постоянной температурѣ, то его молекулы сблизятся, но это не должно вліять на ихъ скорость; при сжиманіи измѣнится плотность D газа относительно воды, но плотность δ относительно воздуха, въ предѣлахъ точности закона Б.-М., остается безъ измѣненія (стр. 342).

Формула (16) даетъ возможность вычислить и абсолютныя величины скоростей u газовыхъ частицъ. Сдѣлаемъ это для температуры 0°, т.-е. для $T = 273$; вставляемъ $g = 9.81$, $R = 29{,}27$:

$$u = \sqrt{\frac{3 \times 9{,}81 \times 29{,}27 \times 273}{\delta}} = \frac{485}{\sqrt{\delta}} \frac{\text{метра}}{\text{сек.}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Тоже самое мы, конечно, получили бы, вставляя въ (15) $p = 10333$ (давленіе одной атмосферы въ килогр. на кв. метръ поверхности) и $v_0 = 0{,}7733$ (объемъ килогр. воздуха при 0° и давленіи въ одну атмосферу въ куб. метрахъ).

Для воздуха $\delta = 1$ и слѣд. скорость частицъ воздуха при 0°

равна громадной величинѣ 485 метровъ въ сек. Она больше скорости звука.

Полагая для H плотность $\delta = 0{,}0693$, для CO_2 — $\delta = 1{,}529$, находимъ

для H . . . . $u = 1843$ м. въ сек.
для CO_2 . . . . $u = \ 392$ м. въ сек.

При 100° скорости u больше въ $\sqrt{\frac{373}{273}} = 1{,}169$ раза; при 200° больше въ $\sqrt{\frac{473}{273}} = 1{,}316$ раза; такимъ образомъ получаемъ для скоростей u такія числа:

	0°	100°	200°
Кислородъ . . .	461 м.	539 м.	604 м.
Водородъ	1843 м.	2153 м.	2424 м.
CO_2	392 м.	458 м.	516 м.

Скорость частицъ водорода при обыкновенной температурѣ равна почти 2 километрамъ въ секунду.

При $T = 0$, т.-е. при $t = -273°$, имѣемъ $u = 0$; абсолютный нуль температуры характеризуется такимъ образомъ полнымъ отсутствіемъ поступательныхъ движеній молекулъ; мы допускаемъ, что при этой температурѣ нѣтъ и другихъ движеній, каковы вращенія молекулъ и движенія интрамолекулярныя (стр. 386).

Величины скоростей u, которыя мы нашли, получены на основаніи предположенія, что всѣ молекулы газа обладаютъ одинаковою скоростью. Мы увидимъ далѣе, какое значеніе имѣетъ въ дѣйствительности та скорость, которая входитъ въ формулы (10) и (13) и величина которой найдена въ (14), (15), (16) и (17).

§ 5. Законъ Авогадро. Этотъ законъ можетъ быть выведенъ, хотя и не строго, изъ полученныхъ нами формулъ. Положимъ, что имѣются два равныхъ объема v двухъ различныхъ газовъ при одинаковыхъ давленіи p и температурѣ T. Пусть въ этихъ равныхъ объемахъ заключается N молекулъ одного и N_1 молекулъ другого газа; законъ Авогадро говоритъ, что $N = N_1$.

Обозначимъ массы молекулъ двухъ газовъ черезъ m и m_1; тогда (10) даетъ

$$pv = \frac{1}{3} Nmu^2 \qquad pv = \frac{1}{3} N_1 m_1 u_1^2$$

слѣдовательно

$$Nmu^2 = N_1 m_1 u_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Тотъ фактъ, что при смѣшеніи нашихъ двухъ газовъ не мѣняется ихъ температура, приводитъ Clausius'а къ заключенію, что энергія поступательнаго движенія молекулъ того и другого газа остается безъ измѣненія. Это возможно только въ случаѣ, когда энергія движенія отдѣльныхъ молекулъ одинаковая въ обоихъ газахъ, т.-е. когда

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Еслибы это равенство не имѣло мѣста, то при столкновеніяхъ молекулъ различныхъ газовъ увеличивалась бы энергія одного рода и уменьшалась бы энергія другого рода молекулъ и мы получили бы весьма невѣроятный результатъ, что въ смѣси двухъ газовъ каждый изъ нихъ имѣетъ какъ бы свою температуру, которая для одного газа выше, для другого газа ниже температуры самой смѣси, и которая, однако, равна общей температурѣ газовъ до ихъ смѣшенія, независимо отъ того, въ какой пропорціи были смѣшаны газы. Допуская слѣд. равенство (19), мы изъ (18) непосредственно получаемъ $N = N_1$, чѣмъ и выражается законъ Авогадро.

§ 6. Законъ Дальтона. Въ § 1 Главы IV (стр. 376) мы видѣли, что давленіе смѣси нѣсколькихъ газовъ равно суммѣ т. наз. парціальныхъ давленій составныхъ частей. Этотъ законъ можетъ быть разъясненъ слѣдующимъ образомъ. Выводя формулу (10) для однороднаго газа, мы вычисляли сумму геометрическихъ приращеній количествъ движенія, пріобрѣтаемыхъ молекулами при ударѣ. Когда мы имѣемъ смѣсь нѣсколькихъ газовъ, то молекулы какого-либо одного изъ газовъ будутъ налетать на стѣнку въ томъ же количествѣ и съ тѣми же скоростями, какъ и въ случаѣ, еслибы молекулы другихъ газовъ вовсе отсутствовали. Мы видѣли (стр. 389), что столкновенія между молекулами не могутъ вліять на давленіе газа на поверхность стѣнки. Отсюда и слѣдуетъ, что давленіе p смѣси равно суммѣ парціальныхъ давленій $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$

Иногда разсуждаютъ такъ: пусть v объемъ смѣси, J ея энергія, равная суммѣ энергій $J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$ составныхъ частей смѣси.

Выводъ, подобный выводу формулы (13), даетъ намъ

$$pv = \frac{2}{3}(J_1 + J_2 + J_3 + \ldots).$$

Но

$$p_1 v = \frac{2}{3} J_1;\ p_2 v = \frac{2}{3} J_2 \text{ и т. д., слѣд. } p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$$

Это разсужденіе ничего не прибавляетъ къ тому, что сказано выше.

§ 7. Законъ Гей-Люссака. Что коэффиціентъ α теплового расширенія одинъ и тотъ же для всѣхъ газовъ, вытекаетъ какъ слѣдствіе изъ формулъ кинетической теоріи газовъ. Пусть нѣкоторый газъ при давленіи p занимаетъ объемъ v_0 при 0°, и при томъ же давленіи p объемъ v при температурѣ t^0. Мы имѣемъ

$$v = v_0(1 + \alpha t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Если u_0 и u скорости молекулъ при 0° и t^0, то (10) даетъ

$$pv_0 = \frac{1}{3} Nmu_0^2 \qquad pv = \frac{1}{3} Nmu^2.$$

Сравнивая это съ (20), получаемъ

$$u^2 = u_0^2(1 + \alpha t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Для другого газа обозначимъ массу одной молекулы черезъ m_1, скорости при 0° и t^0 черезъ $u_{1,0}$ и u_1, а коэффиціентъ расширенія черезъ α_1; аналогично (21) имѣемъ

$$u_1^2 = u_{1,0}^2 (1 + \alpha_1 t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

На основаніи сказаннаго въ § 6, живыя силы поступательныхъ движеній одной молекулы того и другого газовъ должны быть равны при всѣхъ температурахъ, т.-е.

$$\frac{1}{2} m u_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_{1,0}^2$$
$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2.$$

Отсюда

$$\frac{u^2}{u_0^2} = \frac{u_1^2}{u_{1,0}^2}.$$

Сравнивая это съ (21) и (22), имѣемъ

$$1 + \alpha t = 1 + \alpha_1 t,$$

т.-е.

$$\alpha = \alpha_1$$

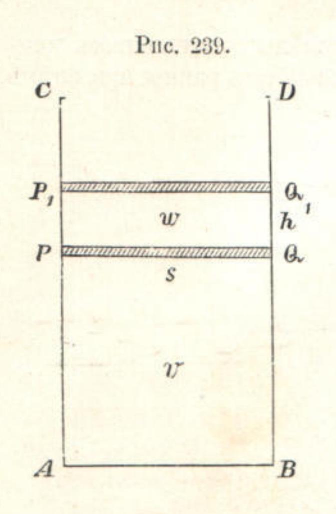
въ чемъ и заключается законъ Гей-Люссака.

§ 8. Теплоемкость газовъ. Намъ необходимо сдѣлать маленькое отступленіе отъ предмета этой главы и познакомиться ближе съ теплоемкостью газовъ. Теплоемкость, вообще говоря, есть величина sui generis, характерная для даннаго вещества и для тѣхъ внѣшнихъ обстоятельствъ, при которыхъ оно находится. При опредѣленномъ выборѣ единицы количества теплоты (калорія) и единицы теплоемкости (воды), теплоемкость «тѣла» измѣряется количествомъ тепла, потребнаго для нагрѣванія его на одинъ градусъ, а теплоемкость вещества—количествомъ тепла, потребнаго для нагрѣванія вѣсовой единицы этого вещества на 1°. Допуская, что въ идеальныхъ газахъ нѣтъ внутренней работы (стр. 342), мы должны заключить, что поглощаемая ими теплота тратится отчасти на нагрѣваніе газа, т.-е. на повышеніе его температуры, отчасти на внѣшнюю работу, производимую газомъ, когда онъ, *расширяясь*, отодвигаетъ тѣ тѣла, которыя производятъ на него давленіе, отличающееся во время расширенія въ каждый данный моментъ отъ упругости газа на безконечно малую величину.

Если газъ *заключенъ въ нерасширяющуюся оболочку*, то внѣшней работы при нагрѣваніи газа вовсе нѣтъ и теплота идетъ только на повышеніе температуры T, и слѣд. по крайней мѣрѣ отчасти на увеличеніе запаса кинетической энергіи J поступательнаго движенія частицъ, какъ видно изъ (13). Теплоемкость газа въ этомъ случаѣ обозначимъ черезъ c_v; она называется *теплоемкостью при постоянномъ объемѣ*. Когда газъ нагрѣвается при постоянномъ объемѣ, то упругость p его увеличивается.

Положимъ теперь, что газъ, занимающій объемъ v, находится при давленіи p, которое не мѣняется при нагрѣваніи; газъ свободно расширяется подъ постояннымъ внѣшнимъ давленіемъ p. Такой случай мы имѣемъ, когда газъ находится въ цилиндрѣ $ABCD$ (рис. 239) подъ подвижнымъ поршнемъ PQ. Теплоемкость газа въ этомъ случаѣ обозначимъ черезъ c_p; ее называютъ теплоемкостью при постоянномъ давленіи. Легко понять, что $c_p > c_v$, ибо c_v численно равно теплотѣ, идущей только на нагрѣваніе газа, а c_p — теплотѣ, которая тратится на то же самое нагрѣваніе и еще на внѣшнюю работу, которую обозначимъ черезъ r. Пусть E механическій эквивалентъ теплоты и A обратная ему величина, т.-е. термическій эквивалентъ работы (стр. 105). Для производства работы r необходимо количество тепла Ar; отсюда слѣдуетъ, что

Рис. 239.



$$c_p = c_v + Ar \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Чтобы вычислить внѣшнюю работу r, производимую вѣсовой единицей газа при нагрѣваніи на 1° подъ постояннымъ давленіемъ p, положимъ, что газъ при $(t+1)^\circ$ занимаетъ объемъ AP_1Q_1B, равный $v+w$; приращеніе объема $w = sh$, гдѣ s поверхность поршня, h высота, на которую онъ поднялся. Давленіе на поршень равно ps; отсюда слѣдуетъ, что работа

$$r = psh = pw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Объемъ газа при 0° равенъ $\frac{v}{1+\alpha t}$, и при $(t+1)^\circ$

$$\frac{v}{1+\alpha t}[1+\alpha(t+1)] = \frac{v(1+\alpha t+\alpha)}{1+\alpha t} = v + \frac{v\alpha}{1+\alpha t}.$$

Послѣдняя величина должна равняться $v+w$; слѣд.

$$w = \frac{v\alpha}{1+\alpha t} = \frac{v}{\frac{1}{\alpha}+t} = \frac{v}{273+t} = \frac{v}{T}.$$

Далѣе (23) даетъ

$$r = \frac{pv}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

или на основаніи формулы Клапейрона $pv = RT$ (стр. 360)

$$r = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Это любопытное равенство показываетъ, что постоянная формулы Клапейрона численно равна работѣ расширенія газа, когда

онъ нагрѣвается на 1° при постоянномъ внѣшнемъ давленіи Формула (22) даетъ

$$c_p - c_v = AR \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

или

$$E(c_p - c_v) = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

и наконецъ, см. (24),

$$pv = E(c_p - c_v)T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Общепринято обозначеніе

$$\frac{c_p}{c_v} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Величина k можетъ быть непосредственно опредѣлена для даннаго газа на основаніи наблюденій надъ скоростью распространенія звука въ этомъ газѣ, такъ какъ въ формулу, опредѣляющую эту скорость, входитъ величина k, какъ мы увидимъ въ ученіи о звукѣ (Отдѣлъ седьмой, Глава I, § 11). Далѣе величина c_p опредѣляется опытнымъ путемъ, а потому удобнѣе исключить изъ нашихъ формулъ величину c_v, и ввести вмѣсто нея k. Имѣемъ

$$c_p - c_v = c_p - \frac{c_p}{k} = c_p\left(1 - \frac{1}{k}\right) = c_p\,\frac{k-1}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Вмѣсто (27) и (28) имѣемъ теперь

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{Rk}{c_p(k-1)} = \frac{pvk}{c_pT(k-1)} \\ pv &= \frac{k-1}{k}\,c_pTE \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Для кислорода, азота и воздуха. . .	$k = 1{,}41$	(32)
» водорода	$k = 1{,}39$	
» углекислоты	$k = 1{,}31$	
» паровъ ртути	$k = 1{,}67$	
» аргона и гелія (?)	$k = 1{,}65$	

§ 9. Энергія газа. Въ § 1 (стр. 386) было упомянуто о трехъ видахъ движеній, возможныхъ въ газахъ: поступательныхъ и вращательныхъ движеній молекулъ и движеній интрамолекулярныхъ или атомныхъ. Полный запасъ энергіи J, заключающійся въ единицѣ объема газа, состоитъ такимъ образомъ изъ трехъ частей, изъ которыхъ мы однако двѣ послѣднія соединимъ вмѣстѣ подъ названіемъ молекулярной энергіи J_m; первую часть, энергію поступательнаго движенія молекулъ, обозначимъ теперь черезъ J_u. Эту величину мы получаемъ изъ (13,a) стр. 393

$$J_u = \frac{3}{2}\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Для опредѣленія полнаго запаса J энергіи, заключающейся при тем-

пературѣ T въ единицѣ объема газа, мы предположимъ, что вѣсовая единица газа нагрѣвается при неизмѣнномъ объемѣ отъ температуры абсолютнаго нуля, при которомъ $J=0$, до температуры T. На это затратится количество теплоты c_vT, которое и даетъ искомое количество энергіи J, если его помножить на E и раздѣлить на v

$$J=\frac{Ec_vT}{v}=\frac{ETc_p}{vk} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Раздѣливъ (33) на (34), получаемъ

$$\frac{J_u}{J}=\frac{3}{2}\,\frac{pvk}{c_pET}.$$

Вторая формула (31) даетъ окончательно

$$\frac{J_u}{J}=\frac{3}{2}(k-1)=\frac{3}{2}\,\frac{c_p-c_v}{c_v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Эту замѣчательную формулу вывелъ Clausius. Она показываетъ, что для даннаго газа энергія поступательнаго движенія частицъ при всѣхъ температурахъ составляетъ одну и ту же часть полнаго запаса энергіи. То же самое, понятно, относится и къ молекулярной энергіи J_m.

Такъ какъ $J=J_u+J_m$, то изъ (35) получается

$$\left.\begin{aligned} J_u&=\frac{3}{2}(k-1)J \\ J_m&=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}-k\right)J \\ \frac{J_m}{J_u}&=\frac{\frac{5}{3}-k}{k-1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Эти формулы вполнѣ выясняютъ въ какомъ постоянномъ, т.-е. отъ температуры независимомъ отношеніи распредѣляется весь запасъ J энергіи газа между энергіей J_u поступательнаго движенія молекулъ и энергіей молекулярной J_m.

Формулы (36) приводятъ къ замѣчательному слѣдствію. Энергія J_m можетъ равняться нулю, или она величина положительная; отсюда слѣдуетъ что k меньше, чѣмъ $\frac{5}{3}$, или, въ крайнемъ случаѣ, равно $\frac{5}{3}$. Итакъ мы имѣемъ для k такіе предѣлы

$$1<k\leqslant\frac{5}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Предѣлъ $k=\frac{5}{3}$ достигается при $J_m=0$; можно было ожидать, что къ такому предѣлу приблизятся одноатомные газы, для которыхъ вовсе

нѣтъ интрамолекулярной энергіи и слѣд. J_m состоитъ только изъ энергіи вращенія молекулъ. Къ одноатомнымъ газамъ принадлежитъ паръ ртути и для него Kund и Warburg (1876) дѣйствительно нашли $k=1{,}67$, см. (32).

Формулы (36) и числа (32) даютъ:

	$\frac{J_u}{J}$	$\frac{J_m}{J_u}$
Воздухъ	0,608	0,645
Водородъ	0,578	0,731
Углекислота	0,458	1,184
Пары ртути	1	0

§ 10. Истинныя скорости молекулъ. Законъ Максвелла. Во всѣхъ предыдущихъ выводахъ мы предполагали, что всѣ молекулы газа обладаютъ одинаковою скоростью u. Въ дѣйствительности молекулы должны обладать различными скоростями, непрерывно мѣняющимися для одной данной молекулы при ея столкновеніяхъ съ другими.

Clerk Maxwell рѣшилъ вопросъ о томъ, какъ распредѣлены различныя скорости между молекулами даннаго количества газа. Ограничиваемся сообщеніемъ результата. Въ данномъ объемѣ газа, содержащемъ весьма большое число N молекулъ, встрѣчаются, теоретически говоря, всѣ скорости отъ $u=0$ до $u=\infty$, но число молекулъ n, обладающихъ скоростью, заключающеюся между нѣкоторымъ опредѣленнымъ u и $u+du$, зависитъ отъ u; оно велико для такихъ u, которыя близки къ нѣкоторому среднему значенію и весьма ничтожно для скоростей u, значительно отличающихся отъ этого средняго значенія, иначе говоря, число частицъ съ очень малою или очень большою скоростью ничтожно. Maxwell далъ для n слѣдующую формулу

$$n=\frac{4}{\sqrt{\pi}}N(km)^{\frac{3}{2}}e^{-kmu^2}u^2du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Итакъ здѣсь N число всѣхъ молекулъ, n число молекулъ, скорости которыхъ заключаются между u и $u+du$, m масса одной молекулы. Величина k имѣетъ слѣдующее значеніе. Пусть G^2 среднее значеніе всѣхъ величинъ u^2; G называется среднею квадратичною скоростью. Если бы всѣ молекулы обладали скоростью G, то энергія J_u поступательнаго движенія имѣла бы то же самое значеніе, какое она имѣетъ въ дѣйствительности; слѣд.

$$J_u=\sum\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}NmG^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Величина

$$i=\frac{1}{2}mG^2$$

представляетъ среднюю энергію поступательнаго движенія одной молекулы. Величина k въ (38) опредѣляется формулою

$$k=\frac{3}{4i}=\frac{3}{2mG^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Произведеніе km, два раза встрѣчающееся въ (38), равно слѣд.

$$km = \frac{3}{2G^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Не трудно вывести соотношеніе (41) и непосредственно изъ (38) и (39). Вычислимъ для этого прежде всего энергію J_u газа. Для этого слѣдуетъ число n частицъ помножить на $\frac{1}{2}mu^2$, чтобы получить энергію этой группы n частицъ, и затѣмъ просуммировать полученный результатъ для всѣхъ u отъ $u=0$ до $u=\infty$. Получаемъ

$$J_u = \frac{2Nm}{\sqrt{\pi}}(km)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-kmu^2} u^4 du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Если въ интегралъ подставить $kmu^2 = x^2$, то получимъ

$$\int_0^\infty e^{-kmu^2} u^4 du = \frac{1}{(km)^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty e^{-x^2} x^4 dx.$$

Интегрируя два раза по частямъ, имѣемъ

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^4 dx = \frac{3}{4} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi},$$

ибо послѣдній интегралъ равенъ $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Итакъ

$$J_u = \frac{2Nm}{\sqrt{\pi}}(km)^{\frac{3}{2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{8(km)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3N}{4k}.$$

Сравнивъ это съ (39), получаемъ

$$\frac{3N}{4k} = \frac{1}{2}NmG^2 \text{ или } \frac{3}{2km} = G^2,$$

откуда и получается (41).

Такъ какъ полное число молекулъ равно N, то сумма выраженій (38) должна равняться N. И дѣйствительно весьма легко вывести, что

$$\int_0^\infty \frac{4N}{\sqrt{\pi}}(km)^{\frac{3}{2}} e^{-kmu^2} u^2 du = N.$$

Найдемъ значеніе средней скорости Ω всѣхъ газовыхъ частицъ; она очевидно равна

$$\Omega = \frac{\Sigma nu}{\Sigma n} = \frac{\Sigma nu}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Вставляя сюда n изъ (38) и замѣняя сумму интеграломъ, имѣемъ

$$\Omega = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(km)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty e^{-kmu^2}u^3du.$$

Вводя новую перемѣнную $u^2 = x$, имѣемъ

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(km)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty e^{-kmx}xdx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(km)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{k^2m^2}.$$

Послѣднiй интегралъ вычисляется легко, если его проинтегрировать по частямъ. Итакъ

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{km}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Вставляя (41), получаемъ

$$\Omega = G\sqrt{\frac{8}{3\pi}} = 0{,}9212\,G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Это весьма замѣчательное соотношенiе между среднею ариѳметическою скоростью Ω и среднею квадратичною G.

Рѣшимъ наконецъ еще вопросъ о величинѣ той скорости U, около которой находятся величины наибольшаго числа скоростей; она называется наивѣроятнѣйшею скоростью. Мы получимъ ее, опредѣливъ условiе, при которомъ выраженiе (38) достигаетъ максимума своего значенiя. Приравнявъ производную отъ $e^{-kmu^2}u^2$ нулю и вставивъ U вмѣсто u, получаемъ

$$e^{-kmU^2}2U - e^{-kmU^2}2kmU^3 = 0,$$

откуда

$$U = \frac{1}{\sqrt{km}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Теперь (41) и (44) даютъ

$$\left.\begin{aligned} G &= \sqrt{\frac{3}{2}}\,U \\ \Omega &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,U \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Оказывается, что

$$U < \Omega < G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Мы вывели формулы (13) $pv = \frac{1}{3}Nmu^2$ и $pv = \frac{2}{3}J$ въ предположенiи, что всѣ молекулы обладаютъ одною общею скоростью u. Если же выйти изъ формулы Maxwell'а о распредѣленiи скоростей между моле-

кулами и вычислить давленіе газа на стѣнку сосуда, то оказывается, что формула $pv = \frac{2}{3} J$ остается вѣрною и мы получаемъ, см. (39),

$$pv = \frac{2}{3} J = \frac{1}{3} NmG^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Итакъ въ формулахъ (1), (10) и (13) слѣдуетъ вмѣсто u положить не среднюю ариѳметическую скорость Ω, но среднюю квадратичную G.

Вводя Ω, см. (45), получаемъ

$$pv = \frac{\pi}{8} Nm\Omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Формула (16) остается вѣрною для G и мы имѣемъ

(45) даетъ
$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{485}{\sqrt{\delta}} \frac{\text{метр.}}{\text{сек.}} \\ \Omega &= \frac{447}{\sqrt{\delta}} \frac{\text{метр.}}{\text{сек.}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Средняя квадратичная и средняя ариѳметическая скорости обратно пропорціональны корню квадратному изъ плотности δ газа. Мы имѣемъ при 0°:

для кислорода .	$G = 461$ м.	$\Omega = 425$ м.	$U = 410$ м.
для водорода . .	$G = 1843$ »	$\Omega = 1698$ »	$U = 1640$ »

Формула (21), въ которой слѣдуетъ положить G вмѣсто u, и (45) показываютъ, что

$$\left.\begin{aligned} G &= G_0 \sqrt{1 + \alpha t} \\ \Omega &= \Omega_0 \sqrt{1 + \alpha t} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

гдѣ G_0 и Ω_0 относятся къ 0°.

§ 11. Средняя длина пути. Длина пути l, который проходитъ молекула между двумя столкновеніями съ другими молекулами, очевидно должна быть величиною, колеблющеюся для даннаго газа въ широкихъ размѣрахъ. Иногда молекула, столкнувшись съ другою, пройдетъ затѣмъ длинный путь, случайно не встрѣчая на этомъ пути новой молекулы, а иногда вслѣдъ за однимъ столкновеніемъ тотчасъ же послѣдуетъ другое. Все зависитъ отъ случая. Но именно вездѣ тамъ, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ весьма большимъ числомъ однородныхъ событій, выростаютъ изъ кажущейся случайности наиболѣе точные законы.

Втеченіе одной секунды происходитъ въ одномъ куб. см. воздуха непостижимо огромное число столкновеній между молекулами газа; еще больше число различныхъ путей l, пробѣгаемыхъ между столкновеніями. Среднюю изъ всѣхъ этихъ l обозначимъ черезъ L и назовемъ среднею

длиною пути молекулъ (подразумѣвается: между двумя столкновеніями). Эта величина должна зависѣть только отъ густоты распредѣленія молекулъ, т.-е. отъ степени сжатія или отъ упругости газа, и отъ размѣровъ молекулъ. Чѣмъ болѣе газъ сжатъ и чѣмъ больше размѣры молекулъ, тѣмъ чаще они должны встрѣчаться и тѣмъ короче должна быть средняя длина пути L.

Допуская, что всѣ молекулы движутся съ одинаковой скоростью, Clausius далъ слѣдующую формулу для средней длины пути L

$$L = \frac{3}{4} \frac{\lambda^3}{\pi\rho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

гдѣ λ среднее разстояніе центровъ молекулъ другъ отъ друга, а слѣд. λ^3 то пространство, на которое, въ среднемъ, приходится по одной молекулѣ. Если N число частицъ въ объемѣ v, то

$$v = N\lambda^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

Величина ρ равна разстоянію центровъ двухъ молекулъ въ моментъ удара, т.-е. наименьшему разстоянію, до котораго эти центры могутъ приблизиться другъ къ другу. Величину $r = \frac{\rho}{2}$ можно условно назвать радіусомъ молекулы. Если ввести r въ (53), то изъ выраженія для L можно получить пропорцію

$$\frac{L}{\frac{1}{4} r} = \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{N\lambda^3}{\frac{4}{3} N\pi r^3} = \frac{v}{v'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

ибо $N\lambda^3 = v$; далѣе $\frac{4}{3}\pi r^3$ можно назвать объемомъ молекулы, а потому $\frac{4}{3} N\pi r^3$ есть объемъ v', какъ бы фактически занимаемый молекулами. Получается такое слѣдствіе: средняя длина пути во столько разъ больше четверти радіуса молекулы, во сколько разъ объемъ v, занимаемый газомъ, больше объема v', заполненнаго молекулами.

Такъ какъ v обратно пропорціонально упругости p, а r и v' отъ p не зависятъ, то оказывается, что средняя длина пути обратно пропорціональна упругости газа или его плотности D (относительно воды).

Если принять во вниманіе законъ Maxwell'a о распредѣленіи скоростей между молекулами газа, то для L получается выраженіе, нѣсколько отличающееся отъ (53), а именно

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{\pi\rho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

Вмѣсто $\frac{3}{4} = 0{,}75$, получается $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$.

При выводѣ формулъ (53) и (56) предполагается, что ρ весьма мало сравнительно съ L, т.-е. что v' весьма мало сравнительно съ v. Если не вводить этого предположенія, то получается болѣе точная формула

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{\pi \rho^2} - \frac{2}{3} \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Такъ какъ λ и ρ неизвѣстны, то по этимъ формуламъ и невозможно найти L.

Введемъ въ (56) радіусъ r молекулы, равный $\frac{\rho}{2}$, и допустимъ, что въ единицѣ объема заключается n молекулъ; тогда $n\lambda^3 = 1$, откуда $\lambda^3 = \frac{1}{n}$; (56) даетъ

$$L = \frac{1}{4\sqrt{2}\, n\pi r^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}\, Q}.$$

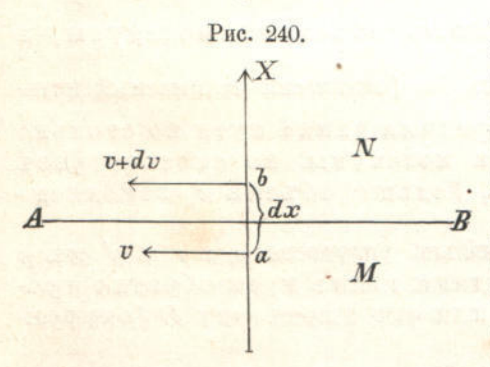
Величина $Q = n\pi r^2$ есть сумма площадей поперечныхъ сѣченій всѣхъ молекулъ, содержащихся въ единицѣ объема газа. Послѣдняя формула даетъ

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{2}\, L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Это весьма замѣчательная формула, связывающая площадь Q и среднюю длину пути L.

§ 12. Внутреннее треніе въ газахъ. Когда соприкасающіеся слои M и N (рис. 240) какого-либо вещества движутся параллельно плоскости AB ихъ геометрическаго раздѣла (соприкасанія) съ различными скоростями, то между слоями обнаруживается взаимодѣйствіе. На слой, движущійся быстрѣе, дѣйствуетъ нѣкоторая сила f, направленная обратно его движенію, т.-е. сила замедляющая, а на слой, движущійся медленнѣе, дѣйствуетъ такая же сила, ускоряющая его движеніе. Условимся силу f относить къ опредѣленной поверхности s соприкосновенія слоевъ; очевидно f пропорціонально s. Далѣе f должно быть тѣмъ больше, чѣмъ больше разность скоростей двухъ слоевъ. Проведемъ ось x-овъ перпендикулярно къ поверхности s; пусть v есть скорость точки a одного слоя газа и $v + dv$ скорость точки b другого слоя, находящейся отъ a на разстояніи $ab = dx$. Сила f пропорціональна быстротѣ, съ которой скорость v мѣняется, если мысленно идти вдоль оси x-овъ, т.-е. она пропорціональна производной $\frac{dv}{dx}$, получаемой, если скорости v слоевъ разсматривать какъ функціи координаты x.

Рис. 240.



т.-е. ихъ разстоянія отъ какой нибудь начальной плоскости. Окончательно имѣемъ

$$f = \eta s \frac{dv}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Величина η называется коеффиціентомъ внутренняго тренія или вязкости газа. Это величина sui generis, характерная для даннаго газа; она численно равна силѣ, дѣйствующей на единицу поверхности ($s = 1$) слоя, когда на единицѣ длины, взятой перпендикулярно къ слоямъ, скорость мѣняются на единицу $\left(\frac{dv}{dx} = 1\right)$. За единицу вязкости ($\eta = 1$) принята при этомъ вязкость такого вещества, въ которомъ на единицу поверхности слоя ($s = 1$) дѣйствуетъ единица силы ($f = 1$) при упомянутомъ условіи $\frac{dv}{dx} = 1$. Не трудно формулировать опредѣленіе *C. G. S.* единицы вязкости ($f =$ дину на $s = 1$ кв. см., когда на протяженіи одного сантиметра скорость мѣняется на 1 см. въ сек.).

Происхожденіе тренія въ газахъ можно объяснить слѣдующимъ образомъ. Двигаясь по всевозможнымъ направленіямъ, молекулы слоя *M* попадаютъ въ слой *N*, гдѣ онѣ встрѣчаются съ молекулами, обладающими большею скоростью $v + dv$ по направленію, параллельному плоскости *AB*, чѣмъ скорость v, которую онѣ сами имѣютъ въ этомъ направленіи. Ясно, что при столкновеніяхъ онѣ замедляющимъ образомъ подѣйствуютъ на движеніе слоя *N*. Наоборотъ, молекулы, переходящія изъ *N* въ *M*, должны увеличивать скорость движенія параллельно *AB* молекулъ, содержащихся въ *M*. Вычисленіе даетъ для η выраженіе

$$\eta = \frac{1}{3} nmL\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Здѣсь n число молекулъ въ единицѣ объема, m масса одной молекулы, L средняя длина пути (§ 11) и Ω средняя скорость движенія молекулъ. Вмѣсто $\frac{1}{3}$ нѣкоторые ученые находятъ $\frac{\pi}{8}$, а также $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$. Вставимъ (56) въ (60) и вспомнимъ, что $n\lambda^3 = 1$; получаемъ

$$\eta = \frac{m\Omega}{3\sqrt{2}\,\pi\rho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

гдѣ ρ діаметръ молекулы. Величины m, ρ и Ω зависятъ только отъ рода газа и отъ его температуры, но не зависятъ отъ его упругости, т.-е. отъ его плотности *D*. Отсюда слѣдуетъ замѣчательный законъ Maxwell'а:

Внутреннее треніе даннаго газа не зависитъ отъ его плотности *D*, т.-е. оно одинаковое, какъ въ сгущенномъ, такъ и въ разрѣженномъ газѣ. Такой, съ перваго взгляда, парадоксальный законъ объясняется тѣмъ, что если удвоить плотность, то вдвое большее число частицъ будетъ переходить изъ одного слоя въ другой, но зато они вдвое менѣе

глубоко входятъ въ этотъ слой, чѣмъ и компенсируется вліяніе увеличенія вдвое числа молекулъ.

Коеффиціентъ η можетъ быть опредѣленъ опытнымъ путемъ на основаніи наблюденія логариѳмическаго декремента (стр. 138) качаній тѣла въ данномъ газѣ, напр. круглой горизонтальной пластинки, привѣшенной въ ея центрѣ къ нити, около которой, какъ около оси, она вращается; далѣе η опредѣляется скоростью истеченія газа черезъ весьма тонкія трубки. Опыты вполнѣ подтвердили, что η въ широкихъ предѣлахъ не зависитъ отъ p или D; но при очень слабыхъ и весьма сильныхъ давленіяхъ законъ Maxwell'а перестаетъ быть вѣрнымъ.

Формулы (60) и (52) показываютъ, что η зависитъ отъ температуры, и что если значеніе вязкости при 0° обозначить черезъ η_0, то при t°

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1+\alpha t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Результаты опытовъ выражаютъ иногда одною изъ эмпирическихъ формулъ: $\eta = \eta_0 (1+\alpha t)^n$, $\eta = \eta_0 (1+\beta t)$, $\eta = \eta_0 (1+\alpha t)^{\frac{1}{2}} (1+\gamma t)^2$, гдѣ n, α, β и γ постоянныя.

Изъ опытовъ получились для η въ $C. G. S.$ единицахъ такія численныя значенія:

	20°	180°
водородъ	0,000092	0,000123
кислородъ	0,000212	0,000281
азотъ	0,000184	0,000240
углекислота	0,000161	0,000215

При 357° имѣемъ для H_2, CO_2 и для паровъ ртути слѣдующія относительныя числа:

$$\frac{\eta(Hg)}{\eta(CO_2)} = 2{,}08; \quad \frac{\eta(Hg)}{\eta(H_2)} = 4{,}04,$$

какъ показали Noyes и Goodwin.

§ 13. Величина средней длины пути. Зная η, мы можемъ на основаніи формулы (60) вычислить и среднюю длину L пути газовыхъ молекулъ. Произведеніе nm равно массѣ куб. см. газа; при 0° и давленіи 760 мм. nm для воздуха равно 0,00129 гр., а слѣд. для произвольнаго газа $nm = 0{,}00129\delta$, гдѣ δ, какъ всегда, плотность газа. Далѣе мы имѣли, см. (51),

$$\Omega = \frac{44700}{\sqrt{\delta}} \ \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$$

Теперь (60) даетъ, если вмѣсто $\frac{1}{3}$ положимъ $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$ (см. стр. 407).

$$L = \frac{\eta}{0{,}318\, nm\Omega} = \frac{\eta\sqrt{\delta}}{0{,}318 \times 0{,}00129\,\delta \times 44700} \text{ см.},$$

или окончательно

$$L = \frac{\eta}{19{,}6\sqrt{\delta}} \text{ см.}$$

Для воздуха $\eta = 0{,}000175$, $\delta = 1$ и слѣд.

$$L = 0{,}000009 \text{ см.} = 0{,}00009 \text{ мм.} \quad \dots\dots \quad (63)$$

Итакъ средняя длина пути оказывается приблизительно равною одной десятитысячной долѣ миллиметра. Число ν столкновеній частицы въ сек. получаемъ, раздѣляя среднюю скорость Ω на длину пути L:

$$\nu = \frac{\Omega}{L} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (64)$$

для воздуха

$$\nu = \frac{44700}{0{,}000009} = 4980 \text{ милліоновъ.}$$

Наконецъ (58) даетъ возможность опредѣлить сумму Q площадей поперечныхъ сѣченій молекулъ, содержащихся въ куб. см. газа:

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{2}\,L} = \frac{19{,}6}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\delta}}{\eta} = \frac{4{,}9}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\delta}}{\eta} \quad \dots\dots \quad (65)$$

Вставляя сюда L для воздуха, находимъ поразительно большое число: $Q = 18500$ кв. см. $= 1{,}85$ кв. метра.

Сопоставимъ нѣкоторыя числа для L, ν и Q (давленіе 760 мм. и темпер. около 20°)

	L см.	ν милліоны	Q кв. см.
Водородъ	0,0000185	9480	8500
Азотъ	0,0000099	4760	17900
Кислородъ	0,0000106	4065	16700
Углекислота	0,0000068	5510	26000

§ 14. Размѣры и число молекулъ. Въ настоящее время существуетъ цѣлый рядъ методовъ приблизительнаго опредѣленія размѣровъ молекулъ. Нѣкоторые изъ этихъ методовъ опираются на формулы кинетической теоріи газовъ; другіе основаны на изученіи явленій электролиза, на явленіяхъ оптическихъ, электростатическихъ и т. д. Укажемъ на два изъ этихъ методовъ.

Формулу (56) можно преобразовать аналогично тому, какъ мы изъ (53) вывели (55), обозначивъ черезъ N число молекулъ въ объемѣ v ($N\lambda^3 = v$) и черезъ $v' = \frac{4}{3} N\pi\left(\frac{\rho}{2}\right)^3$ объемъ занимаемый молекулами. Имѣемъ

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{\pi\rho^2} = \frac{N\lambda^3\rho}{6\sqrt{2}.\ \frac{4}{3} N\pi\left(\frac{\rho}{2}\right)^3} = \frac{\rho v}{6v'\sqrt{2}}.$$

Если ввести величину

$$w = \frac{v'}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

то получается для діаметра ρ молекулы формула

$$\rho = 6\sqrt{2}\, wL \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Когда газъ приведенъ въ жидкое состояніе, то объемъ полученной жидкости по всей вѣроятности мало превышаетъ величину v' и потому w не больше отношенія плотности вещества въ газообразномъ состояніи къ плотности того же вещества въ жидкомъ состояніи. Плотность жидкаго кислорода около 0,9, плотность газообразнаго при 0° и 760 мм. равна 0,00143; отсюда $w = 0{,}0016$. Полагая $L = 0{,}00001$ см., получаемъ

$$\rho = 6\sqrt{2} \times 0{,}0016 \times 0{,}00001 \text{ см.} = 1{,}3\,.\,10^{-6} \text{ мм.}$$

Итакъ верхній предѣлъ для діаметра молекулы кислорода приблизительно одна милліонная миллиметра.

Другой путь опредѣленія ρ основанъ на выраженіи отступленій отъ закона Бойля-Маріотта формулою van der Waals'а (стр. 361). Величина b находится въ простой зависимости отъ объема, занимаемаго молекулами газа. Ограничиваемся сообщеніемъ результата: для воздуха получается приблизительно ρ равно 0,3 милліонныхъ долей миллиметра, что довольно хорошо согласуется съ предыдущимъ.

Въ § 13 мы видѣли, какъ опредѣляется величина

$$Q = n\pi\left(\frac{\rho}{2}\right)^2,$$

гдѣ n число молекулъ въ единицѣ объема. Мы имѣемъ

$$n = \frac{4Q}{\pi\rho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

Вставляя для кислорода $Q = 16700$ кв. см. и $\rho = 0{,}3.10^{-7}$ см., получаемъ

$$n = 20\,.\,10^{18} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Въ одномъ куб. см. воздуха, а слѣд. по закону Авогадро и всякаго другого газа, находится при 0° и 760 мм. давленія около двадцати трилліоновъ молекулъ.

Равенство $n\lambda^3 = 1$ даетъ намъ среднее разстояніе λ молекулъ:

$$\lambda = \text{отъ 3 до 4-хъ милліонныхъ миллиметра.}$$

Если расположить рядомъ молекулы, содержащіяся въ одномъ куб. сантим. воздуха, то получилась бы нить, длина которой въ 50 разъ превысила бы длину земного экватора. Величина молекулы относится къ

величинѣ обыкновенной крупной дробинки примѣрно, какъ куб. сантиметръ относится къ величинѣ земного шара.

Мы намѣтили въ этой главѣ лишь самые основные контуры того обширнаго и стройнаго зданія, которое называется кинетическою теоріей газовъ. Въ дальнѣйшемъ намъ еще придется ссылаться на то, что здѣсь было изложено и выведено.

ЛИТЕРАТУРА.

Кинетическая теорія газовъ.

Dan. Bernoulli. Hydrodynamica, 1738. См. Pogg. Ann. 107 p. 490, 1859.
Herapath. Annals of philosophy, New series Vol. I p. 273, 340, 401, 1821 г.
Joule. Phil. mag. (4) 14 p. 211, 1857.
A. Kroenig. Pogg. Ann. 99 p. 315, 1856.
Clausius. Pogg. Ann. 100 p. 353, 1857; 105 p. 239, 1858; 115 p. 1, 1862. Phil. Mag. (4) 14 p. 108; 17 p. 81; 23 p. 417 и 512, 1862.
Clausius. Die kinetische Theorie der Gase. (Mechanische Waermetheorie, 2-te Aufl., Bd. III). Braunschweig, 1889—1891.
Maxwell. Phil. Mag. (4) 19 p. 22, 1860 г.; 35 p. 129, 185, 1868. Cambridge. Phil. Trans. 13, part. 3 p. 547.
L. Boltzmann. Wien. Ber. 58, 63, 66, 72, 74, 77, 78, 84, 94, 1868—1886; W. A. 8 p. 653, 1879; 11 p. 529, 1880; 57 p. 773, 1896.
L. Boltzmann. Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig, 1895.
O. E. Meyer. Kinetische Theorie der Gase, Breslau 1895 (2-ое изд.).
O. E. Meyer. W. A. 7 p. 317, 1879; 10 p. 296, 1889.
Н. Пироговъ. Ж. Ф.-Х. Общ. 17 стр. 114. 281, 1883; 18 стр. 93, 295, 1884; 21 стр. 44, 76, 1889; 22 стр. 44, 1890; Exner's Rep. 27 p. 515, 1891.
Watson. A Treatise on the kinetic theory of Gases. Oxford 1876.
H. A. Lorenz. W. A. 12 p. 127, 660, 1881.
Stefan. Wien. Ber. 65 p. 360, 1872.
Noyes and Goodwin. Phys. Review. IV p. 207, 1896.
Stankewitsch. W. A. 29 p. 153, 1886.
Станкевичъ. Кинетическая теорія газовъ, Москва. 1884.
Станкевичъ. Теорія многоатомныхъ газовъ. Варшава. 1893.
Столѣтовъ. Очеркъ развитія нашихъ свѣдѣній о газахъ. Москва, 1879.
По вопросу о законѣ Maxwell'а см. интересную полемику между Bertrand'омъ и Boltzmann'омъ въ C. R. 123, 1896 г.

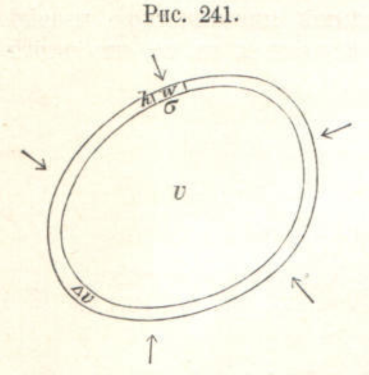
ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Газы въ состояніи движенія и распаденія.

§ 1. Работа расширенія или сжатія газа. Положимъ, что объемъ v_1 газа, находящагося подъ давленіемъ p_1, увеличился или уменьшился до новаго объема v_2, вслѣдствіе того, что давленіе p_1 стало непрерывно (не скачками) уменьшаться или увеличиваться до новаго значенія p_2. Требуется вычислить ту работу r, которую въ первомъ случаѣ совершитъ газъ, а во второмъ — внѣшняя причина, сдавливающая газъ. Пока измѣняется

объемъ газа, онъ можетъ получать теплоту отъ окружающихъ тѣлъ или отдавать теплоту, переходящую на эти тѣла. Этимъ обусловливается возможность перейти отъ начальнаго состоянія газа (p_1, v_1) къ новому (p_2, v_2) безконечно разнообразными способами.

Рис. 241.



Мы можемъ весь переходъ объема отъ v_1 до v_2 разбить на весьма большое число весьма малыхъ измѣненій объема и допустить, что каждое изъ нихъ происходитъ при нѣкоторомъ постоянномъ давленіи. Опредѣлимъ работу Δr, которая производится газомъ при весьма маломъ измѣненіи Δv его объема v (рис. 241), когда внѣшнее давленіе равно p. Пусть σ элементъ поверхности газа; на него производится давленіе $p\sigma$. Положимъ, что элементъ σ передвинулся на величину h (см. рисунокъ) и пусть $\sigma h = w$ весьма малая часть полнаго приращенія объема Δv. Работа, затраченная газомъ на передвиженіе элемента σ, равна $p\sigma \,.\, h = pw$. Вся искомая работа Δr равна суммѣ величинъ pw, взятыхъ для всѣхъ элементовъ σ поверхности газа. Итакъ

$$\Delta r = \sum pw = p \sum w = p \,.\, \Delta v,$$

или точнѣе: дифференціалъ работы газа dr при увеличеніи объема на дифференціалъ объема dv равенъ

$$dr = pdv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Вся работа r, произведенная газомъ при расширеніи, равна

$$r = \int_{v_1}^{v_2} pdv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Очевидно, что формула (2) одинаково относится и къ жидкимъ и къ твердымъ тѣламъ. Чтобы произвести работу r газъ долженъ затратить эквивалентное количество энергіи, которое можетъ притечь къ нему извнѣ, напр. въ видѣ тепла, или которое газъ долженъ взять изъ собственнаго запаса энергіи, пропорціональнаго, какъ мы видѣли, абсолютной температурѣ газа. Для вычисленія интеграла (2) мы должны знать, въ какой зависимости находится p отъ v.

Особый интересъ представляетъ случай изотермическаго измѣненія объема газа, т.-е. такого, при которомъ температура газа не мѣняется. Обозначимъ абсолютную температуру газа черезъ T и положимъ, что газъ окруженъ весьма большимъ или непрерывно возобновляющимся количествомъ какого-либо вещества, температура котораго T, напр. тающимъ льдомъ, парами какой либо кипящей жидкости или струею воды постоянной температуры. Вся энергія, необходимая для производства ра-

боты r расширенія, притекаетъ отъ этого вещества къ газу, температура T котораго, такимъ образомъ, не мѣняется. Давленіе p и объемъ v связаны въ этомъ случаѣ закономъ Бойля-Маріотта и мы имѣемъ

$$pv = p_1 v_1 = p_2 v_2 = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ R постоянная формулы Клапейрона (стр. 360). Формула (3) даетъ $p = \frac{RT}{v}$; вставляя это въ (2), получаемъ, такъ какъ T постоянное,

$$r = RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = RT \lg \frac{v_2}{v_1}.$$

На основаніи (3) имѣемъ такія формулы для r:

$$r = RT \lg \frac{v_2}{v_1} = RT \lg \frac{p_1}{p_2} = p_1 v_1 \lg \frac{v_2}{v_1} = p_2 v_2 \lg \frac{v_2}{v_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Здѣсь lg знакъ натуральнаго логариѳма. Тѣ же формулы даютъ работу, которую надо затратить, чтобы объемъ газа при постоянной температурѣ уменьшить отъ v_2 до v_1, причемъ эквивалентное количество тепла $q = Ar$, гдѣ A термическій эквивалентъ работы (стр. 105), перейдетъ отъ сжимаемаго газа къ окружающему его веществу.

§ 2. Внезапное расширеніе или сжатіе газа; адіабатическое или изентропическое измѣненіе состоянія газа. Положимъ, что объемъ v_1 газа въ столь короткій промежутокъ времени переходитъ въ объемъ v_2, что втеченіе этого времени газъ не успѣетъ получить теплоты отъ окружающихъ его тѣлъ, или отдать теплоту этимъ тѣламъ. Вся энергія, потребная на производство работы расширенія, должна быть взята изъ самого газа, который станетъ охлаждаться; наоборотъ, при сжатіи газа теплота, эквивалентная работѣ внѣшнихъ силъ, остается въ немъ и онъ нагрѣвается. Измѣненіе состоянія тѣла, при которомъ не происходитъ теплового обмѣна между тѣломъ и остальнымъ міромъ, называется адіабатическимъ или изентропическимъ.

Если бы мы могли газъ окружить абсолютными непроводниками тепла, то и при медленныхъ измѣненіяхъ объема происходили бы адіабатическія измѣненія его состоянія.

Найдемъ прежде всего связь между v и p при адіабатическихъ измѣненіяхъ идеальнаго газа. Когда объемъ газа, находящагося подъ давленіемъ p, увеличится на dv, то производится работа pdv, см. (1), и на это тратится количество тепла $dq = Apdv$. Эта теплота берется изъ самого газа, температура t^0 котораго измѣнится на $-dt$ градусовъ. Но на одно только нагрѣваніе газа на 1^0 требуется количество тепла c_v (стр. 397), слѣд. $dq = -c_v dt$. Такимъ образомъ

$$Apdv = -c_v dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Уравненіе Клапейрона $pv = RT$ даетъ $pdv + vdp = RdT$. Но $dT = d(273 + t) = dt$, слѣд. $dt = \frac{1}{R}(pdv + vdp)$.

Вставляемъ это въ (5)

$$\left(A + \frac{c_v}{R}\right) pdv = - \frac{c_v}{R} vdp,$$
$$(AR + c_v) pdv = - c_v vdp.$$

Но мы имѣли

$$c_p - c_v = AR \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

см. (26) стр. 399; $AR + c_v = c_p$. Вводя величину $k = \frac{c_p}{c_v}$, см. (29) стр. 399, получаемъ $kpdv = - vdp$, или

$$k \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Обозначимъ начальныя значенія объема и давленія черезъ v_1 и p_1, а окончательныя черезъ v_2 и p_2. Равенство (7) даетъ

$$k \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p},$$

т.-е.

$$k \lg \frac{v_2}{v_1} = - \lg \frac{p_2}{p_1} = \lg \frac{p_1}{p_2}.$$
$$\lg \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k = \lg \frac{p_1}{p_2}.$$
$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k = \frac{p_1}{p_2},$$

или, наконецъ

$$p_1 v_1{}^k = p_2 v_2{}^k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Въ виду произвольности начальныхъ и конечныхъ величинъ объема и давленія, это равенство показываетъ, что при адіабатическомъ измѣненіи состоянія газа, его объемъ v и упругость p связаны уравненіемъ

$$\left.\begin{aligned} pv^k &= \text{Const.} \\ k &= \frac{c_p}{c_v} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Это формула Пуассона (Poisson). Для изотермическихъ измѣненій мы имѣли формулу Бойля-Маріотта $pv = \text{Const.}$, откуда $p = \frac{\text{Const.}}{v}$, т.-е. упругость обратно пропорціональна объему. Здѣсь имѣемъ $pv^k = \text{Const.}$, гдѣ для нѣкоторыхъ газовъ, каковы N, O, H, CO, величина $k = 1{,}41$ и для всѣхъ $k > 1$; отсюда $p = \frac{\text{Const.}}{v^k}$, т.-е. упругость мѣняется быстрѣе, чѣмъ обратно

пропорціонально объему. Если $k = 1{,}41$ и объемъ уменьшится въ 10 разъ, то упругость возростетъ въ $10^{1,41} = 25{,}7$ разъ.

Обратимся къ вопросу о температурѣ газа, подвергаемаго адіабатическимъ измѣненіямъ. Если въ (5) вставить вмѣсто p его значеніе, взятое изъ формулы $pv = RT$, то получится

$$\frac{ART}{v}\,dv = -\,c_v dt;$$

(6) даетъ отсюда

$$\frac{(c_p - c_v)\,T dv}{v} = -\,c_v dt.$$

Подставимъ dT вмѣсто dt, раздѣлимъ все равенство на $c_v T$ и введемъ $k = \frac{c_p}{c_v}$; получается

$$(k-1)\frac{dv}{v} = -\frac{dT}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Если начальные объемъ и температура v_1 и T_1, окончательные v_2 и T_2, то (10) даетъ

$$(k-1)\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = -\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}$$

$$(k-1)\lg\frac{v_2}{v_1} = -\lg\frac{T_2}{T_1} = \lg\frac{T_1}{T_2}$$

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1} = \frac{T_1}{T_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$T_1 v_1^{\,k-1} = T_2 v_2^{\,k-1}.$$

Отсюда заключаемъ, что при адіабатическомъ измѣненіи состоянія газа, объемъ v и абсолютная температура T связаны уравненіемъ

$$Tv^{k-1} = \text{Const.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Абсолютныя температуры газа при адіабатическихъ измѣненіяхъ его состоянія, обратно пропорціональны $(k-1)$-ымъ степенямъ его объема.

Положимъ, что начальная температура $t_1 = 0^\circ$, т.-е. $T_1 = 273^\circ$. Найдемъ температуры t_2 газа послѣ внезапнаго уменьшенія его объема до половины. (11) даетъ; такъ какъ $\frac{v_1}{v_2} = 2$,

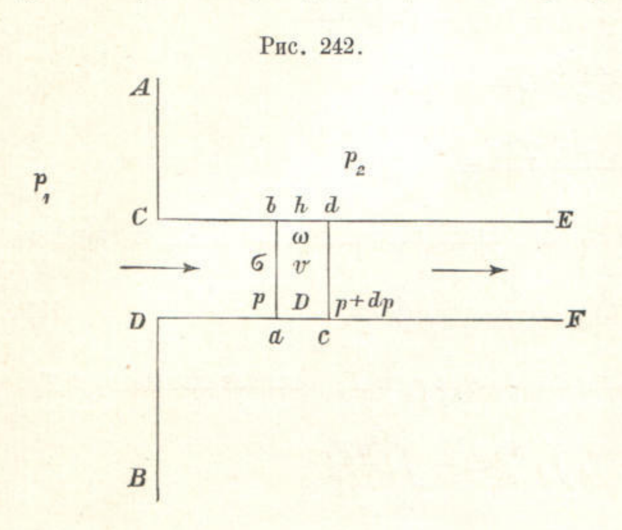
$$T_2 = 273\,.\,2^{k-1} = 273\,.\,2^{0,41} = 371{,}2 = t_2 + 273\ ;\ t_2 = 98^\circ{,}2.$$

Газъ нагрѣется отъ 0° до $98^\circ{,}1$.

Если объемъ v_1 внезапно уменьшить до $v_2 = 0{,}1 v_1$, то газъ нагрѣется отъ 0° до 241°; если сдѣлать $v_2 = 0{,}01 v_1$, то газъ нагрѣется до 1018°. Если газъ былъ сжатъ до 200 атмосферъ при 0° и внезапно расширенъ до одной атмосферы, то онъ охладится до -240°.

§ 3. Истеченіе газа изъ малаго отверстія и изъ тонкой трубки. Элементарная, но, какъ мы увидимъ, далеко не строгая теорія истеченія газовъ изъ малыхъ отверстій заключается въ слѣдующемъ. Пусть AB (рис. 242) стѣнка, отдѣляющая лѣвое пространство, гдѣ давленіе газа p_1, отъ праваго, гдѣ это давленіе $p_2 < p_1$. Въ стѣнкѣ находится отверстіе CD, черезъ которое газъ течетъ слѣва направо въ видѣ струи $CDEF$. Пусть элементъ $abdc$ этой струи имѣетъ сѣченіе σ, высоту $h = bd$, объемъ $v = \sigma h$; элементъ содержитъ массу μ газа, равную $\mu = vD = \sigma hD$, гдѣ D плотность газа (относительно воды). Скорость движенія элемента обозначимъ черезъ ω; давленіе на основаніе ab черезъ p, на основаніе dc черезъ $p + dp$,

Рис. 242.



гдѣ dp, очевидно, величина отрицательная. Когда элементъ перемѣстится на свою же длину, то его скорость нѣсколько увеличится. На основаніи закона живыхъ силъ мы знаемъ, что приращеніе живой силы элемента равно работѣ внѣшнихъ силъ. Первая величина есть $d\left(\frac{1}{2}\mu\omega^2\right) = \frac{1}{2}\mu d(\omega^2) = \frac{1}{2}\sigma hDd(\omega^2)$; вторая равна $p\sigma h - (p + dp)\sigma h = -\sigma hdp$.

Итакъ $\frac{1}{2}\sigma hDd(\omega^2) = -\sigma hdp$, или

$$d(\omega^2) = -\frac{2dp}{D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Если начальная скорость $\omega = 0$, окончательная (когда $p = p_2$) Ω, то (13) даетъ

$$\Omega^2 = -\frac{2}{D}\int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{2(p_1 - p_2)}{D},$$

или

$$\Omega = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{D}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Эта формула обыкновенно приводится въ элементарныхъ курсахъ. Она показываетъ, что при данныхъ p_1 и p_2 скорость истеченія газа обратно пропорціональна квадр. корню изъ плотности газа. Для вычисленія скорости Ω удобнѣе ввести вѣсъ P единицы объема газа,

равный Dg; слѣд. $D=\frac{P}{g}=\frac{P_0\delta}{g}$, если P_0 вѣсъ единицы объема воздуха, и δ, какъ всегда, плотность газа относительно воздуха. Тогда

$$\Omega=\sqrt{\frac{2g(p_1-p_2)}{P_0\delta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Если $p_1=1$ атмосф. $=10333$ килогр. на кв. метръ, $p_2=0$, то (15) даетъ, если еще вставить $g=9{,}81$ метр. и вѣсъ куб. метра воздуха 1,29 килогр.,

$$\Omega=\sqrt{\frac{2\times9{,}81\times10333}{1{,}29.\delta}}=\frac{396}{\sqrt{\delta}} \text{ метра.}$$

Неточность нашего вывода заключается прежде всего въ томъ, что мы приняли D въ (13) за величину постоянную; это допустимо для жидкостей, но невѣрно для газовъ. Далѣе мы предположили, что струя имѣетъ вездѣ одно и то же поперечное сѣченіе, между тѣмъ какъ она въ дѣйствительности сперва съуживается, а затѣмъ расширяется: внутри лѣваго пространства струя, весьма широкая, съуживается до сѣченія, равнаго площади отверстія. Не входя въ подробности касательно второго вопроса, разсмотримъ только вліяніе непостоянства величины D. Зависимость плотности D отъ перемѣннаго давленія p можетъ быть весьма различная, смотря по тому, какой происходитъ тепловой обмѣнъ между вытекающимъ газомъ и окружающими его тѣлами. Разсмотримъ два крайнихъ случая.

1. Изотермическое истеченіе газа. Расширяющійся газъ совершаетъ работу, и слѣд. тратитъ часть своей тепловой энергіи. Но мы допустимъ, что истеченіе происходитъ столь медленно, что вся нообходимая теплота успѣваетъ притечь извнѣ, такъ что температура газа остается постоянною. Въ такомъ случаѣ по закону Бойля-Маріотта

$$\frac{D}{D_1}=\frac{p}{p_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

гдѣ D_1 плотность газа въ лѣвомъ пространствѣ. Вставляя D изъ (16) въ (13), получаемъ

$$d(\omega^2)=-2\frac{p_1}{D_1}\frac{dp}{p};$$

отсюда, если при $p=p_1$ скорость $\omega=0$, а при $p=p_2$ мы имѣемъ $\omega=\Omega$,

$$\Omega^2=-2\frac{p_1}{D_1}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=2\frac{p_1}{D_1}\lg\frac{p_1}{p_2},$$

$$\Omega=\sqrt{\frac{2p_1}{D_1}\lg\frac{p_1}{p_2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Если температура газа t, его плотность относительно воздуха δ, то

$$D_1=\frac{1{,}29p_1\delta}{10333g(1+\alpha t)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Вставляя это выраженіе въ (17), получаемъ

$$\Omega = \sqrt{\frac{2\times 9{,}81\times 10333(1+\alpha t)}{1{,}29\delta}\lg\frac{p_1}{p_2}} = 396\sqrt{\frac{1+\alpha t}{\delta}\lg\frac{p_1}{p_2}} \text{ метр.} \quad . \quad . \quad (19)$$

И по этой формулѣ скорость Ω оказывается обратно пропорціональною корню квадратному изъ плотности δ газа.

Если воздухъ при $t=0^0$ переходитъ изъ пространства, гдѣ $p_1=2$ атм., въ свободный воздухъ ($p_2=1$ атм.), то $\Omega=396\sqrt{lg 2}=330$ м. При $p_2=0$ получаемъ $\Omega=\infty$; это показываетъ, что истеченіе въ пустоту не можетъ происходить изотермически.

2. Адіабатическое истеченіе газа. Гораздо ближе къ дѣйствительности должно быть предположеніе, что во время истеченія газа вовсе не происходитъ теплового обмѣна между нимъ и другими тѣлами, т.-е. что во время истеченія состояніе газа мѣняется адіабатически. Объемъ v даннаго количества газа и давленіе p связаны уравненіемъ (9) $pv^k = Const.$ Отсюда слѣдуетъ

$$\left(\frac{D}{D_1}\right)^k = \frac{p}{p_1} \text{ или } \frac{D}{D_1} = \frac{p^{\frac{1}{k}}}{p_1^{\frac{1}{k}}}\,.$$

Далѣе (13) даетъ

$$d(\omega^2) = -\frac{2p_1^{\frac{1}{k}}}{D_1}\,\frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}}$$

и слѣд.

$$\Omega^2 = -\frac{2p_1^{\frac{1}{k}}}{D_1}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} = \frac{2kp_1^{\frac{1}{k}}}{(k-1)D_1}\left(p_1^{\frac{k-1}{k}} - p_2^{\frac{k-1}{k}}\right).$$

и

$$\Omega = \sqrt{\frac{2kp_1^{\frac{1}{k}}}{(k-1)D_1}\left(p_1^{\frac{k-1}{k}} - p_2^{\frac{k-1}{k}}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

И здѣсь мы получимъ, что скорость Ω обратно пропорціональна корню квадратному изъ плотности δ газа, если вставимъ (18). Тогда (20) даетъ окончательно

$$\Omega = 396\sqrt{\frac{k}{k-1}\cdot\frac{1+\alpha t}{\delta}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

При переходѣ въ пустоту ($p_2=0$) получается конечная скорость, независящая отъ начальнаго давленія p_1; для воздуха при $t=0^0$ она равна, если положить $k=1{,}41$,

$$\Omega = 396\sqrt{3{,}44} = 734{,}5 \text{ м.}$$

Если Ω и Ω_1 скорости истеченія двухъ газовъ при одинаковыхъ обстоятельствахъ, δ и δ_1 ихъ плотности, и если можно предположить, что значенія для k у нихъ одинаковыя, то

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Бунзенъ построилъ особый приборъ для сравненія скоростей Ω у различныхъ газовъ, что и дало ему возможность опредѣлить ихъ плотности относительно воздуха; результаты получались хорошіе, напр. для гремучаго газа $\delta = 0{,}413$ вмѣсто 0,415.

Струя газа, быстро вытекающая изъ отверстія, увлекаетъ окружающій ее газъ и разрѣжаетъ его. На этомъ основано устройство пульверизаторовъ.

Вопросъ объ истеченіи газовъ и паровъ изъ отверстій изучалъ теоретически и экспериментально H. Parenty (Ann. chim. et phys. (7) 8, p. 5, 1896).

Когда газъ подъ давленіемъ протекаетъ черезъ весьма тонкую трубку, то его внутреннее треніе получаетъ преобладающее значеніе. Такое протеканіе иногда называютъ транспираціей. Ограничиваемся указаніемъ на формулу. Пусть p_1 упругость газа на одномъ, p_2 — на другомъ концѣ капилярной трубки, длина которой L, а площадь поперечнаго сѣченія σ; если η коеффиціентъ внутренняго тренія (стр. 407), то объемъ V газа, протекающаго въ t секундъ черезъ трубку, приведенный къ давленію $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, равенъ

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\sigma^2 t}{8\pi\eta L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Пользуясь этой формулой, можно найти η.

§ 4. Взаимная диффузія газовъ. Терминомъ «диффузія» обозначаютъ вообще цѣлую группу явленій постепеннаго проникновенія одного рода матеріи въ другую или черезъ другую. Смотря по роду этихъ двухъ матерій, отличаютъ другъ отъ друга различные случаи диффузіи газовъ и жидкостей.

Мы сперва разсмотримъ взаимную диффузію двухъ газовъ. Помѣстимъ вертикально одинъ надъ другимъ два сосуда, наполненные двумя различными газами, не дѣйствующими химически другъ на друга и находящимися подъ одинаковымъ давленіемъ p; при этомъ верхній сосудъ долженъ содержать болѣе легкій газъ. Если соединить эти сосуды трубкой, то оказывается, что газы мало-по-малу начинаютъ смѣшиваться; болѣе легкій, опускаясь, проникаетъ въ болѣе тяжелый газъ, между тѣмъ какъ этотъ послѣдній, поднимаясь, примѣшивается къ газу болѣе легкому. Мы говоримъ, что одинъ газъ «диффундируетъ» въ другой. Черезъ нѣкоторое время оба сосуда содержатъ однородную смѣсь обоихъ газовъ.

Самое явленіе диффузіи легко объясняется съ точки зрѣнія кинетической теоріи газовъ. Молекулы одного газа, свободно двигаясь по всевозможнымъ направленіямъ, мало-по-малу проникаютъ во внутрь другого газа; медленность диффузіи объясняется непрерывными столкновеніями этихъ

молекулъ съ молекулами другого газа. Пока диффузія не окончилась, мы имѣемъ на различныхъ высотахъ x, считаемыхъ хотя бы отъ дна нижняго сосуда, смѣси съ различнымъ процентнымъ содержаніемъ обоихъ газовъ, или, иначе, съ различными парціальными давленіями p_1 и p_2 этихъ газовъ, причемъ однако для всѣхъ значеній величины x, т.-е. во всѣхъ горизонтальныхъ слояхъ, $p_1 + p_2 = p$.

Количество газа, проходящаго въ теченіе времени t черезъ горизонтальную площадь s по направленію x, пропорціонально скорости, съ которою парціальное давленіе p_1 этого газа уменьшается по направленію x. Если положить для даннаго момента $p_1 = f(x)$, то получается для объема v этого газа, приведеннаго къ единицѣ давленія, слѣдующая формула

$$v = -kst\frac{dp_1}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Множитель k называется коеффиціентомъ диффузіи; онъ численно равенъ объему, занимаемому при единицѣ давленія тѣмъ количествомъ газа, которое въ единицу времени ($t = 1$) проходитъ черезъ единицу горизонтальнаго сѣченія ($s = 1$), когда парціальное давленіе этого газа въ смѣси мѣняется на единицу при переходѣ въ вертикальномъ направленіи на единицу длины $\left(\frac{dp_1}{dx} = 1\right)$. Коеффиціентъ k зависитъ отъ рода взятыхъ двухъ газовъ и отъ ихъ температуры. Вотъ нѣкоторыя его значенія:

	k
$H - O$ . . .	$0{,}722 \frac{(\text{см.})^2}{\text{сек.}}$
$H - CO$ . . .	0,642
$H - CO_2$ . . .	0,558
$O - CO_2$ . . .	0,141
$O - CO$ . . .	0,180

При этомъ s выражено въ кв. см., время въ секундахъ.

Коеффиціентъ k приблизительно пропорціоналенъ квадрату абсолютной температуры газовъ, диффундирующихъ другъ въ друга.

§ 5. Диффузія газовъ черезъ пористыя перегородки; эффузія. Если съ двухъ сторонъ отъ пористой перегородки находятся два различныхъ газа, то они также начинаютъ смѣшиваться, проникая черезъ перегородку. Явленіе проникновенія газовъ черезъ пористую перегородку, въ отличіе отъ другихъ случаевъ диффузіи, иногда называютъ эффузіей. Этимъ явленіемъ въ особенности занимались Graham (1834 и 1846) и Bunsen (1857).

Graham вывелъ изъ своихъ опытовъ законъ:

Скорость диффузіи газовъ черезъ пористую перегородку пропорціональна давленію, подъ которымъ газы находятся, и обратно пропорціональна корню квадратному изъ ихъ плотности δ.

Этотъ законъ легко понять, становясь на точку зрѣнія кинетической теоріи газовъ. Такъ какъ при одинаковыхъ давленіяхъ и температурѣ

въ равныхъ объемахъ заключается одинаковое число молекулъ различныхъ газовъ, то надо допустить, что скорость проникновенія газовъ черезъ пористыя перегородки должна главнымъ образомъ зависѣть отъ средней скорости Ω поступательныхъ движеній молекулъ. Но мы видѣли, что скорости Ω обратно пропорціональна $\sqrt{\delta}$, см. (51) стр. 394, чѣмъ и объясняется законъ диффузіи.

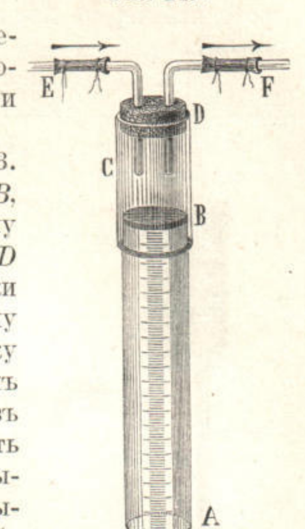


Рис. 243.

Пористая перегородка можетъ состоять изъ необожженной глины, изъ графита, гипса, мѣла, гидрофана, сжатаго порошка гидрата извести, магнезіи и т. под.

Приборъ Graham'а изображенъ на рис. 243. Въ цилиндръ *CD* вставлена широкая трубка *AB*, снабженная дѣленіями; она открыта снизу, а сверху закрыта пористой перегородкой *B*. Цилиндръ *CD* закрытъ крышкою; сквозь нее проходятъ двѣ трубки *E* и *F*, черезъ которыя, по направленію, показанному стрѣлками, непрерывно проходитъ потокъ газа. Трубку *AB* сперва вполнѣ наполняютъ ртутью и нижнимъ концомъ опускаютъ въ глубокую ртутную ванну. Газъ начинаетъ проникать черезъ перегородку *B* и ртуть опускается. Когда она достигла опредѣленной высоты, поднимаютъ трубку постепенно, такъ чтобы высота ртутнаго столба въ ней оставалась безъ измѣненія; тогда упругость газа въ *AB* будетъ величиною постоянною, несмотря на непрерывно увеличивающееся его количество. Опредѣляютъ время t, въ теченіе котораго объемъ газа въ *AB* увеличивается на нѣкоторую опредѣленную величину (2,2 куб. см. въ опытахъ Graham'а). Слѣдующая табличка подтверждаетъ, что эти времена t прямо пропорціональны $\sqrt{\delta}$, откуда и слѣдуетъ, что скорость диффузіи обратно пропорціональна $\sqrt{\delta}$.

	t	$\sqrt{\delta}$
Кислородъ	1	1
Воздухъ	0,9501	0,9507
Углекислота	1,1860	1,1760
Водородъ	0,2505	0,2502

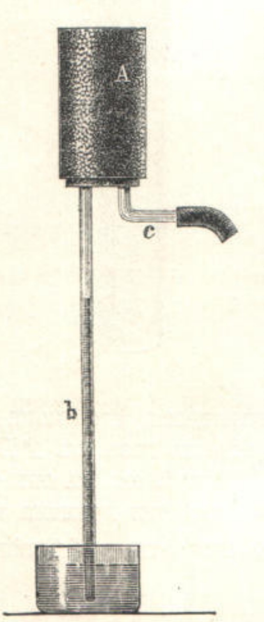
Далѣе оказалось, что время t обратно пропорціонально разности давленій газа съ двухъ сторонъ отъ пористой перегородки.

Если трубку *AB* предварительно наполнить какимъ либо газомъ, а черезъ *CD* пропускать струю другого газа, то первый начинаетъ выходить изъ трубки, а второй входить въ нее. Черезъ нѣкоторое время оказывается, что въ трубкѣ находится только второй газъ, но уже не въ томъ количествѣ, въ которомъ первоначально въ трубкѣ находился первый газъ; эти количества обратно пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ плотностей газовъ. Dufour нашелъ, что диффузія сопровождается измѣненіемъ темпера-

туры; съ той стороны перегородки, черезъ которую входитъ газъ болѣе легкій, диффундирующій быстрѣе, происходитъ повышеніе, съ другой ея стороны—пониженіе температуры. Feddersen замѣтилъ и обратное явленіе, названное термодиффузіей: если съ двухъ сторонъ отъ пористой перегородки находится одинъ и тотъ же газъ при одинаковомъ давленіи, и если одну сторону перегородки сдѣлать теплѣе другой, то газъ начинаетъ проходить черезъ нее по направленію отъ болѣе холодной къ болѣе теплой сторонѣ.

Если съ одной стороны отъ пористой перегородки находится смѣсь неодинаково плотныхъ газовъ, то они проходятъ черезъ перегородку съ различною скоростью, вслѣдствіе чего составъ смѣси газовъ при диффузіи мѣняется. Повторяя опытъ многократно, можно иногда почти вполнѣ отдѣлить одинъ газъ отъ другого; на этомъ основанъ особаго рода анализъ, названный атмолизомъ.

Рис. 244.



Изъ множества опытовъ, обнаруживающихъ различную способность газовъ къ диффузіи, опишемъ одинъ. Стаканъ A (рис. 244) изъ пористой глины (каковыми пользуются при устройствѣ элементовъ Даніеля и друг.) установленъ вверхъ дномъ и закрытъ внизу пробкою, черезъ которую проходятъ трубка b, опущенная нижнимъ концомъ въ сосудъ съ водою (подкрашенною), и трубка c, соединенная съ резервуаромъ водорода или свѣтильнаго газа. Пока газъ входитъ въ A и вытѣсняетъ воздухъ черезъ трубку b, видны въ нижнемъ сосудѣ пузырьки поднимающагося изъ воды воздуха. Но если затѣмъ прекратить доступъ газа, то вода въ b начинаетъ подниматься вслѣдствіе того, что газъ быстрѣе выходитъ изъ стакана A, чѣмъ наружный воздухъ успѣваетъ въ него войти.

§ 6. Диффузія газовъ черезъ каучукъ и черезъ накаленные металлы. Mitchell (1831) первый показалъ, что газы способны проникать черезъ тонкія пластинки каучука. Graham наблюдалъ диффузію газовъ черезъ каучукъ въ пустоту. Оказалось, что скорость этой диффузіи весьма различна для различныхъ газовъ, не находясь въ той зависимости отъ плотности δ, какъ диффузія черезъ пористыя перегородки. Для скорости v диффузіи онъ нашелъ слѣдующія относительныя числа

	N	CO	CH_4	O	H	CO_2
$v =$	1	1,113	2,15	2.56	5,50	13.59

Замѣчательна быстрота диффузіи для O сравнительно съ N. Если воздухъ прошелъ черезъ пластинку каучука, то въ немъ содержится уже не 21°/₀, но 40°/₀ кислорода.

Черезъ Pt и Fe, находящіяся при красномъ каленіи, диффундируетъ

водородъ; 1 кв. метръ поверхности платиновой трубки, толщина стѣнокъ которой 1,1 мм., пропускаетъ въ 1 мин. при красномъ каленіи 490 куб. см. водорода. Накаленная палладіевая трубка, черезъ которую пропускается смѣсь H и CO, вполнѣ отдѣляетъ эти газы другъ отъ друга; только H проходитъ черезъ ея стѣнки. Серебро при высокой температурѣ пропускаетъ значительныя количества кислорода. Надо думать, что во всѣхъ этихъ случаяхъ мы имѣемъ дѣло съ поглощеніемъ газа каучукомъ или металломъ, и затѣмъ съ выдѣленіемъ его съ той стороны, гдѣ пластинка не соприкасается съ газомъ; параллельно съ этимъ происходитъ внутри пластинки и дѣйствительная диффузія.

§ 7. Диффузія газовъ черезъ жидкости. Только-что сказанное по всей вѣроятности относится и къ случаю диффузіи газовъ черезъ слой жидкости; съ одной стороны слоя газъ поглощается жидкостью, а съ противоположной онъ изъ нея выдѣляется; но въ то же время происходитъ диффузія газа внутри слоя.

Мыльный пузырь, плавающій на углекислотѣ, налитой въ открытый стаканъ, постепенно дѣлается тяжелѣе и увеличивается въ объемѣ вслѣдствіе проникновенія CO_2 во внутрь пузыря. Если внутри длинной влажной стеклянной трубки, закрытой съ одной стороны, помѣстить поперечную пленку изъ мыльной воды, и затѣмъ съ двухъ сторонъ отъ пленки впустить въ трубку различные газы, то она начинаетъ скользить вдоль трубки вслѣдствіе того, что эти газы неодинаково быстро проходятъ черезъ нее и потому давленіе въ закрытой части трубки увеличивается или уменьшается.

Wroblewski изслѣдовалъ постепенное поглощеніе газа столбомъ жидкости, надъ которымъ онъ находится. Оказалось, что количество поглощеннаго газа пропорціонально коеффиціенту растворимости газа въ жидкости, коеффиціенту диффузіи, давленію газа и корню квадратному изъ времени. Этимъ же вопросомъ занимались Stefan, Joh. Müller и Hüfner.

Опыты Exner'а показали,что скорость диффузіи газа черезъ жидкую пленку прямо пропорціальна коеффиціенту растворимости газа въ жидкости и обратно пропорціональна корню квадратному изъ плотности газа.

§ 8. Сопротивленіе газовъ движенію твердыхъ тѣлъ. Въ главѣ, посвященной свойствамъ газовъ, находящихся въ движеніи, мы можемъ разсмотрѣть и вліяніе, какое газъ и движущееся въ немъ твердое тѣло имѣютъ другъ на друга, тѣмъ болѣе, что и газъ, окружающій тѣло, не остается въ покоѣ.

Твердое тѣло, движущееся въ газѣ, вызываетъ передъ собою сгущеніе, за собою разрѣженіе газа. Если твердое тѣло производитъ быстрыя колебательныя движенія, то оно вызываетъ въ газѣ попеременныя сгущенія и разрѣженія, которыя распространяются во всѣ стороны; это явленіе мы разсмотримъ ближе въ ученіи о звукѣ.

Когда шаръ, цилиндръ, дискъ, кольцо и т. под. тѣла вращенія вращаются около своихъ осей, то поверхности тѣла и газа только скользятъ одна по другой, причемъ однако нѣкоторый ближайшій слой газа увлекается

тѣломъ и приходитъ въ движеніе. Между твердымъ тѣломъ и газомъ обнаруживается треніе, дѣйствующее на тѣло, какъ нѣкоторая сила, замедляющая его скорость. При поступательномъ движеніи твердаго тѣла въ газѣ вліяніе сгущенія передъ тѣломъ и разрѣженія за нимъ, непосредственное треніе и передача части энергіи тѣла ближайшимъ слоямъ газа, приходящаго также въ движеніе, складываются въ одну силу, называемую сопротивленіемъ газа движенію въ немъ твердаго тѣла. Впрочемъ только что указанныя составныя части этого сопротивленія не отличаются существенно другъ отъ друга: если стать на точку зрѣнія кинетической теоріи газовъ, то первоначальную причину всѣхъ этихъ частей сопротивленія должно искать въ томъ, что число и сила толчковъ, получаемыхъ тѣломъ отъ молекулъ газа, больше съ той стороны, куда оно движется, чѣмъ со стороны противоположной.

Сопротивленіе f газа движенію тѣла есть функція скорости v этого движенія; видъ функціи неизвѣстенъ. Ньютонъ пришелъ къ заключенію, что сопротивленіе f пропорціонально v^2; различныя наблюденія приводятъ къ результату, что f приближенно выражается формулою вида

$$f = av + bv^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Эта формула эмпирическая; при очень большихъ v сопротивленіе f растетъ даже быстрѣе квадрата скорости, такъ что приходится принять формулу вида $f = av + bv^2 + cv^3$, т.-е. взять первые три члена разложенія неизвѣстной функціи $f = F(v)$ по строкѣ Маклорена.

Сопротивленіе воздуха зависитъ отъ величины поверхности движущагося тѣла. Плоское колесо, приведенное въ быстрое вращеніе, движется и въ воздухѣ довольно долго; такое же колесо, снабженное поперечными крыльями, весьма скоро останавливается на воздухѣ, между тѣмъ какъ подъ колоколомъ воздушнаго насоса оба колеса вращаются въ теченіе приблизительно одинаковаго времени.

Сопротивленіе воздуха уменьшаетъ ускореніе свободнаго паденія тѣлъ, ибо является сила f, противодѣйствующая вѣсу p. Если g ускореніе въ пустотѣ, g' въ воздухѣ, то $g' : g = p - f : p$; отсюда

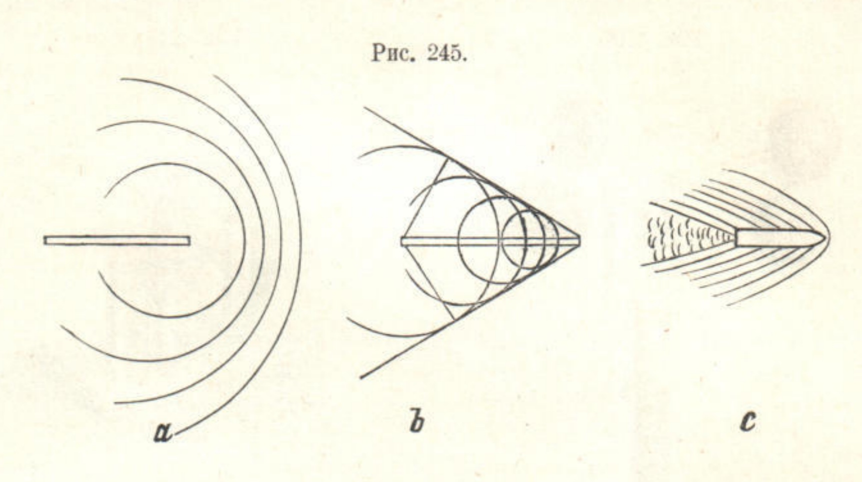
$$g' = g\left(1 - \frac{f}{p}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Чѣмъ меньше вѣсъ p тѣлъ, тѣмъ меньше и g' при одинаковыхъ скоростяхъ и одинаковой формѣ тѣлъ; вотъ почему легкія тѣла падаютъ въ воздухѣ медленнѣе, чѣмъ тяжелыя.

Весьма любопытныя явленія сопровождаютъ движеніе снарядовъ, вылетающихъ съ огромною быстротою изъ современныхъ огнестрѣльныхъ орудій. Изслѣдованіе этихъ явленій и даже фотографированіе воздуха, окружающаго летящее ядро, удалось Mach'у (1887). Оказывается, что цилиндрическій снарядъ при своемъ движеніи непрерывно образуетъ передъ собою отдѣльныя сгущенія, которыя распространяются одно за другимъ во всѣ стороны со скоростью звука, т.-е. около 340 метровъ въ сек. Когда скорость

снаряда меньше скорости звука, то эти волны идутъ впереди ядра, какъ показано на рисункѣ 245,a; при скорости, превышающей скорость звука, теоретически должно получаться въ данный моментъ распредѣленіе волновыхъ поверхностей сгущенія, изображенное на среднемъ рисункѣ; область сгущенія должна быть ограничена поверхностью конуса, синусъ половины угла у вершины котораго равенъ отношенію скорости звука къ скорости ядра. Опыты указали на болѣе сложное явленіе, какъ видно изъ рисунка 245,с. Наружная граница области сгущенія оказывается поверхностью параболоида вращенія; внутри этой области замѣчаются полосы, и наконецъ за снарядомъ

Рис. 245.



обнаруживается пространство, въ которомъ происходитъ сложное вихревое движеніе воздуха, врывающагося въ него со всѣхъ сторонъ.

Движущійся газъ производитъ давленіе на тѣла и можетъ ихъ привести въ движеніе; этимъ движеніемъ пользуются для измѣренія скорости движенія газа. Сюда относятся приборы, служащіе для измѣренія скорости вѣтра, или скорости теченія воздуха или другихъ газовъ въ трубахъ. Описаніе и устройство различныхъ анемометровъ и анемографовъ относится къ метеорологіи. Мы ограничиваемся указаніемъ на анемометры Robinson'a и Combes'a. Первый изображенъ на рис. 246. Онъ состоитъ изъ вертикальной оси AB, на которую насажены два взаимно перпендикулярныхъ стержня, къ концамъ которыхъ прикрѣплены полыя полушарія A', B', C' и D'. Если вѣтеръ имѣетъ направленіе стрѣлокъ 1 и 2, то ось AB и полушарія вращаются по направленію стрѣлки kl. Безконечный винтъ на оси AB и счетчикъ C даютъ возможность измѣрить скорость v' движенія полушарій; тогда скорость v вѣтра опредѣляется по формулѣ вида $v = kv'$, гдѣ k постоянный множитель, легко опредѣляемый разъ навсегда для даннаго прибора.

На рис. 247 изображенъ анемометръ Combes'a, который вставляется въ ту трубу, по которой течетъ газъ. Скорость вращенія наклонно поставленныхъ пластинокъ KK служитъ мѣриломъ скорости этого теченія.

Вопросомъ о сопротивленіи воздуха движущимся тѣламъ занимался, между прочимъ, М. А. Рыкачевъ.

§ 9. Диссоціація газовъ. Мы видѣли, что молекулярный вѣсъ μ газа или пара и плотность его δ относительно воздуха связаны равенствомъ

$$\mu = 28{,}88\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

см. (1) стр. 343. На этой формулѣ основанъ одинъ изъ способовъ опредѣленія молекулярнаго вѣса газа или пара, а затѣмъ и химической формулы, когда путемъ количественнаго анализа опредѣлено процентное содержаніе простыхъ тѣлъ, входящихъ въ его составъ.

Рис. 246.

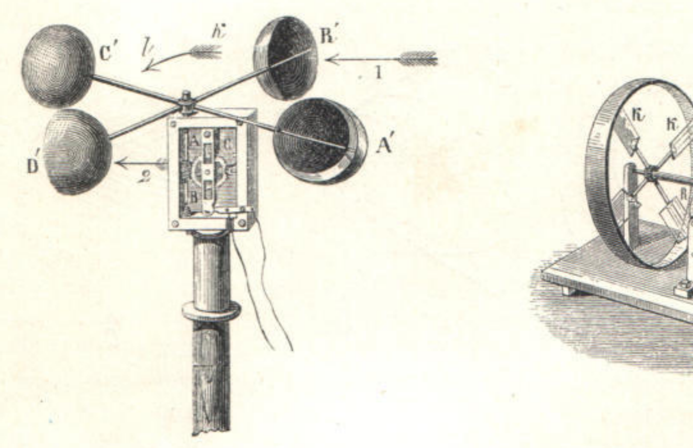
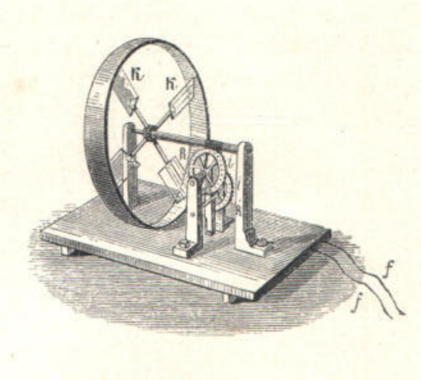


Рис. 247.



Однако давно было замѣчено, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ получается по формулѣ (27) молекулярный вѣсъ совершенно несогласный съ тѣмъ значеніемъ, которое твердо установлено было другими способами. Такъ пары нашатыря обладаютъ плотностью, которая при высокихъ температурахъ почти вдвое меньше плотности, соотвѣтствующей формулѣ NH_4Cl; плотность паровъ карбаминово-амміачной соли NH_2COONH_4 втрое меньше теоретической, а пары уксусной кислоты напротивъ больше той, которая получается по формулѣ $CH_3\,COOH$. Подобныя аномальныя плотности наблюдаются при болѣе высокихъ температурахъ для

$$N_2O_4,\ PtCl_5,\ NHO_3,\ PbBr_3,\ NH_5S,\ SbCl_5,\ PH_4Cl \text{ и т. д.}$$

Аналогично и пары нѣкоторыхъ простыхъ тѣлъ, какъ напр. іода и сѣры обнаруживаютъ при нагрѣваніи значительныя измѣненія плотности пара.

Эти отступленія можно было бы объяснить тѣмъ, что законъ Авогадро, на основаніи котораго мы вывели (стр. 343) формулу (27), къ нѣкоторымъ газамъ или парамъ не приложимъ. Однако такое объясненіе оказывается

не вѣрнымъ. Cannizaro, Kopp и Kékulé почти одновременно (1858) указали, что аномальныя плотности паровъ должны быть объяснены распаденіемъ молекулъ пара на двѣ или большее число частей. Такого рода распаденіе молекулъ, которое наблюдается и въ твердыхъ и жидкихъ тѣлахъ, называется диссоціаціей; этотъ терминъ предложилъ St. Claire-Deville.

Легко объяснить, почему плотность δ пара должна уменьшаться при распаденіи его молекулъ. Положимъ, что въ объемѣ v находятся сперва N не диссоціированныхъ молекулъ; каждая обладаетъ массой m; температуру обозначимъ черезъ t, давленіе черезъ p. Мы имѣли, см. (10) стр. 393, формулу

$$pv = \frac{1}{3} Nmu^2.$$

Если каждая молекула распадется на n частей, массы которыхъ m_1, m_2, m_3, ..., m_n и скорости u_1, $u_2 \ldots u_n$, то въ объемѣ v будетъ содержаться уже nN молекулъ. Живая сила каждой изъ нихъ такая же, какъ и живая сила неразложенной молекулы (см. стр. 395), а отсюда слѣдуетъ, что новое давленіе p_1 опредѣлится изъ равенства

$$p_1 v = \frac{1}{3} Nm_1 u_1^2 + \frac{1}{3} Nm_2 u_2^2 + \ldots + \frac{1}{3} Nm_n u_n^2 = npv,$$

ибо

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \ldots = \frac{1}{2} m_n u_n^2 = \frac{1}{2} mu^2.$$

Итакъ

$$p_1 = np.$$

Если теперь взять объемъ v разложеннаго пара при температурѣ t и давленіи p, то въ немъ должно опять заключаться всего N молекулъ, т.-е по $\frac{N}{n}$ молекулъ каждаго рода. Отсюда ясно, что масса этого пара, а слѣд. и его плотность δ будетъ въ n раза меньше, чѣмъ масса и плотность не диссоціированнаго пара. Когда всѣ молекулы распались, то мы говоримъ, что диссоціація окончена.

Аномальная плотность паровъ нашатыря NH_4Cl объясняется такимъ образомъ распаденіемъ молекулы на NH_3 и HCl; карбаминово-амміачная соль NH_2COONH_4 распадается на $NH_3 + NH_3 + CO_2$; N_2O_4 на $NO_2 + NO_2$; $PtCl_5$ на $PtCl_3 + Cl_2$; $PbBr_3$ на $PbBr + Br_2$; NH_5S на $NH_3 + H_2S$; PH_4Cl на $PH_3 + HCl$ и т. д. Обратно, слишкомъ большая плотность паровъ уксусной кислоты указываетъ на присутствіе въ парѣ молекулъ, составъ которыхъ болѣе сложенъ, чѣмъ тотъ, который выражается формулою $C_2O_2H_4$ (полимеризація).

Вообще разложеніе молекулъ происходитъ постепенно по мѣрѣ повышенія температуры, такъ что въ парѣ при данной температурѣ и данномъ давленіи нѣкоторая дробная часть γ всѣхъ молекулъ разложена, другая же часть $1 - \gamma$ молекулъ находится въ парѣ въ неразложенномъ состояніи.

Мы имѣемъ здѣсь дѣло съ однимъ изъ многихъ случаевъ подвижного равновѣсія: въ данное время столько же сложныхъ молекулъ распадается на составныя части, сколько ихъ вновь образуется при благопріятныхъ тому столкновеніяхъ между этими образовавшимися ранѣе частями. Дробь γ называется **степенью диссоціаціи**; ее можно опредѣлить, если извѣстны теоретическая плотность δ недиссоціированнаго пара, вычисленная по формулѣ (27), далѣе истинная плотность Δ пара и число n составныхъ частей, на которыя распадается молекула. Число молекулъ вслѣдствіе диссоціаціи возросло отъ N до $N\gamma n + N(1-\gamma)$, ибо $N\gamma$ молекулъ распались, каждая на n частей. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{N}{N\gamma n + N(1-\gamma)} = \frac{1}{1+(n-1)\gamma} \quad \dots\dots \quad (28)$$

Это даетъ

$$\gamma = \frac{\delta - \Delta}{(n-1)\Delta} \quad \dots\dots \quad (29)$$

При $n = 2$ имѣемъ

$$\gamma = \frac{\delta}{\Delta} - 1 \quad \dots\dots \quad (30)$$

Въ случаѣ полной диссоціаціи имѣемъ $\gamma = 1$ и тогда (28) даетъ

$$\Delta = \frac{\delta}{n} \quad \dots\dots \quad (31)$$

При $n = 2$ имѣемъ въ этомъ случаѣ $\Delta = \frac{1}{2}\delta$.

Теорія, которую мы здѣсь не развиваемъ, показываетъ, что **при постоянной температурѣ** t степень диссоціаціи мѣняется въ зависимости отъ давленія p; при весьма маломъ давленіи, γ приближается къ единицѣ и слѣд. Δ къ $\frac{\delta}{n}$. Наоборотъ, при очень большомъ давленіи p, степень диссоціаціи мала и Δ близко къ δ. Такъ при $t = 49{,}7^\circ$ имѣемъ для N_2O_4 слѣдующія значенія дроби γ при различныхъ давленіяхъ p:

p	γ	p	γ
0 мм.	1	182,69 мм.	0,690
26,80	0,930	261,37 »	0,630
93,75	0,789	497,75 »	0,493

Иногда диссоціація обнаруживается измѣненіемъ цвѣта пара; такъ N_2O_4, безцвѣтный, бурѣетъ при диссоціаціи вслѣдствіе образованія NO_2; пары PCl_5 при высокой температурѣ получаютъ зеленоватый оттѣнокъ, вызванный присутствіемъ свободныхъ молекулъ Cl_2.

Если пары нашатыря заставить диффундировать черезъ асбестъ, то прошедшій черезъ него паръ имѣетъ щелочную, оставшійся—кислую реакцію, вслѣдствіе того, что NH_3 и HCl съ различною скоростью проходятъ черезъ пористую перегородку.

Степень диссоціаціи γ возрастаетъ съ температурою; поэтому нагрѣваніе пара сопровождается внутренней работой диссоціаціи, результатомъ которой является увеличенная упругость, а слѣд. и увеличенный запасъ энергіи, какъ видно изъ формулы $pv = \frac{2}{3}J$, стр. 393. Вслѣдствіе этого теплоемкость пара во время диссоціаціи громадна, быстро уменьшаясь съ повышеніемъ температуры по мѣрѣ того, какъ диссоціація приближается къ своему предѣлу.

Пользуясь формулой (29), можно вычислить степень диссоціаціи γ пара при различныхъ температурахъ, наблюдая его плотность Δ. Возьмемъ для примѣра диссоціацію N_2O_4. Молекулярный вѣсъ $\mu = 2 \times 14 + 4 \times 16 = 92$; слѣд. теоретическая плотность, см. (27), $\delta = \frac{92}{28,88} = 3,19$. Такъ какъ N_2O_4 распадается на $NO_2 + NO_2$, то $n = 2$ и слѣд. (30) даетъ $\gamma = \frac{3,19}{\Delta} - 1$. Въ слѣдующей табличкѣ даны температуры t, плотности Δ пара и величины 100γ, показывающія, какой процентъ всѣхъ молекулъ подвергся диссоціаціи.

t	Δ	100γ
26,7	2,65	20,0
39,8	2,46	29,2
60,2	2,08	52,8
80,6	1,80	76,6
100,1	1,68	89,2
121,5	1,62	96,2
135,0	1,60	98,7

Диссоціація уменьшается, когда къ пару примѣшать одну изъ составныхъ частей, на которыя онъ распадается, напр. NH_3 или HCl къ парамъ нашатыря.

Пары простыхъ тѣлъ, молекулы которыхъ содержатъ болѣе одного атома, также могутъ обнаруживать диссоціацію. Такъ плотность паровъ іода при высокой температурѣ и слабомъ давленіи уменьшается, вслѣдствіе распаденія молекулы J_2 на $J + J$. Когда сѣра испаряется, то паръ содержитъ по всей вѣроятности молекулы S_8, которыя распадаются на $S_6 + S_2$; при дальнѣйшемъ нагрѣваніи молекулы S_6 съ своей стороны распадаются вѣроятно на $S_2 + S_2 + S_2$.

§ 10. Заключеніе. Мы разсмотрѣли въ этомъ отдѣлѣ цѣлый рядъ свойствъ газовъ и различныя явленія, которыя въ нихъ происходятъ. Мы однако оставили незатронутыми еще многіе вопросы первостепенной важности. Мы напр. подробно разсматривали свойства совершенныхъ газовъ, приписывая имъ между прочимъ отсутствіе внутренней работы. Переходя къ газамъ дѣйствительнымъ, несовершеннымъ, мы ограничились разсмотрѣніемъ отступленій отъ закона Бойля-Маріотта и указаніемъ на формулу van der Waals'а. Но мы не описывали тѣхъ опытовъ, которыми доказывается существованіе внутренней работы расширенія несовершенныхъ газовъ и не излагали болѣе подробной теоріи такихъ газовъ. Точно также

мы не затрогивали обширныхъ вопросовъ о тепловомъ расширеніи и о теплопроводности газовъ, о способахъ опредѣленія теплоемкости газовъ и въ особенности объ ожиженіи газовъ. Всѣ эти вопросы мы разсмотримъ въ отдѣлѣ девятомъ, посвященномъ ученію о теплотѣ. И во всѣхъ другихъ отдѣлахъ мы еще много разъ встрѣтимся съ газами и познакомимся съ различными ихъ свойствами, касающимися акустическихъ, оптическихъ, магнитныхъ и электрическихъ явленій, которыя въ нихъ обнаруживаются. Въ этомъ четвертомъ отдѣлѣ, въ ученіи о газахъ, мы собрали все то, что безъ нарушенія необходимой послѣдовательности и общей системы изложенія могло быть выдѣлено, какъ основное и для газообразнаго состоянія матеріи особенно характерное, изъ другихъ отдѣловъ физики. Подобное мы въ слѣдующихъ двухъ отдѣлахъ сдѣлаемъ для матеріи въ состояніяхъ жидкомъ и твердомъ.

ЛИТЕРАТУРА.

Диффузія газовъ.

Graham. Phil. Mag. (3) 2 p. 175, 269, 351, 1833; Pogg. Ann. 28 p. 331, 1833; Phil. Trans. 1863; Liebig's Ann. 131 p. 1, 1864; Pogg. Ann. 129 p. 549, 1866.
Bunsen. Gasometrische Methoden. 1857 p. 209.
Dufour. Arch. Sc. phys. (2) 49 p. 103, 1873.
Feddersen. Pogg. Ann. 148 p. 302, 1873.
Mitchell. Journ. of the Roy. Inst. 2 p. 101, 307, London 1831; Pogg. Ann. 129 p. 550, 1866.
Wroblewski. W. A. 2 p. 481, 1877; 4 p. 268, 1878; 7 p. 11; 8 p. 29, 1879.
Stefan. Wien. Ber. 77 (2) p. 371, 1878.
Joh. Mueller. W. A. 43 p. 554, 1891.
Hüfner. W. A. 60, p. 135, 1897.
Exner. Wien. Ber. 70 p. 465, 1875; Pogg. Ann. 155 p. 321 и 443, 1875; Wien. Ber. 75, p. 263, 1877.
Toepler. W. A. 58, p. 599, 1896.
Ф. Шидловскій. Примѣненіе диффузіи къ опредѣленію влаги и углекислоты. Спб. 1886.

Сопротивленіе газовъ движенію твердыхъ тѣлъ.

Mach und Salcher. Wien. Ber. 95 (2) p. 764, 1887; 97 (2) p. 41, 1889.
Melsens. Ann. Ch. et Phys. (5) 25, 1882.
М. Рыкачевъ. Ж. Ф. Х. О. 10 p. 124, 1878.
Г. Сусловъ. Ж. Ф. Х. О. 18 p. 79, 1886.
И. Ярковскій. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 3, вып. 2, стр. 34, 1890.

Диссоціація газовъ.

Cannizaro. Sunto di un corso di filosofia chimica. Pisa, 1858.
Kopp. Chem. Ber. 1858 p. 11 и др.
St. Claire Deville. C. R. 45 p. 857, 1857. Leçons sur la dissociation. Paris, 1866.
Pebal. Lieb. Ann. 123 p. 199, 1862.
E. und L. Natanson. W. A. 24 p. 454, 1885; 27 p. 606, 1886.
Richardson. Journ. chem. Soc. 51 p. 397, 1887.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ

УЧЕНІЕ О ЖИДКОСТЯХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Основныя свойства и строеніе жидкостей.

§ 1. Основныя свойства жидкостей. Жидкости, подобно газамъ, не обладаютъ самостоятельной формой, но принимаютъ форму того сосуда, въ которомъ онѣ помѣщены. Подобно газамъ, онѣ также весьма мало сопротивляются измѣненію формы, т.-е. деформаціямъ. Но онѣ отличаются отъ газовъ прежде всего тѣмъ, что обладаютъ опредѣленнымъ объемомъ, попыткѣ измѣненія котораго онѣ противоставляютъ весьма большое сопротивленіе; онѣ не стремятся занять возможно большій объемъ и потому могутъ быть сохраняемы въ открытыхъ сосудахъ по крайней мѣрѣ въ теченіе нѣкотораго промежутка времени. Жидкость, не подверженная внѣшнимъ силамъ и не вращающаяся около какой либо оси, принимаетъ форму шара, которая и должна считаться какъ бы за естественную ея форму.

Жидкости непрерывно и при всѣхъ условіяхъ переходятъ въ газообразное состояніе; онѣ *испаряются*. Быстрота этого перехода зависитъ отъ рода жидкости, отъ температуры, рода, давленія и движенія газа, окружающаго «свободную» поверхность жидкости, т.-е. ту, которая не находится въ соприкосновеніи съ твердымъ или другимъ жидкимъ тѣломъ. Если жидкость находится въ закрытомъ пространствѣ, то испареніе черезъ нѣкоторое время какъ будто прекращается; въ этомъ случаѣ надъ жидкостью находится «*насыщенный*» ея паръ, т.-е. паръ, достигшій наибольшей, возможной при данной температурѣ, упругости. Въ открытомъ пространствѣ испареніе всякой жидкости продолжается непрерывно. Поэтому жидкая масса тогда только можетъ самостоятельно существовать въ міровомъ пространствѣ, когда она достаточно велика для того, чтобы вслѣдствіе ея при-

тяженія могла образоваться вокругъ нея атмосфера ея же пара, которая у ея поверхности была бы насыщена. Жидкая масса, не удовлетворяющая этому условію, должна постепенно разсѣиваться и такъ сказать исчезнуть.

Испареніе сопровождается затратою энергіи, которая въ парѣ находится въ потенціальной формѣ. Если нѣтъ притока энергіи къ жидкости отъ внѣшнихъ тѣлъ, то жидкость при испареніи охлаждается.

Подробнѣе мы разсмотримъ явленіе испаренія въ ученіи о теплотѣ.

Идеальною или совершенною жидкостью мы называемъ такую, которая не оказываетъ никакого сопротивленія внѣшней силѣ, измѣняющей ея форму, и безконечно большое сопротивленіе силѣ, стремящейся уменьшить ея объемъ; такая жидкость слѣд. абсолютно подвижна и несжимаема.

Жидкости слѣдуютъ закону передачи давленій, извѣстному подъ названіемъ закона Паскаля. Тѣла, погруженныя въ жидкость, претерпѣваютъ кажущуюся потерю въ вѣсѣ, опредѣляемую закономъ Архимеда.

Подъ вліяніемъ измѣненія температуры измѣняется объемъ жидкостей, но несравненно меньше, чѣмъ объемъ газовъ. Коеффиціентъ теплового расширенія для различныхъ жидкостей весьма различный.

§ 2. Строеніе жидкостей. Внутреннее строеніе жидкостей сложнѣе строенія газовъ и притомъ усложненіе выражается двояко. Въ газообразныхъ тѣлахъ мы считаемъ молекулы свободными, движущимися независимо другъ отъ друга, если только не считать ихъ случайныхъ столкновеній между собою. Въ жидкостяхъ молекулы настолько сближены, что столкновенія между ними должны происходить несравненно чаще, чѣмъ въ газахъ; вслѣдствіе этого каждая отдѣльная молекула должна двигаться около нѣкотораго средняго своего положенія, мѣняющагося сравнительно весьма медленно. Тѣмъ не менѣе постепенныя перемѣщенія молекулъ съ одного мѣста къ другому происходятъ и въ жидкостяхъ, но гораздо медленнѣе, чѣмъ въ газахъ.

Второе различіе въ строеніяхъ жидкостей и газовъ заключается въ томъ, что на каждую молекулу жидкости дѣйствуютъ особаго рода силы, какъ бы исходящія отъ всѣхъ къ ней сосѣднихъ молекулъ, однако повидимому не тожественныя со всеміриымъ тяготѣніемъ, которое, само по себѣ, существуетъ между молекулами жидкостей. Эти силы, законы которыхъ еще мало извѣстны и которыя имѣютъ замѣтную величину только при весьма малыхъ разстояніяхъ между молекулами, называются силами сцѣпленія. Такія силы существуютъ, какъ мы видѣли, и въ газахъ; но въ послѣднихъ онѣ весьма малы и потому большой роли не играютъ, особенно въ газахъ, далекихъ отъ насыщенія. Въ жидкостяхъ, наоборотъ, существованіе этихъ силъ непрерывно обнаруживается во множествѣ разнообразныхъ явленій, и притомъ въ особенности вблизи ихъ поверхности. Дѣло въ томъ, что когда молекула m (рис. 248) находится внутри жидкости, то она со всѣхъ сторонъ окружена другими молекулами, дѣйствующими на нее силами сцѣпленія. Всѣ эти молекулы находятся внутри нѣкоторой сферы, въ центрѣ которой помѣщается разсматриваемая молекула, и радіусъ которой равенъ тому наибольшему разстоянію, на которомъ силы сцѣпленія

производятъ еще ощутительное дѣйствіе, т.-е. дѣйствіе не вполнѣ ничтожное сравнительно съ дѣйствіемъ молекулъ сосѣднихъ. Эта сфера называется сферою частичныхъ дѣйствій. Всѣ силы сцѣпленія, дѣйствующія на центральную молекулу m, и направленныя равномѣрно во всѣ стороны вокругъ нея, взаимно уничтожаются. Это относится ко всѣмъ молекуламъ внутри жидкости, гдѣ слѣд. силы сцѣпленія только регулируютъ величину средняго разстоянія между молекулами. Такимъ образомъ объемъ жидкости прежде всего опредѣляется условіемъ равновѣсія между стремленіемъ движущихся молекулъ разлетѣться и сцѣпленіемъ молекулъ между собою.

Сказанное о взаимномъ уравновѣшиваніи силъ сцѣпленія, дѣйствующихъ на молекулу, перестаетъ быть вѣрнымъ для молекулы m'', находя-

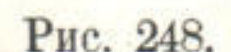
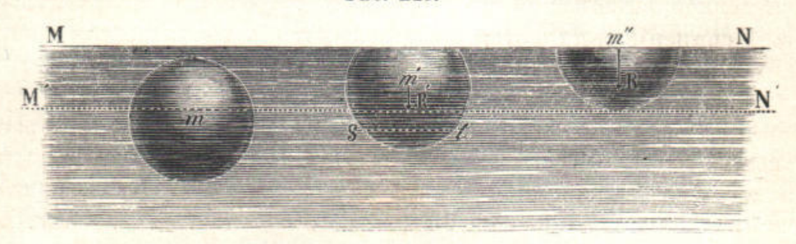


Рис. 248.



щейся у самой поверхности, и окруженной только съ одной стороны другими молекулами, составляющими полусферу частичнаго дѣйствія. Здѣсь у поверхности жидкости всѣ силы сцѣпленія складываются въ одну равнодѣйствующую R, направленную во внутрь жидкости, нормально къ ея поверхности; молекула какъ бы втягивается во внутрь жидкости силою, удерживающею ее отъ вылетанія изъ жидкости. Это относится не только ко всѣмъ молекуламъ, находящимся у поверхности жидкости, но и къ тѣмъ, которыя находятся внутри жидкости, на разстояніи отъ ея поверхности, меньшемъ радіуса сферы частичнаго дѣйствія, какъ это видно изъ рис. 248; на молекулу m' дѣйствуютъ силы сцѣпленія, изъ которыхъ нѣкоторыя взаимно уравновѣшиваются; но остаются силы, исходящія отъ молекулъ сегмента, лежащаго ниже плоскости st, симметричной относительно центра шара съ плоскою поверхностью жидкости. Эти силы сцѣпленія имѣютъ нѣкоторую равнодѣйствующую R', которая однако меньше R. Плоскость $M'N'$, находящаяся отъ поверхности MN на разстояніи радіуса сферы частичнаго дѣйствія, составляетъ нижнюю границу поверхностной пленки, частицы которой подвержены силамъ, направленнымъ во внутрь жидкости. Вся эта пленка производитъ давленіе на жидкость, которое можно уподобить давленію натянутаго резиноваго шара на находящійся въ немъ воздухъ.

Итакъ силы сцѣпленія должны особенно рѣзко проявляться въ поверхностномъ слоѣ жидкости. Чѣмъ больше поверхность жидкости сравнительно съ ея массою, тѣмъ бóльшую роль должны играть эти силы; поэтому онѣ обнаруживаются особенно въ отдѣльно взятыхъ малыхъ количествахъ жидкости. Стремленіе жидкости втянуть въ себя молекулы, лежащія у ея по-

верхности, должно имѣть слѣдствіемъ кажущееся стремленіе жидкости принять такую форму, при которой ея поверхность была бы какъ можно меньше. Наименьшею поверхностью при данномъ объемѣ обладаетъ шаръ; поэтому малыя количества жидкости, даже находясь подъ вліяніемъ силы тяжести, принимаютъ форму шариковъ, какъ это напр. наблюдается на весьма малыхъ капляхъ ртути. Всякое увеличеніе поверхности жидкости требуетъ затраты работы, ибо оно должно сопровождаться перенесеніемъ частицъ, лежавшихъ ниже упомянутой поверхностной пленки, въ эту пленку и даже до самой поверхности жидкости; этому перенесенію препятствуетъ сила R', увеличивающаяся по мѣрѣ приближенія частицы къ самой поверхности. Поверхностная пленка какъ будто съ одной стороны сама стремится уменьшить свою поверхность, съ другой — сопротивляется всякой внѣшней силѣ, стремящейся увеличить ея размѣры.

§ 3. Испареніе жидкостей. Испареніе съ точки зрѣнія кинетической теоріи жидкостей объясняется тѣмъ, что отдѣльнымъ молекуламъ, лежащимъ у самой поверхности и обладающимъ въ данный моментъ особенно большой скоростью, направленной во внѣшнее пространство, удается выйти изъ сферы частичнаго дѣйствія, вылетѣть изъ жидкости, несмотря на удерживающую ихъ силу сцѣпленія. Если надъ жидкостью находится газъ или паръ другой жидкости, то вылетающія частицы встрѣчаются съ идущими имъ на встрѣчу частицами, и отчасти ими отбрасываются обратно въ жидкость, испареніе которой по этому происходитъ очень медленно. Въ пустотѣ испареніе происходитъ гораздо быстрѣе и въ весьма короткій промежутокъ времени достигаетъ нѣкотораго предѣла, который опредѣляется слѣдующимъ образомъ. Надъ испаряющейся жидкостью образуется ея же паръ, частицы котораго, ударяясь въ ея поверхность, попадаютъ въ сферу частичнаго дѣйствія и удерживаются жидкостью. Предѣлъ испаренія будетъ достигнутъ, когда въ единицу времени столько же частицъ вылетаетъ изъ жидкости, сколько въ нее попадаетъ изъ окружающаго пара; настаетъ своего рода подвижное равновѣсіе (стр. 386), при которомъ, несмотря на непрерывный обмѣнъ частицъ, количества жидкости и пара остаются безъ измѣненія.

Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что паръ насыщенъ. Чѣмъ выше температура, тѣмъ больше энергія движенія частицъ, и тѣмъ больше число частицъ, вылетающихъ въ данное время изъ поверхности жидкости. Соотвѣтственно этому должно увеличиться и число частицъ, влетающихъ въ жидкость, т.-е. должна увеличиться плотность, а слѣд. и упругость насыщеннаго пара, какъ это и наблюдается въ дѣйствительности.

Молекулы жидкости, какъ и молекулы газа, не обладаютъ въ данный моментъ одинаковыми скоростями; можетъ быть и къ нимъ приложимъ законъ Максвелла (стр. 401). Наиболѣе шансовъ вылетѣть изъ жидкости имѣютъ молекулы, обладающія особенно большою скоростью, а потому ясно, что при испареніи должна уменьшаться средняя энергія движенія частицъ неиспарившейся жидкости; поэтому жидкости при испареніи охлаждаются. Впрочемъ это только иная точка зрѣнія на фактъ, что при испареніи жидкости должна быть совершена работа на преодолѣваніе сцѣпленія между

частицами, и что необходимая для этой работы энергія берется изъ самой жидкости, если не существуетъ внѣшняго къ ней притока энергіи. Скорость частицы, вылетающей изъ жидкости, уменьшается вслѣдствіе противодѣйствія силъ сцѣпленія, и потому температура пара всегда равна температурѣ самой жидкости.

Когда паръ, охлаждаясь, сгущается въ жидкость, то силы сцѣпленія производятъ внутреннюю работу, начиная съ момента, когда молекулы приближаются другъ къ другу на разстояніе, равное радіусу сферы частичнаго дѣйствія. Результатомъ этой работы является задержка въ уменьшеніи скорости молекулъ, т.-е. въ охлажденіи, несмотря на продолжающійся утекъ энергіи къ окружающимъ тѣламъ. Изъ пара выдѣляется скрытая теплота ожиженія.

§ 4. Строеніе молекулъ жидкости. Молекула жидкости построена по всей вѣроятности гораздо сложнѣе молекулы ея же пара, особенно если послѣдній находится далеко отъ насыщенія. По всей вѣроятности молекулы жидкости состоятъ изъ нѣсколькихъ, а можетъ быть и большого числа простыхъ молекулъ, каковы газовыя, соединенныхъ въ одно цѣлое. Водяной паръ состоитъ изъ молекулъ H_2O, если допустить, что молекулы водорода и кислорода имѣютъ составъ H_2 и O_2. Составъ же молекулы воды можно изобразить формулою $(H_2O)_n$, гдѣ n неизвѣстное число молекулъ пара (gazogénique по терминологіи De-Heen'а), составляющихъ одну молекулу жидкости (liquidogénique). При испареніи сложная молекула жидкости распадается на составныя части, каковое явленіе можно назвать физическою диссоціацією.

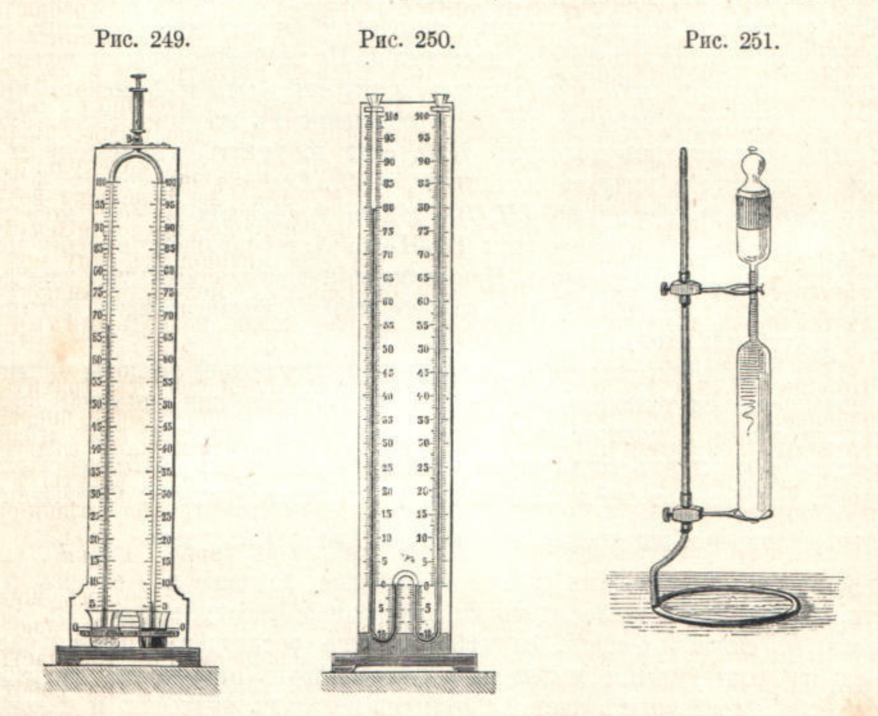
При нагрѣваніи жидкости одна часть притекающей теплоты тратится на повышеніе ея температуры, т.-е. на увеличеніе кинетической энергіи поступательнаго, а можетъ быть и вращательнаго движенія какъ цѣлыхъ молекулъ, такъ и ихъ составныхъ частей, т.-е. молекулъ болѣе простыхъ и атомовъ. Вторая, вообще весьма малая часть тепла тратится на внѣшнюю работу расширенія жидкости; она какъ и для газовъ равна $A\int pdv$, гдѣ A термическій эквивалентъ работы, p внѣшнее давленіе и v объемъ жидкости. Третья часть тепла идетъ на внутреннюю работу, которая съ своей стороны въ самомъ общемъ случаѣ вѣроятно распадается на три части: на работу разъединенія молекулъ жидкости другъ отъ друга; на работу разъединенія составныхъ частей сложныхъ молекулъ жидкости, и наконецъ на работу перемѣщенія атомовъ или группъ атомовъ, изъ которыхъ состоитъ простая молекула (gazogénique). Эту послѣднюю часть тепла можно назвать скрытой теплотой химической диссоціаціи, а предпослѣднюю скрытой теплотой физической диссоціаціи.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Плотность жидкостей.

§ 1. Понятіе о плотности жидкостей. Для жидкостей не отличаютъ двухъ различныхъ плотностей, какъ для газовъ. Согласно общему опредѣленію, плотность жидкости численно равна массѣ жидкости, содержащейся въ единицѣ объема, а если за единицу массы принять массу чистой воды при 4° Ц., заполняющей единицу объема, то плотность жидкости равна отношенію массы жидкости, имѣющей произвольный объемъ, къ массѣ чистой воды, занимающей при 4° Ц. такой же объемъ. «Табличная»

Рис. 249. Рис. 250. Рис. 251.



плотность, т.-е. та, которая обыкновенно помѣщается въ таблицахъ, относится къ 0°; если ее обозначить черезъ δ_0, то плотность δ при t^0 равна

$$\delta = \frac{\delta_0}{1+\alpha t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

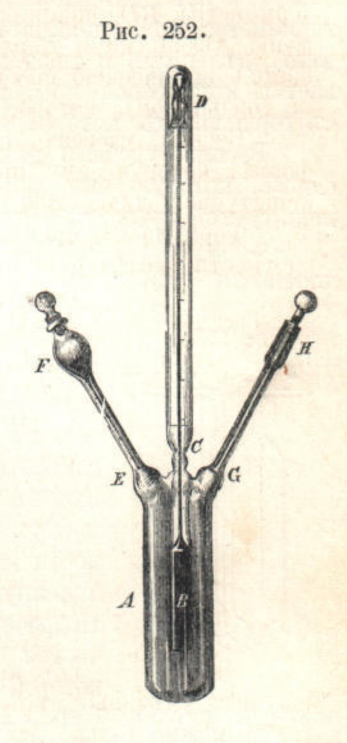
гдѣ α средній коэффиціентъ объемнаго расширенія жидкости между 0° и t^0.

Различныя жидкости обладаютъ весьма различными плотностями. Наименьшею плотностью обладаетъ повидимому жидкій ацетиленъ, для котораго, какъ показалъ Pictet, δ=0,35; наибольшими плотностями — ртуть и расплавленные металлы.

Для опредѣленія плотности жидкости существуетъ цѣлый рядъ способовъ, которые мы теперь и разсмотримъ. Вопросъ о болѣе точной зависимости плотности, т.-е. коэффиціента α, отъ температуры мы разсмотримъ въ ученіи о теплотѣ.

§ 2. Способъ Wilson'a. Для быстраго, приблизительнаго опредѣленія плотности жидкости могутъ служить маленькіе стеклянные пустые шарики, обладающіе различною среднею плотностью, которая на нихъ обозначена. Если рядъ такихъ шариковъ опустить въ жидкость, то нѣкоторые изъ нихъ опустятся на дно, другіе будутъ плавать по поверхности, и только одинъ останется почти неподвижнымъ внутри жидкости, плотность которой и равна приблизительно средней плотности этого шарика.

Рис. 252.



§ 3. Способъ сообщающихся сосудовъ. Этотъ способъ основанъ на томъ, что высоты жидкихъ столбовъ, производящихъ одинаковое давленіе на единицу поверхности дна, обратно пропорціональны плотностямъ взятыхъ жидкостей. Существуютъ два различныхъ пріема пользоваться этимъ закономъ; они уясняются двумя рисунками 249 и 250. На рис. 250 мы имѣемъ два сообщающихся сосуда, въ длинныя колѣна которыхъ наливаются двѣ жидкости, плотности которыхъ желаютъ сравнить, и притомъ въ такихъ количествахъ, чтобы въ обоихъ среднихъ колѣнахъ жидкости доходили до нулевыхъ дѣленій шкалъ. Въ приборѣ рис. 249 двѣ трубки, нижніе концы которыхъ погружены въ сосуды съ жидкостями, наверху соединены между собою и съ маленькимъ разрѣжающимъ воздушнымъ насосомъ. Если дѣйствовать насосомъ, то жидкости поднимаются по трубкамъ, причемъ давленія двухъ жидкихъ столбовъ очевидно должны быть равны между собою. Видоизмѣненія этого прибора предложилъ Bonfall.

§ 4. Способъ примѣненія пикнометра (или флакона). Стеклянный сосудъ взвѣшивается пустой (вѣсъ P), наполненный водой (вѣсъ P_1) и наконецъ наполненный испытуемой жидкостью (вѣсъ P_2). Безъ поправокъ искомая плотность δ равна

$$\delta = \frac{P_2 - P}{P_1 - P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

На рис. 251 изображенъ пикнометръ простой формы, состоящій изъ двухъ болѣе широкихъ частей, соединенныхъ тонкою трубкою. На трубкѣ проведена горизонтальная черта, до которой должна доходить поверхность воды, а затѣмъ испытуемой жидкости. Верхняя часть сосуда закрывается притертою пробкою, чтобы воспрепятствовать испаренію жидкостей. Напол-

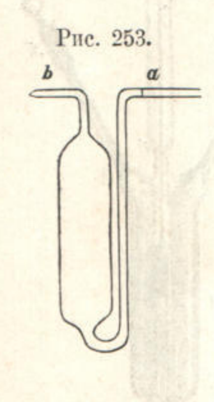
неніе пикнометра производится поперемѣннымъ подогрѣваніемъ и охлажденіемъ нижней его части, причемъ каждый разъ сперва выгоняется изъ нея воздухъ, а затѣмъ входитъ въ нее часть жидкости, налитой въ верхнюю часть. Высушиваніе флакона, необходимое передъ замѣною одной жидкости другою, представляетъ здѣсь нѣкоторыя затрудненія.

Гораздо удобнѣе пикнометръ Д. И. Менделѣева, см. рис. 252. Онъ состоитъ изъ двугорлой трубки A, внутри которой находится резервуаръ термометра BD, впаяннаго около C въ трубку. Боковыя узкія трубки снабжены дѣленіями и тщательно калибрированы. Трубка GH плотно закрывается коническою пробкою; на концѣ трубки EF находится расширеніе съ горлышкомъ, которое также плотно закрывается притертою пробкою.

Весьма удобенъ пикнометръ Sprengel'я, въ особенности въ той формѣ, которую ему придалъ Ostwald, см. рис. 253. Онъ наполняется испытуемой жидкостью отъ маленькаго отверстія b и до черты a.

Формула (2) приближенная; для полученія болѣе точнаго значенія плотности δ слѣдуетъ ввести нѣкоторыя поправки. При взвѣшиваніяхъ слѣдуетъ приводить вѣсъ къ пустотѣ, ибо δ есть отношеніе двухъ истинныхъ, а не двухъ кажущихся вѣсовъ. Далѣе вода и испытуемая жидкость могутъ наполнять пикнометръ при двухъ различныхъ температурахъ, которымъ соотвѣтствуютъ не вполнѣ одинаковые объемы самого пикнометра. Наконецъ, если пикнометръ былъ наполненъ до черты водою при t^0, плотность D которой можетъ быть найдена изъ таблицъ, то для полученія плотности жидкости относительно воды при 4^0 слѣдуетъ полученную по формулѣ (2) плотность помножить на D. Подробностей здѣсь не излагаемъ. Окончательно получается плотность жидкости при температурѣ t^0, при которой она наполняла пикнометръ до черты. Чтобы получить удѣльный вѣсъ δ_0 при 0^0 слѣдуетъ воспользоваться формулой (1), что возможно только въ тѣхъ рѣдкихъ случаяхъ, когда коеффиціентъ α извѣстенъ.

Рис. 253.



§ 5. Способъ, основанный на законѣ Архимеда. Опредѣляютъ кажущуюся потерю вѣса какого либо тѣла сперва въ испытуемой жидкости, (потеря P), потомъ въ водѣ (потеря P_1). Тѣло, которое должно тонуть въ обѣихъ жидкостяхъ, можетъ состоять изъ стекляннаго шарика или цилиндрика, содержащаго немного ртути; весьма удобно, когда къ нему непосредственно присоединенъ термометръ. Самое взвѣшиваніе можетъ происходить на обыкновенныхъ вѣсахъ съ коромысломъ, приспособленныхъ для удобнаго взвѣшиванія тѣла, висящаго на ниточкѣ внутри жидкости. Для этого одна изъ чашекъ вѣсовъ или совсѣмъ снимается или привѣшивается къ коромыслу на короткихъ нитяхъ и снабжается на нижней сторонѣ крючкомъ.

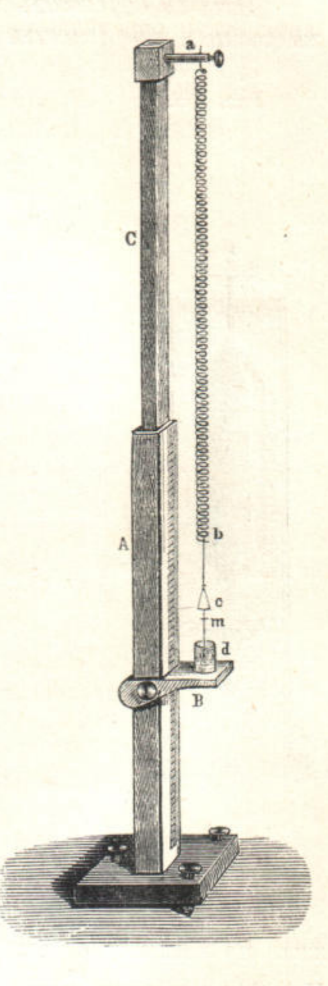
Весьма удобны для не очень точныхъ опредѣленій одноплечіе вѣсы Westphal'я, которые были изображены на рис. 172 стр. 301. Мы видѣли, что плечо Hh раздѣлено на 10 равныхъ частей, и что при вѣсахъ имѣются

проволочныя гири A_1, A_2, B и C, которыя удобно накладываются на плечо Hh въ малыя зарубки, находящiяся противъ дѣленiй. При вѣсахъ имѣется далѣе стеклянный цилиндрикъ съ термометромъ, который въ воздухѣ уравновѣшивается противовѣсомъ K. Вѣсъ равныхъ гирекъ A_1 и A_2 подобранъ такъ, что онъ какъ разъ равняется вѣсу воды при 15°, вытѣсненному этимъ цилиндрикомъ. Опустивъ цилиндрикъ въ воду и привѣсивъ гирьку A_1 къ крючку h, какъ показано на чертежѣ, мы получимъ равновѣсiе. Если вѣсъ гирекъ A_1 и A_2 принять за единицу, то вѣсъ B равенъ 0,1, а вѣсъ C равенъ 0,01.

Если опустить цилиндрикъ въ жидкость, которая плотнѣе воды, то для достиженiя равновѣсiя придется прибавить еще гири, причемъ потеря вѣса цилиндрика непосредственно отчитывается на дѣленiяхъ плеча Hh; но такъ какъ потеря вѣса въ водѣ принята за единицу, то этотъ отчетъ непосредственно даетъ искомую плотность жидкости. Если напр. получится распредѣленiе гирекъ, показанное на нижнемъ правомъ рис. 172, гдѣ $A (= 1)$ лежитъ на дѣленiи 8, B (0,1) на дѣленiи 4, и C (0,01) на дѣленiи 6, при чемъ A_1 $(= 1)$ не снято, т.-е. находится подъ дѣленiемъ 10, то потеря вѣса цилиндрика въ жидкости, а слѣд. и ея плотность равна 1,846. Когда плотность жидкости меньше единицы, то и потеря вѣса меньше принятой нами единицы вѣса. Въ этомъ случаѣ A_1 должно быть снято. Если получится распредѣленiе гирекъ A, B и C, изображенное на лѣвомъ нижнемъ рис. 172, то это показываетъ, что искомая плотность жидкости равна 0,747.

Необычайной степени точности достигъ F. Kohlrausch, опредѣляя плотность слабыхъ растворовъ по способу, основанному на законѣ Архимеда.

Рис. 254.



На рис. 254 изображены пружинные вѣсы Jolly, могущiе также служить для опредѣленiя удѣльнаго вѣса жидкостей. Они состоятъ изъ спирально свернутой проволоки ab, къ которой привѣшены, одна подъ другой, двѣ чашечки c и d, между которыми находится плоская мѣтка m изъ бѣлаго стекла. Столбъ A снабженъ дѣленiями, нанесенными на зеркалѣ; положенiе мѣтки опредѣляется отчитыванiемъ дѣленiя, около котораго она покрываетъ, если смотрѣть спереди, свое изображенiе въ зеркальной шкалѣ. Сосудъ съ водою или съ испытуемой жидкостью ставится на столикъ B,

который можно перемѣщать вдоль A и помощью винта закрѣплять въ желаемомъ положеніи.

Опредѣленіе δ для жидкостей производится при постоянномъ положеніи мѣтки m слѣдующимъ образомъ. Чашечка d замѣняется какимъ либо тѣломъ, напр. стекляннымъ шарикомъ, тонущимъ въ водѣ и въ испытуемой жидкости, и отчитывается дѣленіе s шкалы, противъ котораго останавливается мѣтка m.

Затѣмъ опускаютъ тѣло сперва въ воду, а потомъ въ испытуемую жидкость и опредѣляютъ вѣсъ тѣхъ гирь p_1 и p_2, которыя слѣдуетъ поло-

Рис. 255.

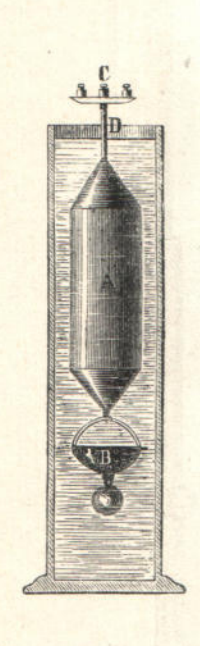
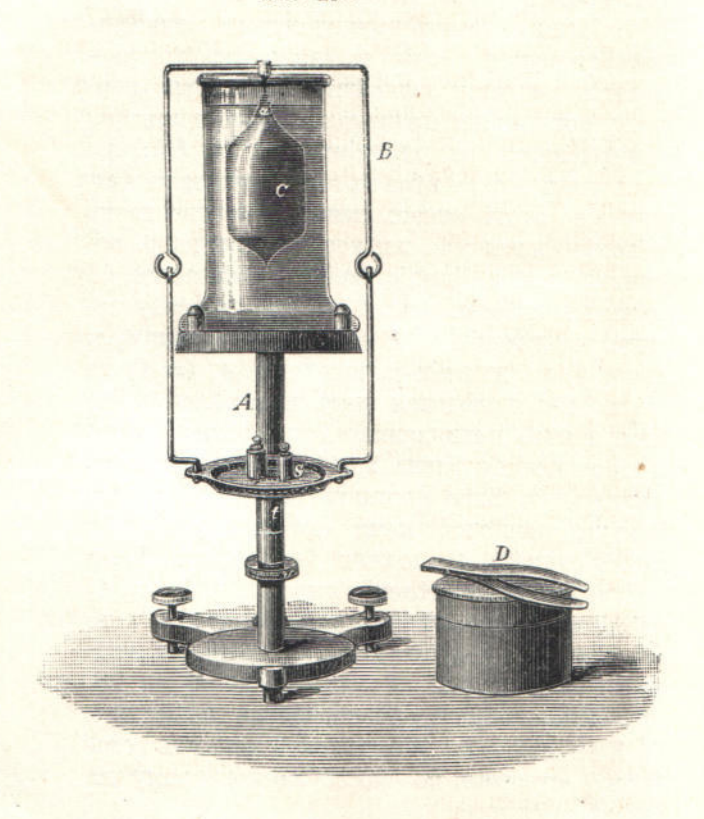


Рис. 256.



жить на чашечку c, чтобы мѣтку вновь привести къ дѣленію s шкалы. Искомая плотность равна $\delta = \frac{p_2}{p_1}$.

Можно пользоваться вѣсами Jolly, не употребляя вовсе гирекъ, а измѣряя перемѣщеніе s мѣтки, которое можно считать пропорціональнымъ измѣненію нагрузки p. Точнѣе p выражается формулою вида $p = As + Bs^2$, гдѣ s удлиненіе, вызванное нагрузкою p. Пренебрегая вторымъ членомъ, мы можемъ перемѣщеніе мѣтки принять за мѣру измѣненія нагрузки, а за единицу вѣса — вѣсъ той нагрузки, которая перемѣщаетъ мѣтку на одно

дѣленіе шкалы. Положимъ, что мѣтка стоитъ противъ дѣленія s_0, когда шарикъ находится въ воздухѣ. Когда мы снизу подведемъ сосудъ съ водою и установимъ его такъ, чтобы шарикъ находился въ серединѣ жидкости, то мѣтка остановится противъ нѣкотораго дѣленія s_1, и противъ дѣленія s_2, когда воду замѣнимъ другою жидкостью, причемъ B придется нѣсколько поднять или опустить.

Искомая плотность $\delta = \frac{s_0 - s_2}{s_0 - s_1}$.

§ 6. Ареометры. На рис. 255 изображенъ ареометръ Nicholson'а съ постояннымъ объемомъ съ придѣланной внизу чашечкой B, которою пользуются при опредѣленіи плотности твердыхъ тѣлъ. На проволокѣ D находится черта, до которой ареометръ долженъ погружаться въ водѣ и въ испытуемой жидкости, причемъ на чашечку C приходится положить гири, вѣсъ которыхъ обозначимъ черезъ p_1 и p_2. Если P вѣсъ самого ареометра, то $\delta = \frac{P+p_2}{P+p_1}$.

Рис. 257.

Явленія волосности имѣютъ большое вліяніе на показанія ареометра, представляя весьма существенный источникъ погрѣшностей, не дающій возможности ручаться даже за третью десятичную при опредѣленіи плотности δ жидкостей. Lohnstein построилъ ареометръ, на показанія котораго волосность не вліяетъ и который даетъ возможность опредѣлять δ съ точностью до 0,0001. Ареометръ Lohnstein'а изображенъ на рис. 256. Полое стеклянное тѣло C оканчивается около a горизонтальной плоскостью съ рѣзко отшлифованными краями. Оно поддерживаетъ чашку S, на которую кладутся гири (изъ коробки D) въ такомъ количествѣ, чтобы горизонтальная поверхность жидкости совпала съ поверхностью края a, какъ это показано на рис. 257. Передъ накладываніемъ гирь слѣдуетъ подпереть чашку S столикомъ t, который можно поднимать и опускать вращеніемъ винтовой головки v, и затѣмъ медленно опустить этотъ столикъ, чтобы избѣжать опусканія края a ниже поверхности жидкости при слишкомъ большой нагрузкѣ. При $\delta = 0{,}7000$ тѣло C опускается до положенія, изображеннаго на рис. 257. Въ коробкѣ D находятся 17 гирь, на которыхъ обозначены числа отъ 0,0001 до 0,5; вѣса этихъ гирь подобраны такъ, что искомая плотность δ жидкости получается сложеніемъ числа 0,7 съ числами, обозначенными на гиряхъ, положенныхъ на чашку S. Этотъ ареометръ даетъ возможность опредѣлять плотности жидкостей отъ $\delta = 0.7$ до $\delta = 2$.

Универсальный «денсиметръ» построилъ Courtonne.

Устройство ареометра съ постояннымъ вѣсомъ извѣстно изъ элементарнаго курса физики. Напомнимъ только, что на длинномъ его стержнѣ начертана шкала, дѣленія которой непосредственно даютъ плотность жидкости, въ которой ареометръ опускается до даннаго дѣленія. Въ ареометрахъ, назначенныхъ для жидкостей, тяжелѣйшихъ воды, дѣленіе 1,00 находится на самой верхней точкѣ шкалы, и въ самой нижней, когда ареометръ служитъ для опредѣленія плотности жидкостей, легчайшихъ воды.

Явленія смачиванія, которыя мы разсмотримъ ниже, въ значительной степени затрудняютъ примѣненіе ареометровъ.

Vandevyver построилъ ареометръ, который заставляютъ всегда плавать въ дестиллированной водѣ, между тѣмъ какъ испытуемая жидкость помѣщается внутри самого ареометра. Это даетъ возможность пользоваться ареометромъ для опредѣленія плотности жидкостей, имѣющихся въ небольшомъ количествѣ.

Существуетъ группа ареометровъ, имѣющихъ особую условную шкалу. Нѣкоторые изъ нихъ служатъ для быстраго распознаванія состава опредѣленныхъ смѣсей, и тѣмъ самымъ сравнительнаго ихъ достоинства и цѣнности.

Ареометръ Baumé, которымъ часто пользуются, опускается въ чистой водѣ при 12°,5 Ц. до дѣленія 0, находящагося близъ верхняго конца стержня. Въ растворѣ 15 частей поваренной соли въ 85 частяхъ воды онъ опускается до черты, противъ которой стоитъ число 15. Разстояніе между дѣленіями 0 и 15 раздѣлено на 15 частей; далѣе дѣленія продолжены внизъ до 70-го дѣленія. Значеніе дѣленій по Baumé слѣдующее:

По Baumé:	0,0	13,2	24,2	33,5	41,5	48,4	54,4	59,8	64,5	68,6	72,6
Плотность:	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0.

Крѣпкая сѣрная кислота имѣетъ плотность 66 по Baumé, продажная азотная кислота—36, соляная—22.

Для жидкостей, легчайшихъ воды, Baumé построилъ ареометръ, опускающійся въ водѣ до дѣленія 10, находящагося недалеко отъ нижняго конца шкалы, и до дѣленія 0 въ растворѣ десяти частей поваренной соли въ 90 частяхъ воды; дѣленія идутъ снизу вверхъ до 60-ти приблизительно; ихъ значеніе слѣдующее:

По Baumé:	10,0	17,7	26,1	35,6	46,3	58,4
Плотность:	1,0	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75.

Ареометры, служащіе для опредѣленія содержанія чистаго алкоголя въ продажномъ спиртѣ, называются спиртомѣрами. Такой приборъ построилъ Gay-Lussac; дѣленіе, до котораго онъ опускается, даетъ непосредственно содержаніе алкоголя въ процентахъ объема; дѣленіе 0 (чистая вода) находится на нижнемъ, дѣленіе 100 (чистый алкоголь) на верхнемъ концѣ шкалы. Подобное же устройство имѣетъ спиртомѣръ Tralles'а. Въ приборѣ Richter'а дѣленія шкалы указываютъ вѣсовое процентное содержаніе алкоголя. Дѣленія на шкалѣ спиртомѣра не равноотстоящія другъ отъ друга, такъ какъ плотность спирта не составляетъ линейной функціи процентнаго содержанія алкоголя. Это происходитъ отъ того, что смѣшеніе алкоголя съ водою сопровождается значительнымъ уплотненіемъ смѣси; такъ 50 объемовъ воды и 50 объемовъ алкоголя даютъ только 96,3 объема спирта. Плотность спирта значительно мѣняется съ температурой, и потому слѣдуетъ ввести поправку къ показаніямъ спиртомѣровъ, пользуясь составленными для этой цѣли табличками.

Въ таблицахъ IV–VIII, въ концѣ книги, помѣщены числовыя величины плотности различныхъ жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА.

Bonfall. Revue génerale des Sciences. 1896 p. 318, 418.
Исторія ареометровъ: *Gerland.* W. A. 1 p. 150, 1877.
Bernard. Alcoométrie. Paris, 1875.
Gay-Lussac. Instruction pour l'usage de l'alcoométre. Paris, 1824.
Paquet. J. de phys. 4 p. 266, 1875.
Buignet. J. de phys. 9 p. 93, 1880.
Jolly. Münch. Ber. 1864 p. 162; Proc. Dubl. Soc. 5 p. 41, 347, 1886.
Sprengel. Pogg. Ann. 150 p. 459, 1873.
Westphal. Arch. Pharm. 10 p. 322, 1867.
Michaelis. Instr. 1883 p. 268.
Kahlbaum. W. A. 19 p. 378, 1883.
Schiff. Chem. Ber. 14 p. 2761, 1881.
Bluemcke. W. A. 23 p. 404, 1884.
Менделѣевъ. Смѣшеніе спирта съ водою. С.-Пб. 1865.
Tralles. Gilb. Annal. 38 p. 349, 1811.
Kopp. Pogg. Ann. 72 p. 1, 1847.
Ostwald. J. f. pract. Chemie. 16 p. 396, 1877; Hülfsbuch für phys.-chem. Messungen, Leipzig. 1893 p. 109—110.
Lohnstein. Instr. 14 p. 164, 1893.
Courtonne. J. d. phys. (3) 3 p. 315, 1896.
Vandevyver. J. d. phys. (3) 4 p. 560, 1895; Arch. d. sc. phys. et natur. 34 p. 409, 1895.
Kohlrausch. W. A. 56 p. 185, 1895.
Pictet (плотность жидкаго ацетилена). Arch. d. sc. phys. et natur. 34 p. 362, 1895.
С. О. Макаровъ. Удѣльный вѣсъ морской воды. Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 30, 1893.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Сжимаемость жидкостей.

§ 1. Коэффиціентъ сжатія. Реально существующія жидкости не обладаютъ свойствомъ абсолютной несжимаемости, которое мы приписываемъ идеальнымъ или совершеннымъ жидкостямъ; ихъ объемъ v уменьшается, когда увеличивается внѣшнее давленіе p, подъ которымъ находится каждая единица поверхности жидкости. Если p увеличивается на dp, то объемъ измѣняется на нѣкоторую величину dv, которая пропорціональна объему v и приращенію dp давленія. Обозначая множитель пропорціональности черезъ β и считая его величиною положительною, мы должны написать

$$dv = -\beta v\, dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ибо положительному dp соотвѣтствуетъ отрицательное dv.

Величина β, называемая **коэффиціентомъ сжатія**, зависитъ отъ рода взятой жидкости, и потому представляетъ физическую величину особаго рода, характеризующую сжимаемость жидкости. Формула (1) даетъ

$$\beta = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Такъ какъ жидкости мало сжимаемы, то вмѣсто математически точныхъ формулъ (1) и (2) употребляютъ такія

$$\left.\begin{aligned} \Delta v &= -\beta v p \\ \beta &= -\frac{1}{p}\frac{\Delta v}{v} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ Δv то малое измѣненіе объема v, которое вызывается увеличеніемъ внѣшняго давленія на величину p. Численное значеніе β не зависитъ отъ избранной единицы объема; но оно обратно пропорціонально численному значенію давленія p, т. е. прямо пропорціонально избранной единицѣ давленія. Иногда выражаютъ p въ килограммахъ на кв. метръ поверхности, а иногда въ атмосферахъ. Если въ первомъ случаѣ численное значеніе коэффиціента сжатія β_1, во второмъ β, то мы имѣемъ

$$\beta = 10333\,\beta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

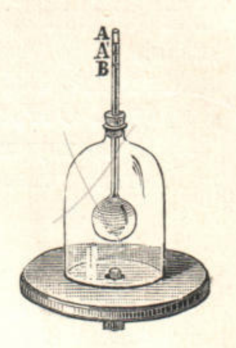
Величина β_1 встрѣчается въ различныхъ теоретическихъ формулахъ; для практическихъ вычисленій ее замѣняютъ величиной β, которая и подразумѣвается обыкновенно, когда говорятъ о коэффиціентѣ сжатія жидкости. Формула (3) показываетъ, что **эта величина численно равна относительному измѣненію объема, вызванному измѣненіемъ внѣшняго давленія на одну атмосферу**. Коэффиціентъ сжатія есть функція состоянія (стр. 26) жидкости, и мѣняется въ зависимости отъ температуры и отъ давленія, подъ которымъ жидкость уже находится при объемѣ v, т.-е. до дальнѣйшаго сжатія.

§ 2. Изслѣдованія сжимаемости жидкостей до Oersted'а. Въ 1620 г. Bacon описалъ попытку изслѣдовать сжимаемость воды. Наполнивъ пустой свинцовый шаръ водою, онъ подвергалъ его сперва ударамъ молота, а затѣмъ сжатію въ прессѣ, пока вода не выступила наружу и покрыла внѣшнюю поверхность шара какъ бы росою. Опредѣленнаго уменьшенія объема жидкости нельзя было замѣтить. Такой же отрицательный результатъ дали опыты флорентинскихъ академиковъ, произведенные около 1667 г. надъ серебрянымъ шарикомъ, также наполненнымъ водою.

Первый John Canton доказалъ въ 1761 г. опытомъ, что вода сжимается. Его приборъ имѣлъ видъ термометра съ большимъ шаровиднымъ резервуаромъ (рис. 258) и волосною трубкою. Онъ наполнилъ его почти до конца трубки водою, кипяченіемъ выгналъ воздухъ, оставшійся надъ водою и запаялъ конецъ трубки. Послѣ охлажденія вода остановилась у нѣкотораго дѣленія, находясь подъ незначительнымъ давленіемъ своихъ паровъ.

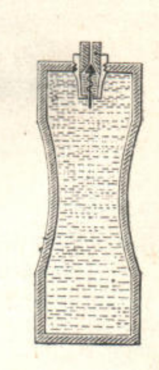
Когда онъ отломилъ кончикъ трубки, такъ что внѣшнее атмосферное давленіе могло дѣйствовать на жидкость, то онъ замѣтилъ внезапное пониженіе верхняго конца жидкаго столбика въ трубкѣ. Это пониженіе могло имѣть двѣ причины: сжатіе жидкости и расширеніе шарика, на который сперва дѣйствовало только внѣшнее давленіе, а потомъ и внѣшнее и внутреннее. Чтобы отдѣлить другъ отъ друга эти два дѣйствія, онъ помѣстилъ приборъ внутри колокола воздушнаго насоса, изъ котораго былъ выкачанъ воздухъ (см. рис. 258). Вода доходила сперва до нѣкоторой черты A, причемъ давленіе на шарикъ извнутри и снаружи можно было считать равнымъ нулю. Когда онъ отломилъ кончикъ трубки, вода опустилась до B, а когда онъ затѣмъ впустилъ воздухъ въ колоколъ, то она вновь поднялась до нѣкоторой точки A', лежавшей однако ниже A. Canton полагалъ, что емкость шарика, находившагося теперь снаружи и извнутри опять подъ одинаковымъ, а именно атмосфернымъ давленіемъ, была въ концѣ опыта такая же, какъ и въ началѣ, и приписалъ опусканіе воды отъ A до A' сжатію этой жидкости. Въ дѣйствительности, однако, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, емкость шарика въ концѣ опыта была нѣсколько меньше, чѣмъ въ началѣ, и потому опусканіе воды въ трубкѣ еще въ большей степени, чѣмъ самъ Canton думалъ, служитъ доказательствомъ ея сжимаемости. Онъ нашелъ $\beta = 0{,}000046$, что прекрасно согласуется съ новѣйшими изысканіями. Повторяя тѣ же опыты со ртутью и производя ихъ при различныхъ температурахъ, Canton замѣтилъ, что съ повышеніемъ температуры сжимаемость воды уменьшается, а сжимаемость ртути увеличивается.

Рис. 258.



J. Perkins (1820) доказалъ слѣд. образомъ сжимаемость воды. Онъ устроилъ металлическій сосудъ съ вогнутыми стѣнками, изображенный на рис. 259. Сосудъ наполнялся водою и закрывался внутреннимъ клапаномъ, который давалъ возможность водѣ войти въ сосудъ, когда наружное давленіе было больше внутренняго, но не выпускалъ ее, когда, наоборотъ, перевѣсъ былъ на сторонѣ внутренняго давленія. Весь сосудъ взвѣшивался и помѣщался въ толстостѣнный цилиндръ (пушку), наполненный водой, которая подвергалась сильному сжатію. Въ другихъ опытахъ сосудъ опускался въ море до извѣстной глубины, въ которой давленіе доходило до 100 атм. Послѣ этого сосудъ вновь взвѣшивался. Онъ оказался тяжелѣе, чѣмъ онъ былъ въ началѣ, слѣд. въ него вошло нѣкоторое количество воды, когда онъ находился подъ сильнымъ, всестороннимъ давленіемъ, при которомъ емкость сосуда даже нѣсколько уменьшалась. Это доказываетъ, что плотность воды при сжатіи увеличивается.

Рис. 259.

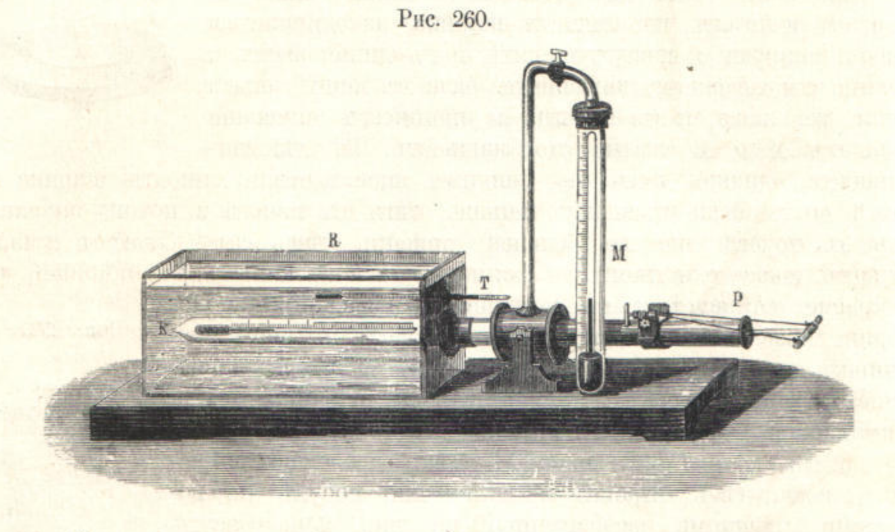


§ 3. Опыты Oersted'a (1822). Oersted первый построилъ приборъ, въ которомъ сжатіе жидкостей могло быть довольно точно измѣрено. Такого рода

приборы называются піезометрами. Главная часть прибора Oerstedt'а по виду походила на термометръ съ большимъ цилиндрическимъ резервуаромъ и волосною трубкою съ дѣленіями. Испытуемая жидкость наполняла резервуаръ и часть трубки, гдѣ надъ нею находился маленькій столбикъ ртути. Весь приборъ помѣщался внутри вертикальнаго толстостѣннаго цилиндра, наполненнаго водою, которую можно было сжимать помощью поршня. Внутри цилиндра помѣщались термометръ и воздушный манометръ; величина давленія была такимъ образомъ извѣстна. Когда производилось сдавливаніе, то ртутный столбикъ опускался внизъ; по величинѣ его перемѣщенія можно было судить о степени сжатія жидкости. Измѣненіемъ емкости резервуара Oerstedt пренебрегалъ.

Существуютъ піезометры, въ которыхъ резервуаръ съ испытуемой жидкостью устанавливается трубкою внизъ; конецъ трубки погруженъ въ

Рис. 260.



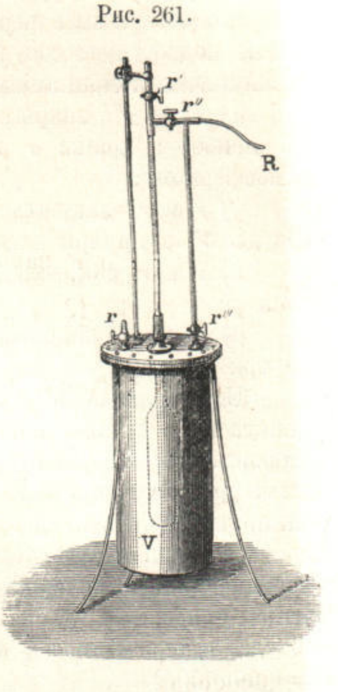
маленькій сосудъ со ртутью, столбикъ которой находится и въ самой трубкѣ. При сдавливаніи ртуть въ трубкѣ поднимается.

§ 4. Опыты Sturm'a и Colladon'a (1827). Приборъ, которымъ пользовались эти ученые, изображенъ на рис. 260. Толстостѣнная стеклянная трубка *K* наполнена водою; внутри ея находится термометровидный піезометръ, трубка котораго весьма тщательно калибрирована. Въ немъ содержится испытуемая жидкость, отдѣленная отъ воды длиннымъ столбикомъ воздуха или сѣрнистаго углерода. Трубка *K* вдѣлана въ стѣнку открытаго сосуда *R*, наполненнаго водою, которая служитъ для удержанія трубки *K* при опредѣленной температурѣ, указываемой термометромъ *T*. Сдавливаніе производилось помощью поршня, находящагося внутри цилиндра *P*, и приводимаго въ движеніе помощью безконечнаго винта и шестерни. Величина достигнутаго давленія указывалась воздушнымъ манометромъ *M*.

Sturm и Colladon приняли во вниманіе измѣненіе емкости самого сосуда, содержащаго испытуемую жидкость и подверженнаго одинаковому

давленію, какъ извнутри, такъ и снаружи. Мы увидимъ впослѣдствіи, что объемы, опредѣленные внѣшнею и внутреннею (емкость) поверхностями сосуда, въ этомъ случаѣ уменьшаются настолько же, насколько они уменьшились бы, еслибы вмѣсто сосуда мы имѣли сплошное тѣло, одинаковаго съ нимъ внѣшняго объема. Это обстоятельство играетъ весьма важную роль въ піезометріи. Особенно при изслѣдованіи мало сжимаемыхъ жидкостей, какова ртуть, необходимо точно знать, насколько мѣняется емкость самого піезометра при сжатіи. Чтобы ввести необходимую поправку, Sturm и Colladon изслѣдовали, какъ велико относительное удлиненіе α стекляннаго стержня при его растяженіи силою, которая равна, положимъ, ps, гдѣ s площадь поперечнаго сѣченія стержня, такъ что p есть растягивающая сила, приходящаяся на единицу площади поперечнаго сѣченія. Они предположили, что если на кусокъ стекла будетъ со всѣхъ сторонъ произведено давленіе, причемъ на каждую единицу поверхности придется давленіе p, то относительное уменьшеніе объема будетъ равно 3α. Мы увидимъ, что это невѣрно и что поэтому числа, данныя Sturm'омъ и Colladon'омъ, требуютъ исправленія. Кромѣ того сжимаемость стекла, изъ котораго былъ изготовленъ стержень, могла и не равняться сжимаемости стекла піезометра. Они нашли слѣдующія числа (исправленныя) для коеффиціента β, помноженнаго на 10^6:

Рис. 261.



	Температура.	Давленіе.	$10^6\beta$.
Вода	0°	1—24 атм.	49,6
Ртуть	0°	1—30	3,4
Эфиръ.	0°	3—12	131,6
»	0°	18—24	120
»	11,4°	2—24	144
Алкоголь	10°	1—2	94,5
»	10°	9—10	92,0
»	10°	21—22	87,5
Азотная кисл.	0°	1—32	338,5

§ 5. Опыты Regnault (1847). Regnault первый построилъ приборъ, дающій возможность съ точностью опредѣлить то измѣненіе емкости самого піезометра, которое сопровождаетъ сжиманіе находящейся въ немъ жидкости. Его приборъ, изображенный на рис. 261, состоитъ изъ крѣпкаго металлическаго сосуда, наполненнаго водою; внутри него находится продолговатый сосудъ V, съ припаянной къ нему калиброванной волосной трубкой

имѣющей кранъ r'. Въ крышку наружнаго сосуда вставлены кранъ r и трубка съ краномъ r'''; она можетъ быть соединена съ сосудомъ Vr' помощью крана r''. Трубка R ведетъ къ резервуару сжатаго воздуха, давленіе котораго обозначимъ черезъ p. Смотря по тому, которые краны открыты, можно подвергнуть сосудъ V, содержащій испытуемую жидкость, четыремъ различнымъ комбинаціямъ давленій, а именно:

1) r'' и r''' закрыты, такъ что давленіе p вовсе не можетъ передаться къ прибору; краны r и r' открыты: снаружи и внутри давленіе равно атмосферному;

2) r и r'' закрыты, r' и r''' открыты: снаружи имѣемъ давленіе p на сосудъ V, а внутри давленіе атмосферное;

3) r и r' закрыты, r'' и r''' открыты: снаружи и внутри имѣемъ давленіе p;

4) r' и r''' закрыты, r и r'' открыты: снаружи давленіе атмосферное, внутри давленіе p.

Итакъ, давленіе p могло или вовсе не дѣйствовать на сосудъ, или дѣйствовать только снаружи, или только извнутри, или съ обѣихъ его сторонъ. Жидкій столбъ въ капилярной трубкѣ останавливался на различныхъ высотахъ при этихъ четырехъ случаяхъ распредѣленія давленій. Комбинируя результаты четырехъ наблюденій, можно вычислить, какъ сжимаемость матеріала, изъ котораго сдѣланъ внутренній сосудъ, такъ и сжимаемость жидкости, которою онъ былъ наполненъ. Самъ Regnault пользовался этимъ приборомъ главнымъ образомъ для измѣренія сжимаемости матеріала сосуда, и опредѣлилъ β только для воды ($\beta = 0{,}000047$) и для ртути ($\beta = 0{,}0000035$).

Grassi (1851) воспользовался приборомъ Regnault для опредѣленія коэффиціента сжатія β различныхъ жидкостей. Вотъ нѣкоторыя изъ его чиселъ:

	Температура	$10^6\beta$
Вода	0°	50,2
»	10,8	48,0
»	26,0	45,5
»	53,0	44,1
Эфиръ . . .	0	111
» . . .	14	140
Алкоголь . .	7,3	82,8
» . .	13,1	90,4
Хлороформъ .	8,5	62,5

	Температура	$10^6\beta$
Ртуть	0°	2,95
$SO_3 + 2H_2O$	14°	24,2
$+ 3H_2O$	14°	25,0
$+ 4H_2O$	14°	27,1
$+ 5H_2O$	14°	27,9
$+ 6H_2O$	14°	28,3
$+ 10H_2O$	14°	31,5

Ртуть обладаетъ наименьшимъ сжатіемъ изъ всѣхъ изслѣдованныхъ жидкостей. Числа Grassi подтверждаютъ, что съ повышеніемъ температуры сжимаемость воды уменьшается, а другихъ жидкостей—увеличивается.

§ 6. Различныя измѣренія сжимаемости жидкостей. Jamin, Amaury и Descamps (1869) нашли для ртути вдвое меньшее число, чѣмъ Regnault ($10^6\beta = 1{,}87$), но изслѣдованія Amagat и др. не подтвер-

дили этого результата; Amagat нашелъ (1869) для ртути $10^6\beta = 3{,}92$, число близкое къ числу Sturm'а и Colladon'а (3.4). Де-Мецъ (1892) нашелъ $10^6\beta = 3{,}74$.

Cailletet (1872) измѣрялъ сжимаемость различныхъ жидкостей при очень высокихъ давленіяхъ и при температурѣ около 10°. Его числа не точны, такъ какъ онъ не измѣрялъ непосредственно сжатія сосуда, содержавшаго испытуемыя жидкости. Приводимъ нѣкоторыя изъ его чиселъ:

	Давленіе	$10^6\beta$		Давленіе	$10^6\beta$
Вода . .	705 атм.	46,9	Алкоголь . .	174 атм.	69,4
Эфиръ . .	630 »	145,8	» . .	305	71,9
CS_2 . .	607 »	99,8	» . .	680	74,5

Эти числа привели Cailletet къ заключенію, что сжимаемость жидкостей весьма мало мѣняется съ величиною самого давленія, между тѣмъ какъ Grassi нашелъ, что сжимаемость алкоголя, хлороформа и эфира увеличивается вмѣстѣ съ давленіемъ.

Amagat изслѣдовалъ въ первыхъ своихъ работахъ (1869) зависимость сжимаемости нѣкоторыхъ жидкостей отъ температуры. Онъ нашелъ для эфира:

t^0	13,0	25,4	63,0	78,5	99,0
$10^6\beta$	168	190	296	365	552.

Для алкоголя $10^6\beta = 101$ при 14°,0, и 202 при 99°,4; для бензола 90 при 16°, и 187 при 99°,3; для CS_2 онъ нашелъ 87,2 при 15°,6, и 174 при 100° — во всѣхъ случаяхъ быстрое возростаніе сжимаемости съ температурой.

Опыты Pagliani и Vicentini, Авенаріуса и Grimaldi надъ водой и эфиромъ дали слѣдующія числа для $10^6\beta$:

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60	70°	80°	90°	100°
Вода . .	51,7	48,54	46,09	44,14	42,65	41,68	41,15	41,19	41,51	42,11	43,0
Эфиръ . .	146.0	168,0	191,0	215,2	240,5	271,0	305,9	344,9	388,8	436,6	489,0.

Для воды получается минимумъ сжимаемости ($10^6\beta = 41{,}12$) при 62°.

Сжимаемость растворовъ изслѣдовалъ Drecker (1888); оказалось, что для растворовъ $CaCl_2$ и KCl она меньше сжимаемости воды, и уменьшается съ увеличеніемъ крѣпости раствора. Для раствора $CaCl_2$ въ водѣ онъ нашелъ

Проц. содержаніе соли:	5,8%	17,8%	30,2%	40,9%
$10^6\beta$	39,7	31,3	25,6	21,7.

Для KCl получились числа:

Проц. содержаніе соли:	2,49%	8,28%	16,75%	24,31%
$10^6\beta$	42,6	38,9	34,1	30,1.

Сжимаемость большинства растворовъ солей въ водѣ уменьшается съ повышеніемъ температуры.

Растворы сѣрной кислоты сжимаются менѣе, чѣмъ вода; минимумъ сжимаемости наблюдается при 80% H_2SO_4 въ водѣ.

Сжимаемость различныхъ жидкостей опредѣлялъ Де-Мецъ. Онъ нашелъ для $10^6\beta$ слѣдующія числа:

Касторовое масло	47,234	Жидкій параффинъ . .	62,690
Льняное »	51,825	Вода дестиллированная .	47,430
Миндальное »	53,473	Глицеринъ	22,128
Оливковое »	56,266	Растворъ сахара (плотность 1,350) . .	20,827

Сжимаемость смѣси оказалась въ нѣкоторыхъ случаяхъ меньше, чѣмъ даетъ вычисленіе (по правилу смѣшенія).

Tait находитъ, что коеффиціентъ β, какъ функція давленія p, подъ которымъ жидкость уже находится, выражается формулою вида

$$\beta = \frac{A}{B+p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ A и B постоянныя числа. Такъ, для воды при 0°

$$\beta = \frac{0{,}3015}{5933+p},$$

гдѣ p выражено въ атмосферахъ. Для растворовъ соли въ водѣ формула (5) должна быть замѣнена такою

$$\beta = \frac{A}{B+p+\delta},$$

гдѣ A и B имѣютъ то же значеніе, что и для воды, и гдѣ δ пропорціонально вѣсу соли, растворенной въ 100 частяхъ воды.

Roentgen и Schneider нашли для воды

при 0° $10^6\beta = 51{,}2$

» 9° $10^6\beta = 48{,}1$.

§ 7. Изслѣдованія Amagat. Въ послѣдніе годы появился цѣлый рядъ работъ Amagat, разрѣшающихъ различные вопросы касательно зависимости сжимаемости жидкостей отъ температуры и отъ давленія.

Увеличивая внѣшнее давленіе, Amagat доходилъ до 3000 атмосферъ. Приборъ, которымъ онъ пользовался, имѣетъ слѣдующее устройство. Стальной толстостѣнный цилиндръ наполненъ глицериномъ; въ нижней его части находится ртуть, въ которую входитъ нижній конецъ трубки піезометра, содержащаго испытуемую жидкость. Когда глицеринъ подвергался сжатію, то ртуть поднималась по трубкѣ піезометра соотвѣтственно измѣненію объема жидкости и емкости самого піезометра. Чтобы опредѣлить, до какой

высоты поднялась ртуть, Amagat впаялъ въ стѣнку трубки рядъ платиновыхъ проволокъ, соединенныхъ снаружи (въ глицеринѣ) платиновыми же спиральками, составлявшими, такимъ образомъ, одинъ непрерывный рядъ. Послѣдняя, верхняя проволока проходила черезъ стѣнку стального цилиндра, будучи отъ него изолирована непроводникомъ электрическаго тока. Электроды цѣпи, содержавшей гальванометръ, были присоединены къ стѣнкѣ стального цилиндра и къ выходящей изъ нея проволокѣ. Въ этомъ случаѣ цѣпь была замкнута: токъ проходилъ отъ стѣнки цилиндра въ ртуть и въ ртутный столбикъ, вошедшій въ трубку піезометра; изъ ртути онъ входилъ черезъ послѣднюю платиновую проволочку къ спиралямъ, изъ которыхъ каждая имѣла сопротивленіе въ два ома, и наконецъ къ проволокѣ, проходившей черезъ стѣнку стального цилиндра. Сопротивленіе цѣпи мѣнялось скачками на два ома каждый разъ, когда ртуть, поднимаясь по трубкѣ, достигала слѣдующей проволоки, такъ какъ при этомъ изъ цѣпи исключалась одна изъ спиралей и замѣнялась ртутнымъ столбомъ, сопротивленіемъ котораго можно было пренебречь. Соотвѣтственно уменьшенію сопротивленія, увеличивалась сила тока, измѣряемая гальванометромъ. Отсюда понятно, какимъ образомъ по наблюденной силѣ тока можно было опредѣлить до которой изъ платиновыхъ проволочекъ, впаянныхъ въ трубку піезометра, дошелъ ртутный столбикъ, а затѣмъ и объемъ, до котораго была сжата испытуемая жидкость.

Стальной цилиндръ съ піезометромъ помѣщался въ большой мѣдный сосудъ, наполненный толченымъ льдомъ или водой извѣстной температуры, которую принимала и испытуемая жидкость; этимъ устранялось вліяніе нагрѣванія, сопровождающаго сильное сжиманіе жидкостей.

Въ слѣдующей табличкѣ помѣщены величины $10^6\beta$ для четырехъ жидкостей при 0° и давленіяхъ, возростающихъ до 3000 атм.

Давленіе.	Вода.	Эфиръ.	Алкоголь.	CS_2.
1— 500 атм.	47,5	107,2	76,9	65,7
500—1000 »	41,6	70,8	56,6	52,7
1000—1500 »	35,8	53,7	45,8	42,9
1500—2000 »	32,4	45,2	38,5	36,7
2000—2500 »	29,2	37,1	33,1	32,9
2500—3000 »	26,1	31,7	28,4	29,9

Для всѣхъ четырехъ, а также для остальныхъ восьми жидкостей, изслѣдованныхъ Amagat, сжимаемость съ увеличеніемъ давленія уменьшается. При этомъ обнаруживается, что при весьма сильныхъ давленіяхъ какъ бы сглаживаются индивидуальныя свойства жидкостей, ибо коеффиціенты сжатія, весьма различные при слабыхъ давленіяхъ, принимаютъ близкія другъ другу числовыя значенія при наибольшихъ достигнутыхъ давленіяхъ.

Amagat изслѣдовалъ далѣе зависимость сжимаемости жидкостей отъ ихъ температуры. Для эфира онъ получилъ слѣдующія числа для $10^6\beta$

Давленіе.	0°	20°	50°	100°	198°
50— 100 атм.	132,9	158,4	226,6	393,4	—
200— 300 »	108,8	125,0	150,4	240,8	564,5
500— 600 »	83,5	93,1	110,5	146,4	244,1
900—1000 »	65,4	70,6	80,1	97,4	143,6
1500—2000 »	45,2	47,7	52,6	—	—
2500—3000 »	31,7	33,8	36,6	—	—

Сжимаемость эфира увеличивается съ повышеніемъ температуры; съ увеличеніемъ давленія она уменьшается и дѣлается менѣе зависимою отъ температуры.

Для воды Amagat находитъ при слабыхъ давленіяхъ уменьшеніе сжимаемости при возростаніи температуры до 50° приблизительно; при дальнѣйшемъ повышеніи температуры сжимаемость увеличивается. Чѣмъ сильнѣе давленіе, тѣмъ слабѣе выраженъ этотъ минимумъ; при весьма сильныхъ давленіяхъ онъ почти исчезаетъ и сжимаемость воды съ повышеніемъ температуры увеличивается, какъ и въ случаѣ другихъ жидкостей.

Amagat произвелъ весьма замѣчательныя изслѣдованія надъ вліяніемъ давленія на коеффиціентъ теплового расширенія жидкостей. Мы возвратимся къ этому вопросу въ ученіи о теплотѣ. Укажемъ здѣсь лишь вкратцѣ на результатъ.

Коеффиціентъ расширенія α жидкостей вообще уменьшается съ увеличеніемъ давленія; для воды же онъ увеличивается. При громадныхъ давленіяхъ эти коеффиціенты, весьма различные для различныхъ жидкостей, принимаютъ близкія другъ къ другу значенія. Индивидуальныя особенности жидкостей и въ этомъ отношеніи сглаживаются, а можетъ быть въ концѣ концовъ и исчезаютъ при весьма большихъ давленіяхъ.

Съ повышеніемъ температуры t уменьшается возростаніе коеффиціента теплового расширенія α воды, наблюдаемое при увеличеніи давленія; при 50° этотъ коеффиціентъ почти не зависитъ отъ давленія, а при $t > 50^0$ коеффиціентъ α уменьшается при увеличеніи давленія. Это видно изъ слѣдующей таблички, въ которой помѣщены числа $10^6\alpha$:

Давленіе.	0°—10°	10°—20°	40°—50°	60°—70°	90°—100°
1 атм.	14	150	422	556	719
100 »	43	165	422	548	—
200 »	72	183	426	539	—
500 »	149	236	429	523	661
900 »	229	289	437	514	621

Коеффиціентъ α для воды при всѣхъ давленіяхъ ростетъ съ температурой; это вѣрно даже при 3000 атм., какъ видно изъ слѣдующихъ чиселъ:

	0°,0—10°,1	20°,4—29°,45	40°,45—48°,85
$10^6\alpha =$	391	433	496

Температура наибольшей плотности воды, которая при нормальномъ давленіи равна 4°, понижается при увеличеніи давленія. Она при

давленіи 41,6 атм. равна 3°,3
» 93,3 » » 2°,0
» 144,9 » » 0°,6.

При еще болѣе сильныхъ давленіяхъ вполнѣ исчезаетъ сжатіе воды при нагрѣваніи ея выше 0°.

ЛИТЕРАТУРА.

Canton. Philos. Trans. 1762 и 1764; Pogg. Ann 12 p. 39, 1828.
Perkins. Philos. Trans. 72, 1820; Pogg. Ann. 9 p. 547, 1827.
Oerstedt. Danske Vid. Selsk. Forhandl. 9, 1822; Ann ch. et phys. (2) 21 p. 99, 1822; 22 p. 192, 1823; 38 p. 326, 1828; Pogg. Ann. 9 p. 603, 1827.
Despretz. C. R. 21, 1845.
Colladon et Sturm. Ann. ch. et phys. (2) 36 p. 113, 225, 1827; Pogg. Ann 12 p. 93, 1828.
Regnault. Mém. de l'Ac. Franc. 21 p. 429, 1847.
Aimé. Ann. ch. et phys. (3) 8 p. 257, 1843.
Grassi. Ann. ch. et phys. (3) 31 p. 437, 1851.
Jamin, Amaury et Descamps. C. R. 68 p. 1564, 1869.
Quinke. W. A. 19 p. 401, 1883.
Schumann. W. A. 31 p. 14, 1887.
Roentgen und Schneider. W. A. 29 p. 165, 1886; 31 p. 1000, 1887; 33 p. 644, 1888; 34 p. 531, 1888.
Braun. Ber. bayr. Acad. 1886 p. 208; W. A. 30 p. 264, 1887.
Amagat. Ann. ch. et phys. (5) 11 p. 520, 1877; (6) 22 p. 137, 1891; 29 p. 505, 1893; J. de Phys. (2) 8 p. 199, 1889; (3) 2 p. 449, 1893; C. R. 68 p. 1170, 1869; 115 p. 638, p. 919, p. 1041, p. 1238, 1893; 116 p. 779, p. 946, 1893.
Pagliani et Vicentini. N. Cim. (3) 16 p. 27, 1884; J. de phys. (2) 2 p. 461, 1883.
Tait. Proc. R. Soc. Edinb. 12 p. 46, 1883—84; 20 p. 63, 141, 1892.
Cailletet. C. R. 75 p. 77, 1872.
Roentgen. W. A. 44 p. 1, 1891.
De-Metz. W. A. 41 p. 664, 1890; 47 p. 706, 1892; Ж. Ф. Х. О. 22 стр. 126, 1890.
Drecker. W. A. 20 p. 870, 1883; 34 p. 954, 1888.
Dupré and Page. Phil. Trans. 159 p. 619, 1869.
Dupré und Page. Pogg. Ann. Erg. Bd. 5 p. 237, 1871.
Gilbault. C. R. 114 p. 209, 1892.
De-Heen. Bull. de l'Acad. Roy. de Belg. (3) 9, 1885.
Barus. Sill. J. (3) 39 p. 478, 1890.
Еленевъ. Ж. Ф. Х. О. 5 стр. 109, 1873.
Grimaldi. N. Cim. (3) 19 p. 212, 1886.
Avenarius. Bull. de l'Acad. de St. Petersb. 10, 1877.

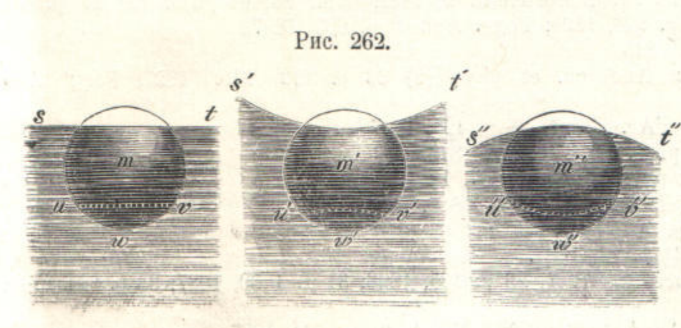
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Поверхностное натяженіе жидкостей.

§ 1. Давленіе поверхностного слоя. Формула Laplace'a. На стр. 433 мы указали на то, что частицы поверхностной пленки всякой жидкости подвержены силамъ сцѣпленія, равнодѣйствующая которыхъ не равна нулю, и направлена во внутрь жидкости, нормально къ ея поверхности. Жидкость какъ бы стремится втянуть въ себя частицы, находящіяся на ея поверхности или, что то же самое, по возможности уменьшить свою поверхность.

Всякое уменьшеніе поверхности жидкости сопровождается поэтому работою силъ сцѣпленія; всякое же увеличеніе — работою внѣшнихъ силъ, результатомъ которой является запасъ потенціальной энергіи жидкости, зависящій, такимъ образомъ, отъ величины ея поверхности. Внезапное уменьшеніе поверхности жидкости влечетъ за собою освобожденіе запаса потенціальной энергіи, и, обыкновенно, переходъ ея въ кинетическую энергію движенія самой жидкости. Примѣръ мы видимъ, когда при сильномъ волненіи происходитъ опрокидываніе верхушки волны на ея боковую поверхность. Уменьшеніе свободной поверхности воды сопровождается значительнымъ увеличеніемъ энергіи видимаго движенія, чѣмъ и объясняется появленіе такъ называемыхъ гребней при волненіи.

Рис. 262.

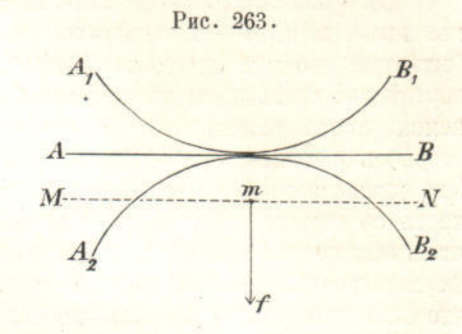


Силы сцѣпленія, дѣйствующія на частицы поверхностной пленки, складываются въ одно давленіе, величину котораго мы для единицы поверхности обозначимъ черезъ P. Это давленіе должно зависѣть отъ вида поверхности. Если его величину для плоской поверхности обозначить черезъ K, то на выпуклой поверхности давленіе P больше, а на вогнутой — P меньше, чѣмъ K. Для доказательства разсмотримъ, какія силы дѣйствуютъ на частицы m, m' и m'' (рис. 262), лежащія на равныхъ разстояніяхъ отъ плоской st, вогнутой $s't'$ и выпуклой $s''t''$ поверхностей жидкости. Окруживъ m, m' и m'' сферами частичнаго дѣйствія и проведя поверхности uv, $u'v'$ и $u''v''$, симметричныя съ st, $s't'$ и $s''t''$ относительно центровъ сферъ, мы видимъ, что дѣйствія всѣхъ частицъ, заключающихся внутри объемовъ $stvu$, $s't'v'u'$ и $s''t''v''u''$ на соотвѣтствующія центральныя частицы, по симметріи равны нулю, такъ что равнодѣйствующія всѣхъ силъ сцѣпленія, дѣйствующихъ на m, m' и m'' можно

себѣ представить происходящими только отъ частицъ, лежащихъ внутри отрѣзковъ uvw, $u'v'w'$ и $u''v''w''$, причемъ наибольшая толщина этихъ отрѣзковъ около w, w' и w'' одна и та же, и равна радіусу сферы частичнаго дѣйствія минусъ разстояніе частицъ m, m' и m'' отъ поверхности жидкости. Ясно, что $u'v'w' < uvw$ и что $u''v''w'' > uvw$; слѣдовательно сила, дѣйствующая на m'', больше, а на m' — меньше силы, дѣйствующей на m.

То же самое, въ сущности, разсужденіе можно вести и нѣсколько иначе. Пусть m (рис. 263) частица, лежащая вблизи поверхности жидкости, которая можетъ быть или вогнутая A_1B_1, или плоская AB, или выпуклая A_2B_2. Проведемъ черезъ m плоскость $MN \parallel AB$. Частицы, лежащія подъ MN тянутъ m во внутрь жидкости; частицы же, расположенныя выше MN, даютъ силу, направленную отъ m къ поверхности жидкости; чѣмъ больше эта сила, тѣмъ меньше равнодѣйствующая f всѣхъ силъ сцѣпленія, дѣйствующихъ на m. Сравнивая случаи вогнутой и выпуклой поверхностей со случаемъ поверхности плоской, мы видимъ, что въ первомъ случаѣ находится надъ MN больше, во второмъ меньше частицъ, чѣмъ при плоской поверхности. Отсюда ясно, что f при выпуклой поверхности больше, а при вогнутой меньше, чѣмъ при поверхности плоской.

Рис. 263.



Разница происходитъ отъ дѣйствія частицъ, расположенныхъ въ пространствѣ, ограниченномъ плоскостью AB и поверхностью A_1B_1 или A_2B_2. Вычисляя это дѣйствіе, Laplace (1807) вывелъ слѣдующую формулу для величины нормальнаго давленія P, производимаго поверхностнымъ слоемъ жидкости

$$P = K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Здѣсь K и H двѣ постоянныя, зависящія отъ рода жидкости и ея физическаго состоянія; R_1 и R_2 радіусы кривизны двухъ главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности жидкости; они считаются положительными, когда они направлены во внутрь жидкости. Вводя новую величину

$$\alpha = \frac{H}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

мы получаемъ для P выраженіе вида

$$P = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Для плоской поверхности имѣемъ $R_1 = R_2 = \infty$ и слѣд.

$$P = K.$$

Итакъ K есть нормальное давленіе для плоской поверхности. Для вогнутой поверхности R_1 и R_2 отрицательны, и слѣд. $P < K$. Для шаровой поверхности, радіусъ которой R, имѣемъ $R_1 = R_2 = R$ и

$$P = K + \frac{2\alpha}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

По причинамъ, которыя выяснятся ниже, называютъ величину $\frac{1}{2} H = \alpha$ поверхностнымъ натяженіемъ жидкости.

Въ различнаго рода явленіяхъ, которыя мы будемъ изучать ниже, мы имѣемъ дѣло съ величиною α, численное значеніе которой можетъ быть найдено изъ опытовъ. Давленіе K изъ непосредственныхъ опытовъ опредѣлено быть не можетъ; косвенныя разсужденія, къ которымъ мы вернемся, показываютъ, что K величина весьма большая сравнительно со вторымъ членомъ въ формулѣ для P, и выражается тысячами атмосферъ. Это указываетъ на громадность того давленія, которое испытываетъ жидкость со стороны своего поверхностнаго слоя. Можетъ казаться страннымъ, что несмотря на такое давленіе, жидкость мало сопротивляется измѣненію формы, раздѣленію на части и т. д. Не входя въ подробности, укажемъ, что жидкости и подъ вліяніемъ искусственнаго внѣшняго сдавливанія не теряютъ своей внутренней легкоподвижности, какъ это напр. косвенно доказывается присутствіемъ рыбъ и другихъ движущихся животныхъ въ океанахъ на громадной глубинѣ.

§ 2. Формула Gauss'а; поверхностное натяженіе жидкостей. Gauss далъ теорію тѣхъ явленій, которымъ посвящена эта и слѣдующія главы. Его теорія приводитъ къ простой формулѣ, выражающей величину той работы dr, которую надо произвести, чтобы увеличить поверхность S жидкости на величину dS; оказывается, что работа dr пропорціональна приращенію dS поверхности, такъ что можно написать

$$dr = \alpha\, dS \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Мы докажемъ ниже, что коеффиціентъ α въ этой формулѣ тожественъ съ величиною α въ формулѣ (3). Докажемъ пока, что они одного размѣра. Величины P и K въ (3) суть давленія на единицу поверхности; слѣд. ихъ размѣръ

$$[P] = [K] = \left[\frac{\text{сила}}{\text{поверхн.}}\right] = \frac{ML}{T^2} : L^2 = \frac{M}{T^2 L}.$$

Такого же размѣра долженъ быть второй членъ, въ которомъ R_1 и R_2 размѣра L; слѣд. $\left[\frac{\alpha}{L}\right] = \frac{M}{LT^2}$, откуда

$$[\alpha] = \frac{M}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Но того же размѣра величина α въ (5), ибо лѣвая сторона есть работа, dS есть поверхность, слѣд.

$$[\alpha] = \left[\frac{\text{работа}}{\text{поверхн.}}\right] = \frac{ML^2}{T^2} : L^2 = \frac{M}{T^2}.$$

Для увеличенія поверхности должна быть затрачена работа, какъ будто сама поверхность сопротивляется своему увеличенію, или выражаясь, какъ должно казаться сначала, чисто картинно, а не соотвѣтственно сути дѣла, — какъ будто поверхностная пленка жидкости сопротивляется своему растяженію. Отсюда явился своеобразный взглядъ на эту пленку, какъ на нѣчто, аналогичное натянутой перепонкѣ или оболочкѣ изъ упругаго, растяжимаго вещества, напр. изъ резины. Если такая перепонка равномѣрно растянута, и мы проведемъ по ея поверхности въ произвольномъ мѣстѣ и въ какомъ угодно направленіи линію, длина которой σ, то къ этой линіи пришлось бы приложить силы, перпендикулярныя къ ней и лежащія въ плоскостяхъ, касательныхъ къ перепонкѣ, чтобы удержать въ неизмѣнномъ натянутомъ состояніи часть, лежащую по одну сторону отъ линіи σ, если часть, лежащая по другую ея сторону, будетъ отнята. Пусть α вся та сила, которую слѣдуетъ распредѣлить вдоль линіи, длина которой $\sigma = 1$. Эту силу назовемъ натяженіемъ перепонки или оболочки.

Чтобы растянуть упругую перепонку, необходимо произвести работу, которую легко найти для безконечно малыхъ измѣненій поверхности перепонки. Увеличеніе поверхности S получится, если мы линію σ, лежащую вдоль ея контура или гдѣ-нибудь на ней, перемѣстимъ параллельно самой себѣ на отрѣзокъ σ'. Если σ не принадлежитъ контуру поверхности S, то предполагается, что часть перепонки, ограниченная линіей σ, и лежащая съ той стороны, куда σ перемѣщается, остается при неизмѣнномъ натяженіи. Сумма силъ, которыя придется приложить къ σ, равна $\alpha\sigma$; точки приложенія этихъ силъ перемѣстятся по направленію силъ на отрѣзокъ σ', слѣд. искомая работа $dr = \alpha\sigma\sigma'$. Но $\sigma\sigma' = dS$, т. е. равно увеличенію поверхности; отсюда окончательно

$$dr = \alpha dS \qquad (7)$$

Эта формула тожественна съ формулою (5) Gauss'а. Если, поэтому, проводить аналогію между поверхностною пленкою жидкости и натянутой упругой оболочкой, то величина α въ формулѣ (5) Gauss'а обозначаетъ натяженіе поверхностной пленки, т.-е. величину, измѣряемую силой, дѣйствующей вдоль единицы длины произвольной линіи, расположенной на поверхности жидкости, перпендикулярно къ этой линіи. Сила f, дѣйствующая вдоль линіи σ, равна

$$f = \alpha\sigma \qquad (8)$$

Величину α назовемъ поверхностнымъ натяженіемъ жидкости. Къ понятію о такомъ «натяженіи» поверхностнаго слоя жидкости мы пришли, проводя аналогію между этимъ слоемъ и упругою оболочкою; эта аналогія существенно опиралась на то, что увеличеніе поверхности жидкости возможно только при затратѣ нѣкоторой работы.

Существуетъ, однако, весьма большой рядъ явленій, указывающихъ на то, что мы здѣсь имѣемъ дѣло болѣе, чѣмъ съ простою аналогіей, что поверхностный слой жидкости по внутренней своей структурѣ дѣйствительно

отличается отъ остальныхъ, глубже лежащихъ частей жидкости. Полагаютъ, что онъ обладаетъ большею плотностью, и тѣмъ самымъ по многимъ своимъ свойствамъ можетъ быть уподобленъ натянутой, упругой оболочкѣ. Первый, сравнившій поверхностный слой жидкости съ упругой натянутой оболочкой, былъ Segner (1752); но основателемъ ученія о поверхностномъ натяженіи жидкостей слѣдуетъ признать Young'a (1805). Весьма большое число различныхъ явленій объясняется наиболѣе просто, если допустить существованіе поверхностнаго натяженія, которое, какъ ниже будетъ доказано, находится въ простой связи съ величиною поверхностнаго давленія. Эта связь и выражается формулою (3) Laplace'a, въ которой P поверхностное давленіе, а α, какъ было сказано, тожественное съ α въ формулѣ (5) Gauss'a, есть поверхностное натяженіе; на это указала намъ путемъ аналогіи формула (7). Однако объясняя тѣ или другія явленія поверхностнымъ натяженіемъ жидкости, и вообще особыми свойствами поверхностной пленки, не слѣдуетъ забывать, что это натяженіе, если оно вообще существуетъ, представляется лишь слѣдствіемъ основной причины всѣхъ сюда относящихся явленій, а именно взаимнаго сцѣпленія частицъ жидкостей и непосредственно вызваннаго имъ поверхностнаго давленія, величина котораго выражается формулою (3) Laplace'a, и стремленія жидкости принять какъ можно меньшую поверхность, т.-е. приблизиться къ формѣ шара. Толкованіе величины α въ формулѣ Laplace'a какъ натяженіе остается все-таки проблематичнымъ, какъ и самое существованіе болѣе плотнаго поверхностнаго слоя, сопротивляющагося разрыву, растяженію и т. д.

Толковаго объясненія причинъ возникновенія плотнаго поверхностнаго слоя въ жидкостяхъ до сихъ поръ не существуетъ. Одно присутствіе въ этомъ слоѣ силъ, направленныхъ во внутрь жидкости, не можетъ служить объясненіемъ уплотненія этого слоя. Такія силы должны вызвать давленіе, которое по основнымъ законамъ гидростатики передается чрезъ жидкость по всѣмъ направленіямъ, и вызываетъ одинаковое уплотненіе во всей ея массѣ. Напротивъ, нѣкоторыя разсужденія скорѣе приводятъ къ тому, что плотность поверхностной пленки меньше плотности остальной массы жидкости, по крайней мѣрѣ въ направленіи нормальномъ къ поверхности. Существующія попытки объяснить особыя свойства поверхностной пленки жидкостей сводятся къ доказательствамъ, что въ такой пленкѣ частицы должны быть сближены по направленію, параллельному самой поверхности; но эти доказательства весьма неубѣдительны. Мы ничего не знаемъ, ни о причинахъ возникновенія, ни о законахъ дѣйствія силъ сцѣпленія: намъ неизвѣстно, какъ устанавливается среднее разстояніе между частицами, съ одной стороны подъ вліяніемъ этихъ силъ, съ другой — въ зависимости отъ характера и скорости движенія частицъ. Неудивительно, что мы не можемъ дойти до сколько-нибудь яснаго представленія о распредѣленіи частицъ въ поверхностномъ слоѣ жидкости.

Хотя, такимъ образомъ, ученіе о поверхностномъ натяженіи жидкостей, цѣликомъ основанное на проведеніи аналогіи между свойствами поверхностной пленки и свойствами упругой натянутой оболочки, и лишено

твердо установленнаго научнаго фундамента, это ученіе оказалось, однако, весьма полезнымъ, какъ дающее возможность большую группу разнохарактерныхъ явленій привести къ одному общему началу; оно служитъ крайне удобною руководящею нитью для уразумѣнія и описанія многихъ явленій. Вопросъ о реальности поверхностнаго натяженія можно оставить открытымъ. Теоріей возникновенія поверхностнаго натяженія занимался въ особенности van der Mensbrugge. Онъ и нѣкоторые другіе ученые полагаютъ, что поверхностный слой жидкости обладаетъ не большею, но, напротивъ, меньшею плотностью, чѣмъ остальныя части жидкости. Van der Mensbrugge подвергъ различныя сюда относящіяся теоріи весьма рѣзкой критикѣ, ссылаясь, между прочимъ, на работы гельсингфорскаго ученаго Mellberg'a и Worthington'a.

§ 3. Опыты, подтверждающіе существованіе поверхностнаго натяженія жидкостей. Въ этомъ параграфѣ укажемъ лишь на нѣкоторые изъ этихъ опытовъ. Далѣе мы въ этой и въ слѣдующихъ главахъ познакомимся еще со многими явленіями, наиболѣе просто объясняемыми допущеніемъ поверхностнаго натяженія.

Рис. 264.

1. Если устроить плоскій сосудъ, одна изъ сторонъ CD (рис. 264) котораго могла бы вращаться около ребра C; подпереть ее деревяшкой и ниткой DE привязать къ выступу E; затѣмъ налить въ сосудъ воды и пережечь нить DE, то сторона CD приподнимется, принимая положеніе CD'. Натяженіе поверхности AD является какъ бы причиною этого явленія.

2. Если на поверхность ртути, налитой въ глубокій сосудъ, посыпать какой-либо порошокъ, и затѣмъ погрузить во ртуть вертикальную толстую стеклянную палочку, то весь порошокъ увлекается въ то углубленіе, которое образуется вокругъ палочки, какъ будто бы ртуть была покрыта кожицей, неразрывающейся при погруженіи палочки во ртуть. Этотъ же опытъ удается и съ водою, если палочку предварительно нѣсколько смазать жиромъ или масломъ, или если ее замѣнить стеариновой свѣчей.

3. Капля, висящая на нижнемъ концѣ вертикальной тонкой трубки, содержащей жидкость, имѣетъ совершенно ту же форму, какую принимаетъ тонкій каучуковый листъ, на который наливается вода, заставляющая его принять форму мѣшечка. Если прибавлять воды, то этотъ мѣшечекъ постепенно удлиняется, постоянно напоминая форму мало-по-малу удлиняющейся капли.

4. Стальную иглу можно осторожно положить на поверхность воды; она будетъ какъ бы лежать на упругой, поддерживающей ее перепонкѣ. Бѣгъ нѣкоторыхъ насѣкомыхъ (водомѣрокъ) на поверхности воды напоминаетъ движеніе по упругой перепонкѣ.

5. Возьмемъ ареометръ или другой, похожій на него сосудъ, плавающій въ вертикальномъ положеніи по поверхности воды, выходя немного наружу. Прикрѣпимъ къ верхнему концу трубки прибора короткую вертикальную проволоку, а къ ней горизонтальное проволочное колечко или не-

большой кусочекъ проволочной сѣтки и погрузимъ весь приборъ въ воду. Онъ начнетъ всплывать, но когда кольцо или сѣтка дойдетъ до поверхности, то онъ остановится, какъ будто встрѣчая у самой поверхности сопротивленіе не пропускающей его пленки. Если же его нѣсколько приподнять изъ воды и затѣмъ предоставить самому себѣ, то онъ будетъ плавать, причемъ кольцо или сѣтка можетъ оказаться значительно выше поверхности воды.

6. Мы увидимъ, что поверхностное натяженіе различныхъ жидкостей весьма различное; такъ оно у сѣрнаго эфира гораздо меньше, чѣмъ у воды. Если эфиръ, хотя бы въ минимальномъ количествѣ, попадаетъ на поверхность воды, то поверхностное натяженіе значительно уменьшается. Когда въ предыдущемъ опытѣ приборъ остановится, дойдя верхнимъ кольцомъ до поверхности воды, то достаточно опустить каплю эфира на эту поверхность, чтобы приборъ оказался въ состояніи преодолѣть уменьшившееся поверхностное натяженіе, прорвать поверхностную пленку, и приподняться до того положенія, которое онъ принимаетъ, плавая по водѣ.

7. Насыпемъ на поверхность воды плауноваго сѣмени (semen licopodii); нальемъ въ стаканъ нѣсколько капель эфира, которыми смочимъ дно и стѣнки стакана, а остатокъ выльемъ; въ стаканѣ останутся пары эфира. Если затѣмъ изъ этого стакана выливать тяжелые пары эфира на поверхность воды, то порошокъ быстро во всѣ стороны расходится отъ того мѣста, на которое попадаютъ пары эфира: явленіе весьма эффектное, такъ какъ самые пары не видны и кажется, что манипулированіе производится съ пустымъ стаканомъ. Объясняется оно тѣмъ, что въ той части поверхности воды, на которую попадаютъ пары эфира, уменьшается поверхностное натяженіе, вслѣдствіе чего остальная часть поверхностной пленки, сохранившая свое натяженіе, быстро сокращается, увлекая за собою и насыпанный на нее порошокъ.

Капля воды, висящая у нижняго конца вертикально поставленной трубки, спадаетъ, если вблизи ея помѣстить эфиръ.

8. Жидкости могутъ принимать форму тонкихъ пленокъ, находясь въ такъ наз. пластинчатомъ состояніи, которое будетъ ниже разсмотрѣно подробнѣе. Пока замѣтимъ, что трудно получить пленки изъ чистой воды; зато изъ мыльной воды онѣ получаются легко: для этого достаточно опустить въ такую воду проволочное кольцо; если его затѣмъ осторожно вынуть, то оно окажется затянутымъ жидкою, весьма тонкою пластинкою. На такой жидкой пластинкѣ особенно рѣзко замѣчаются явленія поверхностнаго натяженія, дѣйствующаго на обѣихъ ея сторонахъ. Если пластинку образовать на краю воронки, то она сама начнетъ перемѣщаться во внутрь воронки, причемъ ея поверхность будетъ постепенно уменьшаться.

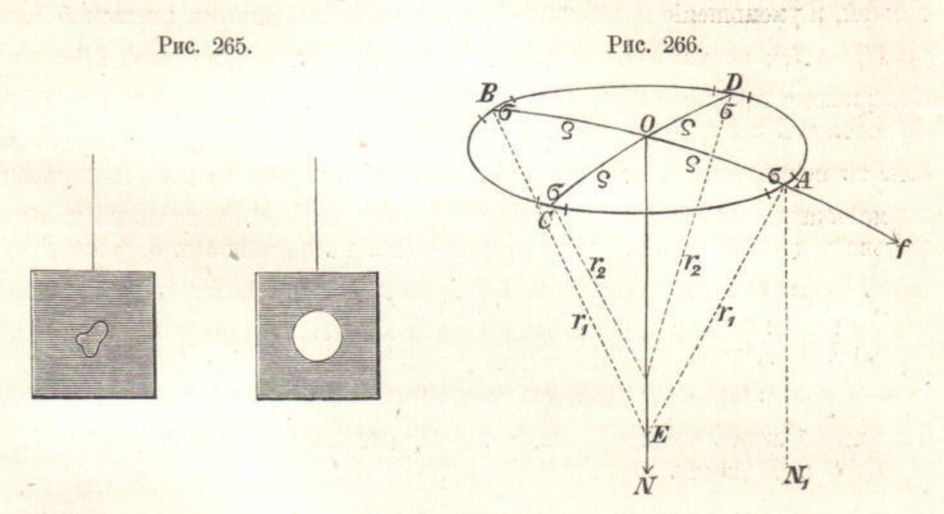
Нетрудно наложить на горизонтальную жидкую пластинку маленькое колечко изъ предварительно смоченной нитки. Это колечко приметъ какую-нибудь совершенно неправильную форму (см. рис. 265 слѣва). Если, однако, прорвать часть пленки, находящуюся внутри нити, такъ что жидкая пластинка останется только между нитью и наружной проволокой, то нить

подъ вліяніемъ натяженія жидкой пленки приметъ форму окружности, какъ показано на рис. 265 справа.

9. Подобное же явленіе обнаруживается, если колечко изъ нити положить на поверхность воды, налитой въ сосудъ и затѣмъ во внутрь колечка опустить нѣсколько капель спирта или эфира; наружное натяженіе, получивъ перевѣсъ надъ внутреннимъ, заставитъ колечко принять форму круга.

10. Маленькій кусочекъ камфоры, брошенный на чистую поверхность воды, приходитъ въ быстрыя и неправильныя движенія. Объясняется это странное на видъ явленіе тѣмъ, что камфора растворяется въ водѣ, вслѣдствіе чего уменьшается поверхностное натяженіе, а такъ какъ раствореніе

Рис. 265. Рис. 266.



не происходитъ равномѣрно со всѣхъ сторонъ, то кусочекъ камфоры и увлекается въ ту сторону, съ которой поверхностное натяженіе больше.

§ 4. Связь между нормальнымъ давленіемъ P и поверхностнымъ натяженіемъ α. Допускаемъ существованіе поверхностнаго натяженія α, опредѣляемаго формулой (8) стр. 457, гдѣ f сила, распредѣленная вдоль линіи σ перпендикулярно къ ней и касательно къ поверхности жидкости, или формулою (7), опредѣляющею величину работы dr, которая затрачивается при увеличеніи поверхности на dS.

Формула (3) Laplace'а даетъ въ этомъ случаѣ связь между нормальнымъ давленіемъ P и поверхностнымъ натяженіемъ α. Докажемъ теперь эту формулу.

Считая поверхностный не плоскій слой жидкости за натянутую упругую пленку и вычисляя давленіе, которое онъ производитъ, мы получимъ избытокъ нормальнаго давленія P надъ тѣмъ давленіемъ K, которое существуетъ при плоской поверхности, т.-е. величину $P-K$. Пусть O (рис. 266) точка на поверхности жидкости; опишемъ вокругъ нея кривую на поверхности, всѣ точки которой лежали бы на одномъ и томъ же разстояніи ρ отъ точки O. При безконечно маломъ ρ мы можемъ эту кривую принять за окружность. Вліяніе поверхностнаго натяженія, по принятому нами воз-

зрѣнію, сводится къ дѣйствію силъ, равномѣрно распредѣленныхъ вдоль этой окружности, причемъ на единицу длины приходится сила α.

Проведемъ нормаль ON къ поверхности и черезъ нее двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости, которыя пересѣкутъ поверхность по кривымъ AB и CD. Около точки A возьмемъ элементъ σ окружности и проведемъ линію AE нормально къ поверхности въ точкѣ A. При безконечно маломъ ρ, разстояніе AE имѣетъ своимъ предѣломъ радіусъ кривизны r_1 нормальнаго сѣченія AB (стр. 40). Къ элементу σ приложена сила натяженія $f=\alpha\sigma$ по направленію, перпендикулярному къ σ и къ AE. Эта сила даетъ слагаемую, параллельную ON, чѣмъ и вызывается увеличеніе нормальнаго давленія при выпуклой, и уменьшеніе при вогнутой поверхности. Величина слагаемой равна $f\cos(f, AN_1)$; но такъ какъ $f\perp AE$, то она равна также $f\sin OAE=\sigma\alpha\frac{\rho}{r_1}$. Совершенно такую же нормальную слагаемую даетъ натяженіе, дѣйствующее на элементъ σ окружности, расположенный около точки B. Обѣ силы даютъ вмѣстѣ нормальное давленіе $2\sigma\alpha\frac{\rho}{r_1}$. Обозначая черезъ r_2 радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія CD, перпендикулярнаго къ AB, получаемъ для нормальнаго давленія, вызваннаго натяженіемъ въ элементахъ σ, расположенныхъ около C и D, величину $2\sigma\alpha\frac{\rho}{r_2}$. Всѣ четыре силы даютъ давленіе $2\sigma\alpha\rho\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$. На основаніи извѣстной теоремы, сумма $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ равна суммѣ $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, гдѣ R_1 и R_2 радіусы кривизны главныхъ сѣченій поверхности. Такимъ образомъ четыре силы, приложенныя къ элементамъ σ въ точкахъ A, B, C и D даютъ нормальное давленіе

$$p=2\alpha\sigma\rho\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Полное нормальное давленіе, вызванное натяженіемъ вдоль окружности, получится, если мы возьмемъ сумму величинъ p для всѣхъ группъ σ, по четыре каждый разъ, исчерпывающихъ всю окружность. Такъ какъ $\sum 4\sigma=2\pi\rho$, то $\sum\sigma=\frac{1}{2}\pi\rho$ и слѣд.

$$\sum p=2\alpha\rho\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\sum\sigma=\alpha\pi\rho^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Мы получимъ нормальное давленіе $P-K$, отнесенное къ единицѣ поверхности, раздѣливъ только что найденное давленіе $\sum p$ на поверхность $\pi\rho^2$; итакъ

$$P-K=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right);$$

отсюда формула Laplace'а

$$P=K+\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Итакъ, дѣйствительно, существованіе разницы между нормальнымъ давленіемъ при плоской и при неплоской поверхностяхъ можетъ быть объяснено вліяніемъ поверхностнаго натяженія. Формула (10) показываетъ, что чѣмъ больше поверхностное натяженіе жидкости, тѣмъ больше разность между нормальнымъ давленіемъ при плоской и при неплоской поверхностяхъ жидкости.

Способы опредѣленія численнаго значенія поверхностнаго натяженія α будутъ разсмотрѣны въ слѣдующей главѣ. Замѣтимъ только, что по теоріи Laplace'а K и α имѣютъ слѣдующее значеніе:

$$K = \frac{2\pi\delta}{3g}\int_0^\infty \rho^3 f(\rho)d\rho; \qquad \alpha = \frac{\pi\delta}{2g}\int_0^\infty \rho^4 f(\rho)d\rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Здѣсь δ плотность жидкости, ρ разстояніе двухъ молекулъ жидкости, дѣйствующихъ другъ на друга съ силою F, равною

$$F = mm'f(\rho) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

§ 5. Абсолютная величина нормальнаго давленія K. Мы изложимъ въ слѣдующей главѣ способы опредѣленія поверхностнаго натяженія α. Разсмотримъ теперь величину нормальнаго давленія K при плоской поверхности. На стр. 456 уже было упомянуто, что эта величина непосредственно измѣрена быть не можетъ, и что косвенные способы ея опредѣленія приводятъ къ весьма большимъ величинамъ этого давленія.

Укажемъ на двѣ попытки опредѣленія величины K. Первая изъ нихъ принадлежитъ van der Waals'у. На стр. 361 мы познакомились съ его формулою (9) состоянія газовъ, въ которой членъ $\frac{a}{v^2}$ изображаетъ уменьшеніе давленія газа, происходящее вслѣдствіе сцѣпленія газовыхъ частицъ. Эта величина есть ничто иное, какъ поверхностное давленіе газовъ. Van der Waals допускаетъ, что его формула

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

приложима и къ жидкостямъ, для которыхъ мы слѣд. имѣемъ

$$K = \frac{a}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Измѣряя p въ атмосферахъ, и принявъ за единицу объема объемъ одного килограмма газа при 0° и давленіи въ 1 атм., получаемъ для углекислоты на основаніи ея отступленій отъ закона Бойля-Маріотта $a = 0{,}00874$. Объемъ $v = \frac{1}{500}$, когда углекислый газъ перешелъ въ жидкое состояніе, а потому для жидкой углекислоты поверхностное давленіе равно

$$K = \frac{a}{v^2} = 2180 \text{ атмосф.}$$

Подобнымъ образомъ получаются слѣдующія числа:

	K
Эфиръ	1300—1430 атм.
Алкоголь	2100—2400 »
Вода	10700 »

Итакъ, внутренняя масса воды находится при давленіи въ 10000 атм., что равняется 100 килогр. на кв. миллим. поверхности.

Stefan (1886) основываетъ опредѣленіе K на совершенно другихъ соображеніяхъ. Онъ разсуждаетъ такъ: чтобы перевести молекулу жидкости изъ внутренней массы до самой поверхности, гдѣ на нее дѣйствуетъ уже лишь полусфера, см. рис. 248 стр. 433, слѣдуетъ произвести половину той работы, которая потребна, чтобы молекулу изъ внутренней массы жидкости вывести въ наружнее пространство, наполненное насыщенными парами той же жидкости. Эту послѣднюю работу легко найти, зная величину скрытой теплоты испаренія. Stefan получаетъ слѣдующую формулу

$$(K-p)v=\frac{1}{2}Q,$$

гдѣ p упругость насыщенныхъ паровъ, v объемъ одного грамма жидкости и Q скрытая теплота испаренія, выраженная въ механическихъ единицахъ. Для эфира Stefan получаетъ $K \doteq 1284$ атм.

§ 6. Форма, принимаемая жидкой массой подъ вліяніемъ поверхностнаго натяженія. Опыты Plateau. Для равновѣсія жидкой массы, не подверженной вліянію внѣшнихъ силъ, необходимо, чтобы давленіе, подъ которымъ она находится, имѣло бы одно и то же значеніе во всѣхъ точкахъ ея поверхности. Формула (10) Laplace'а даетъ условіе

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Поверхность жидкости должна во всѣхъ точкахъ имѣть одну и ту-же среднюю кривизну. Такихъ поверхностей существуетъ безконечное множество.

Plateau (1843—1863) далъ способъ полученія жидкихъ массъ, находящихся какъ бы только подъ вліяніемъ поверхностнаго натяженія. Для этого слѣдуетъ помѣстить жидкость въ другую, съ которою она бы не смѣшивалась и которая имѣла бы одинаковую съ нею плотность. Простѣйшій примѣръ представляетъ масло (напр. прованское), опущенное въ смѣсь воды и алкоголя, которую не трудно подобрать такъ, чтобы маленькая капля масла въ ней не тонула и не плавала. Полезно подкрасить масло, которое внутри смѣси принимаетъ форму шара (рис. 267). Смѣсь бензола съ бромистымъ этиленомъ, для удобства наблюденія слегка подкрашенная іодомъ, принимаетъ также форму шара внутри воды, въ которой растворено подходящее количество поваренной соли.

Если черезъ жидкій шаръ, полученный такимъ образомъ, провести вертикальную металлическую ось, которую затѣмъ быстро вращать, то и шаръ

начнетъ вращаться. Онъ при этомъ сплющивается, а при большой скорости вращенія отъ него отдѣляется экваторіальный слой, образуя кольцо. Значеніе этихъ опытовъ для космогоніи понятно и всѣмъ извѣстно.

Чтобы получить жидкія массы другой формы, слѣдуетъ ихъ привести въ соприкосновеніе съ различными проволочными фигурами. Такъ около проволочнаго кольца можетъ образоваться жидкая масса въ видѣ чечевицы A, рис. 268. Если помѣстить жидкій шаръ на кольцо C, поддерживаемое треножникомъ, коснуться этого шара сверху другимъ кольцомъ C, и поднять послѣднее, то можно придать маслу форму прямого цилиндра, основанія котораго представляютъ сегменты шаровъ; радіусы r этихъ сегментовъ равны діаметру основанія цилиндра $2R$. Послѣднее соотношеніе

Рис. 267.

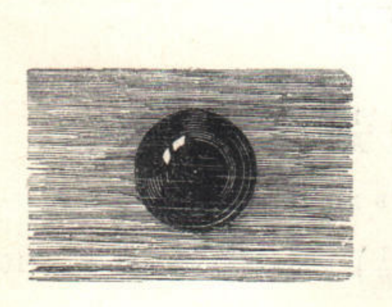
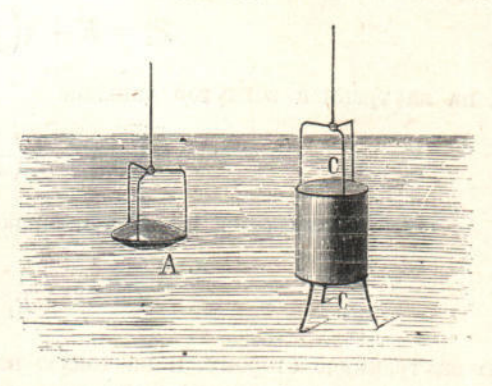


Рис. 268.



прямо вытекаетъ изъ условія (15). На боковой поверхности $R_1 = \infty$, $R_2 = R$; на выпуклыхъ основаніяхъ $R_1 = R_2 = r$; условіе (15) даетъ $\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$, откуда $r = 2R$.

Если верхнее кольцо C еще болѣе поднять, то получается форма съуженная посрединѣ, напоминающая однополый гиперболоидъ. При нѣкоторомъ разстояніи колецъ получается поверхность съ плоскими основаніями, для которыхъ $R_1 = R_2 = \infty$; отсюда слѣдуетъ, что на боковой поверхности $R_1 = -R_2$. Такая поверхность называется катеноидомъ. Она можетъ быть получена вращеніемъ цѣпной линіи около нѣкоторой прямой. При дальнѣйшемъ подниманіи верхняго кольца получается рядъ съуженій (ундулоидъ), и если вдоль оси помѣстить желѣзную проволоку, то можно получить форму, мало отличающуюся отъ ряда шаровъ; эта форма неустойчивая.

Прямой цилиндръ также неустойчивъ, когда его длина въ π разъ превышаетъ его діаметръ. Онъ распадается на шары, между которыми помѣщается по одному или по нѣсколько маленькихъ шариковъ, образующихся изъ тѣхъ жидкихъ нитей, которыя до полнаго разрыва всего столба соединяютъ образующіеся шары.

Plateau получалъ также жидкіе многогранники, помѣщая масло въ

проволочной основѣ, воспроизводящей ребра многогранника. Отнимая лишнее масло пипеткой, онъ нашелъ, что всѣ стороны одновременно дѣлались плоскими, какъ это и требуется условіемъ (15).

§ 7. Пластинчатое состояніе жидкостей. Мыльные пузыри. Приводя въ § 3 примѣры опытовъ, подтверждающихъ существованіе поверхностнаго натяженія, мы упомянули о пластинчатомъ состояніи, въ которомъ жидкости легко получаются на замкнутыхъ проволочныхъ фигурахъ. Для этихъ опытовъ особенно пригодна мыльная вода, къ которой прибавленъ глицеринъ или растворъ сахара.

Когда жидкая пленка замкнута и не состоитъ изъ плоскихъ частей, то воздухъ внутри нея долженъ имѣть бо́льшую упругость, чѣмъ воздухъ наружный. Дѣйствительно, такая пленка имѣетъ на наружней выпуклой сторонѣ давленіе

$$P_1 = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

а на внутренней вогнутой давленіе

$$P_2 = K - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Отсюда слѣдуетъ, что она производитъ давленіе

$$P = 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

во внутреннюю сторону, и на такую величину должна упругость воздуха внутри замкнутой пленки превышать упругость наружнаго воздуха. Такъ какъ эта разность не можетъ быть различною въ различныхъ мѣстахъ замкнутой пленки, то мы получаемъ для поверхности пленки условіе

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{Const.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

т.-е. то же самое, какое мы имѣли для поверхности жидкости въ предыдущемъ параграфѣ, см. (15) стр. 464.

Поверхность незамкнутой пленки, подверженной одинаковому давленію съ двухъ сторонъ ($P = 0$), должна удовлетворять условію

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

т. е. она должна составлять часть поверхности, во всѣхъ точкахъ которой кривизна нуль. Такихъ поверхностей существуетъ безконечное множество; одна изъ нихъ получается напр., когда жидкую пленку образовать между двумя непараллельными прямыми проволоками. Въ частномъ случаѣ пленка можетъ быть плоская ($R_1 = R_2 = \infty$) и только такая можетъ образоваться на плоской проволочной фигурѣ. Единственная поверхность вращенія, удовлетворяющая условію (18), кромѣ плоскости, есть катеноидъ, см.

стр. 465. Когда въ мыльную воду опускаютъ проволочную фигуру, то на ней вообще образуется система жидкихъ пластинокъ, распредѣляющихся такъ, чтобы сумма ихъ поверхностей была наименьшая.

Это приводитъ къ слѣдующимъ двумъ правиламъ:

1) На одномъ жидкомъ ребрѣ никогда не сходятся болѣе трехъ пластинокъ; онѣ составляютъ равные между собою углы (по 120°).

2) Въ одной точкѣ внутри системы могутъ сходиться только четыре ребра, составляющія между собою равные углы.

На рис. 269—273 показаны нѣкоторыя изъ этихъ фигуръ. Рис. 269 изображаетъ фигуру, получающуюся на основѣ куба: 12 пластинокъ направлены отъ 12-ти реберъ куба во внутрь; изъ нихъ 8, имѣющія форму

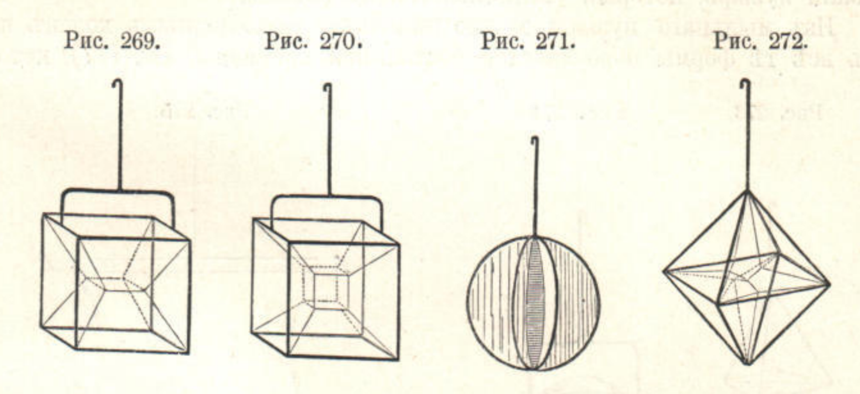


Рис. 269. Рис. 270. Рис. 271. Рис. 272.

трапецій, опираются на ребра 13-ой пластинки, находящейся въ серединѣ, а остальныя 4, треугольныя, соединяютъ углы средней пластинки съ противолежащими ребрами куба. При вторичномъ погруженіи въ мыльный растворъ получается фигура, изображенная на рис. 270; внутри образуется замкнутая фигура, ограниченная выпуклыми пленками, сходящимися у вершины маленькаго куба. На рис. 271, 272 и 273 показаны фигуры, которыя получаются, когда проволочная основа состоитъ изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ колецъ, и когда она соотвѣтствуетъ гранямъ октаэдра и треугольной пирамиды. Рис. 274 соотвѣтствуетъ случаю круглаго горизонтальнаго кольца и вертикальной рамки.

Интересную форму принимаетъ плоская пленка въ слѣдующемъ опытѣ. Къ деревянной палочкѣ AB (рис. 275) привѣшена легкая палочка CD на двухъ нитяхъ AC и BD. Если образованную такимъ образомъ вертикальную рамку затянуть жидкой пластинкой, то, подъ вліяніемъ поверхностнаго натяженія CD приподнимается и нити принимаютъ форму круговыхъ дугъ, какъ показано на рисункѣ.

Всякому извѣстно, какъ на концѣ трубки выдуваютъ мыльные пузыри. Формула (16) показываетъ, что давленіе пузыря на заключенный въ немъ воздухъ равно

$$P=\frac{4\alpha}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

гдѣ R радіусъ шара. Это давленіе обратно пропорціонально радіусу шара, и потому давленіе внутри очень малыхъ жидкихъ пузырьковъ, изъ каковыхъ, можетъ быть, состоятъ облака, должно быть весьма велико. Если образовать мыльный пузырь на концѣ трубки, то онъ самъ собою начинаетъ уменьшаться, причемъ струя воздуха съ большою силою выходитъ изъ другого конца трубки.

Соединяя внутреннее пространство шара съ манометромъ можно измѣрить величину давленія P.

Если на двухъ концахъ трубки, имѣющей форму ⊓ помѣстить два мыльныхъ пузыря различной величины, то меньшій изъ нихъ начинаетъ еще болѣе уменьшаться въ объемѣ, и воздухъ перейдетъ изъ него въ большій пузырь, который увеличивается въ объемѣ.

Изъ мыльнаго пузыря можно помощью проволочныхъ колецъ получить всѣ тѣ формы поверхностей постоянной кривизны, см. (17), которыя

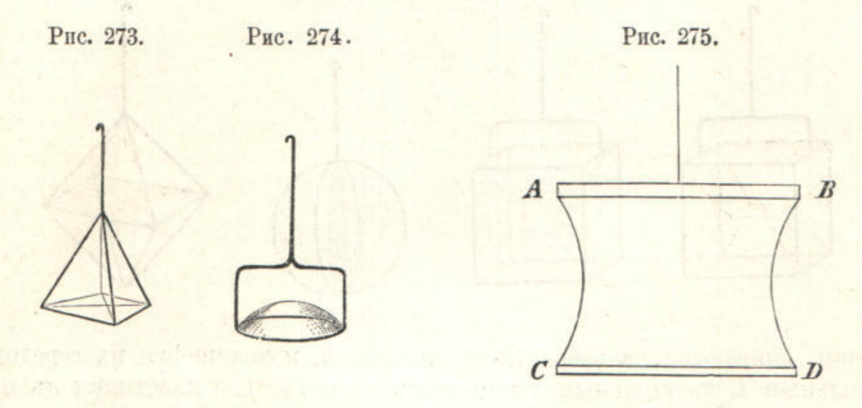


Рис. 273. Рис. 274. Рис. 275.

при подобныхъ же манипуляціяхъ принимаетъ жидкость, см. рис. 268. Если мыльный пузырь положить на кольцо C, рис. 276, сверху коснуться его вторымъ кольцомъ и приподнять это послѣднее, то получается сперва форма съ выпуклою боковой поверхностью и основаніями; далѣе получается цилиндръ съ шаровыми сегментами на основаніяхъ ($r = 2R$, см. стр. 465). Затѣмъ катеноидъ съ плоскими основаніями, для котораго кривизна $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ и наконецъ нодоидъ съ сильно вогнутой боковой поверхностью и вогнутыми основаніями. Если прорвать пленки на самихъ кольцахъ, то боковая поверхность очевидно представитъ катеноидъ.

Толщина жидкой пленки можетъ быть весьма мала; она опредѣляется наблюденіемъ явленія цвѣтовъ тонкихъ пластинокъ, съ которымъ мы познакомимся во второмъ томѣ. Plateau наблюдалъ мыльный пузырь, толщина стѣнокъ котораго равнялась 0,0001134 мм. Отсюда слѣдуетъ, что радіусъ сферы частичнаго дѣйствія не превышаетъ $\rho = 0{,}0000567$ мм., ибо стѣнка должна по крайней мѣрѣ состоять изъ двухъ пленокъ, толщина каждой изъ которыхъ равна ρ.

Не всякая жидкость одинаково легко получается въ пластинчатомъ состояніи. По изслѣдованіямъ Plateau здѣсь играетъ роль особая поверх-

ностная вязкость, неодинаковая для различныхъ жидкостей. Онъ изслѣдовалъ ее, наблюдая время, въ теченіе котораго магнитная стрѣлка, отклоненная на 90° отъ магнитнаго меридіана, поворачивается на 85°, сперва при полномъ погруженіи стрѣлки въ жидкость, а потомъ, когда она только касается нижнею стороною поверхности жидкости. Для воды въ первомъ случаѣ потребовалось 2,37 сек., во второмъ 4,59 сек.; однако стрѣлка у поверхности воды на 8° переходила черезъ положеніе равновѣсія, а внутри воды только на 3,5°. Это кажущееся противорѣчіе объяснилось, когда Plateau обсыпалъ поверхность воды мелкимъ порошкомъ. Оказалось, что часть поверхности, какъ нѣчто цѣлое, перемѣщалась вмѣстѣ со стрѣлкою. Изъ этихъ опытовъ Plateau заключилъ, что поверхностная вязкость воды больше, чѣмъ ея вязкость внутренняя. То же самое относится къ глицерину,

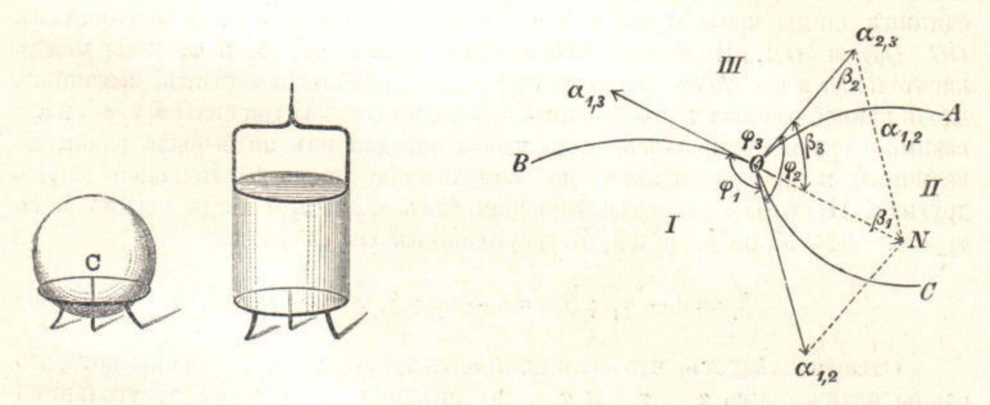


Рис. 276. Рис. 277.

къ насыщенному раствору соды и т. д. Въ другихъ жидкостяхъ, наоборотъ, поверхностная вязкость меньше внутренней; сюда относятся алкоголь, эфиръ, сѣроуглеродъ, терпентинное и оливковое масла. Растворъ сапонина обладаетъ особенно большою поверхностною вязкостью. Позднѣйшія изслѣдованія Oberbeck'а, Roiti и др. подтвердили наблюденія Plateau. Жидкости, обладающія большою поверхностною вязкостью при не очень большомъ поверхностномъ натяженіи сильно пѣнятся и легко приводятся въ пластинчатое состояніе.

§ 8. Поверхностное натяженіе при соприкосновеніи нѣсколькихъ срединъ. Опредѣляя, какимъ силамъ подвержена частица, расположенная на самой поверхности жидкости, мы на стр. 433 (рис. 248) предполагали, что на такую частицу m'' дѣйствуютъ только молекулы самой жидкости, расположенныя въ полусферѣ частичнаго дѣйствія, и что слѣд. надъ жидкостью нѣтъ частицъ, которыя бы дѣйствовали на m'' по направленію снизу вверхъ. Такое разсужденіе можетъ быть допущено, когда надъ жидкостью находится газъ, плотность котораго невелика. Но когда надъ нею имѣется среда болѣе плотная, то надъ m'' оказывается другая полусфера частичнаго дѣйствія, имѣющая, можетъ быть, другой радіусъ и дѣйствующая съ силою, имѣющею направленіе внѣшней нормали къ поверхности жидкости. Отсюда

слѣдуетъ, что поверхностное давленіе P, а слѣд. и натяженіе α уменьшаются, когда надъ жидкостью находится другая жидкая или твердая среда. **Поверхностное натяженіе $\alpha_{1,2}$ на границѣ двухъ жидкостей не равно разности $\alpha_1 - \alpha_2$ поверхностныхъ натяженій каждой изъ жидкостей въ воздухѣ**; это уже видно изъ того, что для смѣшивающихся жидкостей $\alpha_{1,2} = 0$, между тѣмъ какъ α_1 и α_2 могутъ быть и неравны.

Составимъ условія, которымъ должны удовлетворять натяженія въ трехъ поверхностяхъ раздѣла трехъ срединъ, изъ которыхъ одна можетъ быть и воздухомъ. Пусть на рис. 277 изображены три средины I, II и III; ихъ поверхности соприкосновенія суть OA, OB и OC. Эти поверхности пересѣкаются по нѣкоторой кривой, касательная къ которой въ O перпендикулярна къ плоскости рисунка. Поверхностныя натяженія $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ и $\alpha_{2,3}$ можно разсматривать, какъ силы, приложенныя къ точкѣ O (точнѣе къ единицѣ длины кривой) по направленію касательныхъ къ поверхностямъ OC, OB и OA. Наконецъ, обозначимъ черезъ φ_1, φ_2 и φ_3 углы между касательными къ этимъ поверхностямъ. Для равновѣсія частицъ, лежащихъ вдоль кривой раздѣла трехъ срединъ, необходимо, чтобы три силы $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ и $\alpha_{2,3}$ взаимно уравновѣшивались, т.-е. чтобы каждая изъ нихъ была равна по величинѣ и противоположна по направленію равнодѣйствующей двухъ другихъ. Пусть ON равнодѣйствующая силъ $\alpha_{1,2}$ и $\alpha_{2,3}$; тогда должно быть $\alpha_{1,3} = -CN$. Углы β_1, β_2 и β_3 въ треугольникѣ $O\alpha_{2,3}N$ равны

$$\beta_1 = \pi - \varphi_1 \;;\; \beta_2 = \pi - \varphi_2 \;;\; \beta_3 = \pi - \varphi_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Отсюда слѣдуетъ, что если построить треугольникъ, стороны котораго равны натяженіямъ $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ и $\alpha_{2,3}$, то внѣшніе углы этого треугольника будутъ равны угламъ между поверхностями раздѣла трехъ срединъ. Очевидно $\alpha_{1,2} : \alpha_{1,3} : \alpha_{2,3} = \sin\beta_3 : \sin\beta_2 : \sin\beta_1$; слѣд. (20) даетъ

$$\frac{\alpha_{1,2}}{\sin\varphi_3} = \frac{\alpha_{1,3}}{\sin\varphi_2} = \frac{\alpha_{2,3}}{\sin\varphi_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Далѣе

$$\alpha_{1,2}^2 = \alpha_{2,3}^2 + \alpha_{1,3}^2 - 2\alpha_{2,3}\alpha_{1,3}\cos\beta_3,$$

откуда

$$\cos\beta_3 = -\cos\varphi_3 = -\frac{\alpha_{2,3}^2 + \alpha_{1,3}^2 - \alpha_{1,2}^2}{2\alpha_{2,3}\alpha_{1,3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Наиболѣе важное слѣдствіе изъ всего предыдущаго заключается однако въ томъ, что **каждое изъ трехъ натяженій должно быть меньше суммы двухъ остальныхъ**, такъ напр.

$$\alpha_{1,3} < \alpha_{2,3} + \alpha_{1,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Когда среда III есть воздухъ, то это неравенство даетъ условіе для

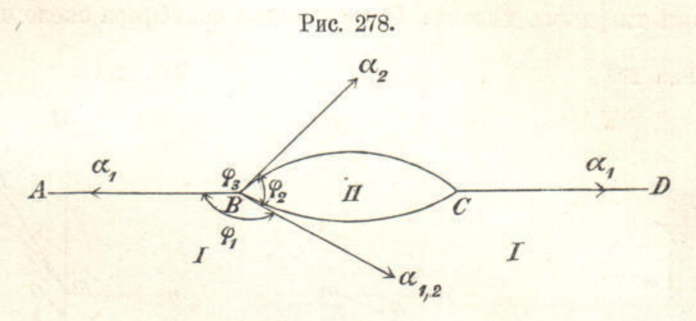
возможности равновѣсія одной ограниченной массы жидкости II (α_2) на поверхности другой жидкости I (α_1):

$$\alpha_1 < \alpha_2 + \alpha_{1,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Это условіе должно быть выполнено, чтобы капля BC жидкости II (рис. 278) могла лежать на поверхности AD другой жидкости I.

Когда $\alpha_1 > \alpha_2 + \alpha_{1,2}$, то сила α_1 получаетъ перевѣсъ, и капля быстро расплывается по поверхности другой жидкости. Такъ капля масла на водѣ, капля воды на чистой ртути быстро расплываются. Но когда поверхность ртути не вполнѣ чиста, то капля воды остается на ней въ видѣ чечевицы.

Рис. 278.



Если помѣстить рядомъ съ ней каплю масла, то капля воды перемѣщается въ сторону противоположную отъ масла.

Особенно замѣчательно расплываніе масла по поверхности воды; при этомъ получается пленка въ высшей степени тонкая. Ея толщину опредѣляли Sohncke и Rayleigh. По изслѣдованіямъ Rayleigh'а толщина ея можетъ доходить до 1,6 микромиллиметра (0,0000016 мм.).

Изъ предыдущаго ясно, что нормальное давленіе, а слѣд. и поверхностное натяженіе воды уменьшаются, когда на ней находится малѣйшее количество масла.

На горизонтальную жидкую пленку изъ мыльной воды можно помѣстить каплю воды; но малѣйшая капля спирта или эфира разрушаетъ пленку вслѣдствіе внезапнаго уменьшенія натяженія въ одномъ мѣстѣ. Струя воды или ртути свободно проходитъ черезъ такую пленку, не разрушая ея. Брызги воды не уничтожаютъ пѣны мыльной воды, которая разрушается отъ брызгъ эфира.

Если покрыть дно плоскаго сосуда тонкимъ слоемъ воды, и въ середину слоя налить нѣсколько капель алкоголя, то вода, расходясь во всѣ стороны, увлекаетъ за собою алкоголь, такъ что обнажается дно сосуда.

Капля, лежащая на поверхности другой жидкости должна имѣть форму чечевицы, т. е. контуръ BC капли долженъ быть кругомъ, такъ какъ углы φ_1, φ_2 и φ_3 во всѣхъ точкахъ контура должны имѣть одни и тѣ же значенія; аналогично (22) имѣемъ

$$\cos\varphi_2 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_{1,2}}{2\alpha_1\alpha_{1,2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

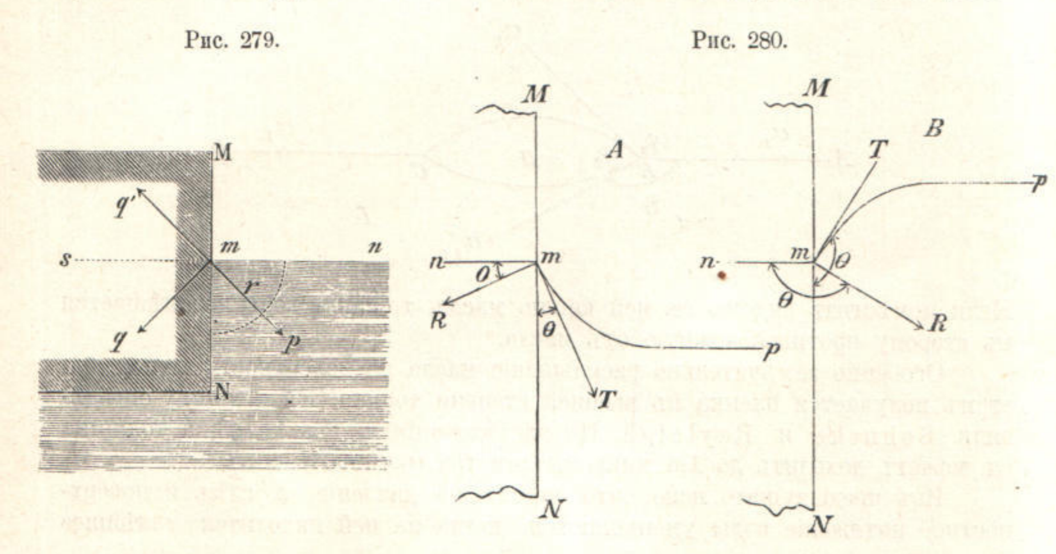
Литературу см. въ концѣ главы пятой.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Явленія смачиванія и волосности.

§ 1. Соприкосновеніе жидкостей съ твердыми тѣлами. Силы сцѣпленія дѣйствуютъ также между частицами жидкаго и твердаго тѣла, находящихся въ соприкосновеніи. Поэтому поверхностное давленіе P, а слѣд. и поверхностное натяженіе α жидкости должны измѣниться, когда жидкость граничитъ съ твердымъ тѣломъ. Недостающая полусфера около частицы m''

Рис. 279. Рис. 280.



на рис. 248 (стр. 433) въ этомъ случаѣ существуетъ, заполненная частицами твердаго тѣла.

Смотря по относительной величинѣ сцѣпленія между однородными частицами жидкости, и сцѣпленія между частицами твердаго и жидкаго тѣла, слѣдуетъ отличать два случая, которые характеризуются явленіями смачиванія и несмачиванія твердаго тѣла жидкостью. Съ чисто внѣшней стороны эти явленія заключаются въ слѣдующемъ. Когда твердое тѣло смачивается жидкостью, то послѣдняя къ первому пристаетъ. Капля жидкости расплывается по поверхности твердаго тѣла; тѣло, опущенное въ жидкость и затѣмъ вынутое, оказывается покрытымъ тонкимъ слоемъ жидкости, медленно стекающей и образующей на нижнемъ концѣ капли; если погрузить часть тѣла въ жидкость, то поверхность послѣдней дѣлается вогнутой, т.-е. приподнятой около поверхности твердаго тѣла. Такъ напр. чистое стекло смачивается водою.

Когда жидкость не смачиваетъ твердаго тѣла, то первая ко второму не пристаетъ. Капля жидкости не расплывается по поверхности твердаго тѣла, но получаетъ выпуклую боковую поверхность, приближающуюся

къ поверхности шара по мѣрѣ уменьшенія капли; если тѣло погрузить въ жидкость и затѣмъ вынуть, то на немъ не оказывается слоя жидкости; поверхность жидкости, граничащая съ твердымъ тѣломъ, въ нее отчасти погруженнымъ, оказывается выпуклой, т.-е. опускающейся внизъ около вертикальной поверхности твердаго тѣла. Такъ напр. стекло не смачивается ртутью, и тѣла, покрытыя тонкимъ слоемъ жира или параффина, не смачиваются водою.

§ 2. Краевой уголъ. Элементарное объясненіе измѣненія горизонтальной поверхности жидкости mn (рис. 279) на границѣ твердаго тѣла MN заключается въ слѣдующемъ. На частицу m дѣйствуютъ съ одной стороны сила p сцѣпленія сосѣднихъ жидкихъ частицъ, съ другой — силы q и q' притяженія двухъ половинъ твердаго тѣла MN. Равнодѣйствующая R всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на m, можетъ быть направлена во внутрь твердаго тѣла (рис. 280.A) или во внутрь жидкости (рис. 280.B).

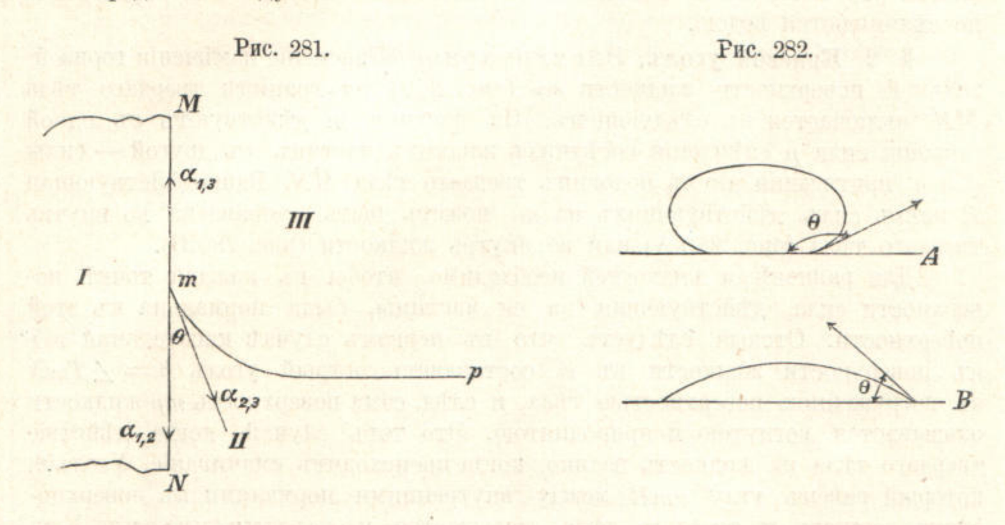
Для равновѣсія жидкостей необходимо, чтобы въ каждой точкѣ поверхности сила, дѣйствующая на ея частицы, была нормальна къ этой поверхности. Отсюда слѣдуетъ, что въ первомъ случаѣ касательная mT къ поверхности жидкости въ m составляетъ острый уголъ $\theta = \angle TmN$ съ погруженною поверхностью тѣла, и слѣд. сама поверхность mp жидкости оказывается вогнутою и приподнятою. Это тотъ случай, когда дѣйствіе твердаго тѣла на жидкость велико, когда происходитъ смачиваніе. Уголъ θ, который равенъ углу nmR между внутренними нормалями къ поверхностямъ жидкаго и твердаго тѣла, называется краевымъ угломъ. Его величина зависитъ отъ положенія силы R, т.-е. исключительно только отъ рода жидкости и твердаго тѣла. Когда жидкость смачиваетъ твердое тѣло, то краевой уголъ острый.

Во второмъ случаѣ, когда перевѣсъ на сторонѣ силъ взаимнаго сцѣпленія частицъ жидкости, и равнодѣйствующая R направлена во внутрь жидкости, рис. 280.B, краевой уголъ θ между касательной mT и погруженною частью твердаго тѣла, равный углу nmR между внутренними нормалями mn и mR, будетъ тупой. Поверхность mp жидкости выпуклая. Въ этомъ случаѣ твердое тѣло не смачивается жидкостью.

Разсмотримъ точнѣе условія равновѣсія трехъ соприкасающихся срединъ (рис. 281), изъ которыхъ одна твердая (I), вторая (II) жидкая, а третья (III) можетъ быть жидкой или газообразной. Обозначимъ черезъ $\alpha_{1,2}$ натяженіе въ поверхности соприкосновенія твердаго тѣла I и жидкости II; черезъ $\alpha_{2,3}$ натяженіе на границѣ жидкости II и газа или жидкости III; наконецъ, черезъ $\alpha_{1,3}$ натяженіе на поверхности твердаго тѣла I и газа или жидкости III. Мы допускаемъ, такимъ образомъ, натяженіе и на поверхности твердаго тѣла, ограниченнаго газомъ или пустотою, оставляя открытымъ вопросъ о физическомъ значеніи и о реальности такого натяженія. Частица m жидкости какъ бы притягивается массою твердаго тѣла по направленію mM въ случаѣ смачиванія твердаго тѣла жидкостью. Слѣдовательно по аналогіи мы можемъ и здѣсь допустить существованіе натяженія $\alpha_{1,3}$. Quinke указываетъ на то, что если жидкая масса обладаетъ поверхностнымъ натяженіемъ, то нѣтъ причины

почему таковое должно исчезнуть при ея затвердѣваніи. Въ отдѣлѣ шестомъ мы познакомимся съ явленіемъ, указывающимъ на существованіе въ поверхностномъ слоѣ твердаго тѣла чего-то аналогичнаго натяженію въ жидкостяхъ. Впрочемъ, поверхностное натяженіе $\alpha_{1,3}$ можемъ приписать и слою сгущеннаго водяного пара, покрывающаго поверхность mM твердаго тѣла, если среда III воздухъ.

Рис. 281. Рис. 282.



Нормальная къ MN слагаемая силы $\alpha_{2,3}$ уничтожается сопротивленіемъ твердаго тѣла и потому условіе равновѣсія частицы m будетъ

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3}\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2}}{\alpha_{2,3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Если $\alpha_{1,3} > \alpha_{1,2}$, то краевой уголъ острый, поверхность mp вогнутая; если же $\alpha_{1,3} < \alpha_{1,2}$, то краевой уголъ тупой и поверхность mp выпуклая. Когда $\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2} > \alpha_{2,3}$, то краевого угла не существуетъ и жидкость тонкимъ слоемъ распространяется по поверхности твердаго тѣла; это случай полнаго смачиванія.

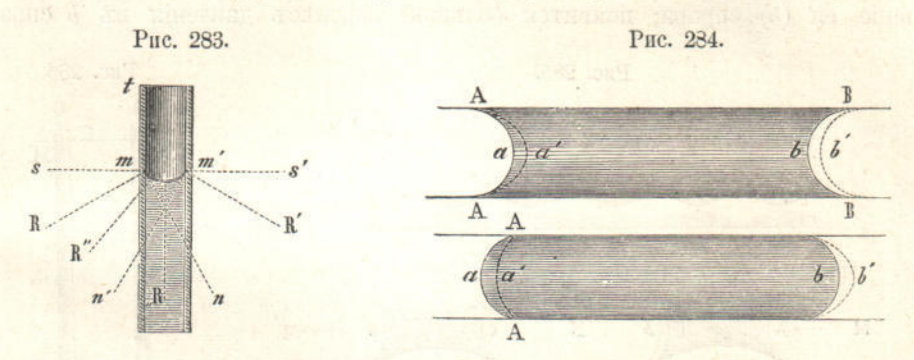
Если опустить каплю жидкости на горизонтальную поверхность твердаго тѣла, то она принимаетъ форму, изображенную на рис. 282, A, когда $\alpha_{1,3} < \alpha_{1,2}$, и форму B, когда $\alpha_{1,3} > \alpha_{1,2}$.

Когда поверхность жидкости со всѣхъ сторонъ окружена твердымъ тѣломъ, то она во всѣхъ направленіяхъ будетъ ограничена вогнутой или выпуклой частью. Когда размѣры поверхности весьма малы, то вполнѣ исчезаетъ средняя плоская часть и мы получаемъ вогнутый или выпуклый менискъ. Такой случай представляется, когда жидкость находится внутри достаточно узкой трубки. На рис. 283 показана форма поверхности жидкости внутри трубки, состоящей изъ матеріала, смачиваемаго жидкостью;

n и n' касательныя къ поверхности жидкости, R, R', R'', $_{II}R$ направленія нормали, т.-е. равнодѣйствующихъ силъ въ различныхъ точкахъ. Когда матеріалъ трубки не смачивается жидкостью (стекло и ртуть), то жидкій столбъ ограничивается сверху выпуклымъ менискомъ. Чѣмъ уже трубка, тѣмъ больше вогнутость или выпуклость мениска.

Вслѣдствіе измѣненія вида поверхности, мѣняется и поверхностное давленіе P, согласно формулѣ Laplace'а (стр. 462). На вогнутой поверхности

Рис. 283. Рис. 284.



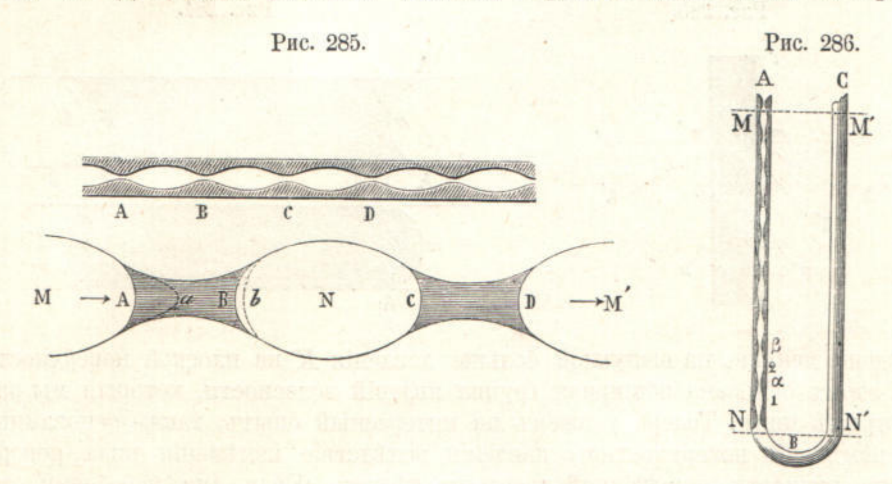
давленіе меньше, на выпуклой больше давленія K на плоской поверхности. На этомъ основана обширная группа явленій волосности, которыя мы разсмотримъ ниже. Теперь укажемъ на интересный опытъ, также основанный на измѣненіи поверхностнаго давленія вслѣдствіе измѣненія вида поверхности жидкости, окруженной твердымъ тѣломъ. Если дно коробочки сдѣлать изъ металлической сѣтки съ отверстіями въ толщину иголки средней величины, и налить въ нее воды, то вода, конечно, будетъ протекать, ибо металлическая проволока смачивается водою, которая легко проходитъ черезъ отверстія. Но если сѣтку опустить въ расплавленный параффинъ, вынуть и стряхнуть, такъ что отверстія сѣтки останутся открытыми и только проволоки окажутся покрытыми тонкимъ слоемъ параффина, то можно наполнить коробку водою, положивъ предварительно листъ бумаги на ея дно. Вынувъ осторожно бумагу, мы замѣтимъ, что вода будетъ держаться въ коробкѣ, не протекая черезъ отверстія сѣтки. Объясняется это тѣмъ, что вода не смачиваетъ параффина и слѣд. она въ каждомъ отверстіи имѣетъ выпуклую внизъ поверхность. Увеличенное поверхностное давленіе достаточно, чтобы поддержать слой воды.

§ 3. Сопротивленіе и движеніе капель въ трубкахъ. Если въ трубкѣ находится рядъ капель (столбиковъ) какой-либо жидкости, то требуется весьма большое давленіе, чтобы ихъ передвинуть вдоль трубки, безразлично, смачиваютъ или не смачиваютъ онѣ стѣнки трубки. На рис. 284 изображена сверху капля ab жидкости, смачивающей трубку; если слѣва увеличивать давленіе, то поверхность a переходитъ въ a', b въ b'. Первая дѣлается болѣе, вторая — менѣе вогнутой; вслѣдствіе этого поверхностное давленіе въ b' больше, чѣмъ въ b; является давленіе справа на лѣво, противодѣйствующее внѣшней силѣ. Когда капля ab не смачиваетъ стѣнокъ сосуда (см. рис. 284 внизу), то давленіе слѣва придаетъ каплѣ

форму $a'b'$, причемъ бóльшая выпуклость въ b' вызываетъ опять давленіе справа налѣво.

Сопротивленіе смачивающихъ капель еще болѣе увеличивается, когда каналъ трубки поперемѣнно съуживается и расширяется, какъ показано на рис. 285 наверху и въ увеличенномъ видѣ внизу. Капли *AB*, *CD* помѣстятся въ съуженныхъ частяхъ (см. причину ниже, рис. 287). Давленіе со стороны *M* вызоветъ сильное увеличеніе вогнутости (*a*) слѣва и уменьшеніе ея (*b*) справа; появится большой перевѣсъ давленія въ *b* справа

Рис. 285. Рис. 286.



налѣво. Трубку вида *ABC*, рис. 286, легко наполнить водою до черты *MM'*. Если сжатымъ воздухомъ медленно выдавливать воду изъ колѣна *MN* такъ, чтобы въ съуженныхъ мѣстахъ α, β и т. д. оставались капли, то потребуется большое давленіе, чтобы довести уровень до черты *N*. Между тѣмъ вода даже подъ слабымъ давленіемъ легко заполняетъ вновь столбъ *NM*, захватывая и поглощая одну каплю за другою. Отсюда мы видимъ, что черезъ каналъ, имѣющій внутреннія неровности и содержащій воздухъ и жидкость, легко проходитъ эта жидкость, между тѣмъ какъ для воздуха каналъ почти непроницаемъ.

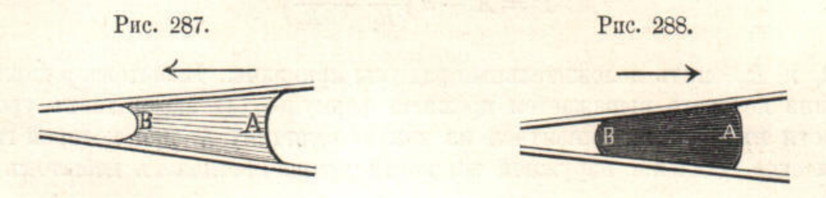
Столбикъ жидкости *AB* (рис. 287), помѣщенный въ коническую трубку, самъ движется къ болѣе узкой части, когда онъ смачиваетъ стѣнки трубки, ибо меньшей вогнутости въ *A* соотвѣтствуетъ большее давленіе. Когда капля не смачиваетъ трубки (рис. 288), то капля сама перемѣщается въ сторону болѣе широкую, ибо на болѣе выпуклой поверхности *B* дѣйствуетъ большее давленіе.

§ 4. Волосность. Если въ жидкость, помѣщенную въ широкомъ сосудѣ, опустить узенькую трубку *AB* (рис. 289) изъ матеріала, смачиваемаго жидкостью, то послѣдняя поднимется въ трубкѣ; если же жидкость не смачиваетъ трубки, то ея уровень внутри трубки будетъ находиться ниже, чѣмъ въ наружномъ сосудѣ (рис. 290). Для наблюденія пониженія удобнѣе сообщающіеся сосуды, въ родѣ изображенныхъ на рис. 291. Указанное здѣсь явленіе называется волосностью или капилярностью.

Элементарное объясненіе этого явленія заключается въ слѣдующемъ.

Въ наружномъ сосудѣ можно считать поверхность жидкости плоскою и потому нормальное давленіе равнымъ K, по формулѣ Laplace'a, стр. 462.

Рис. 287. Рис. 288.



На вогнутой поверхности жидкости, смачивающей трубку, дѣйствуетъ давленіе

$$P = K - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

гдѣ R_1 и R_2 положительные радіусы кривизны поверхности. Такимъ образомъ получается избытокъ p наружнаго давленія, равный

$$p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Подъ вліяніемъ этого давленія жидкость должна подняться по трубкѣ на такую высоту h, чтобы давленіе приподнятаго жидкаго столба на единицу площади, лежащей на высотѣ наружной горизонтальной поверхности жидкости, сдѣлалось равнымъ p. Величина p зависитъ однако только отъ

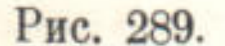
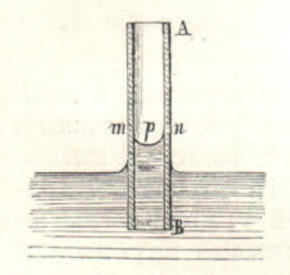
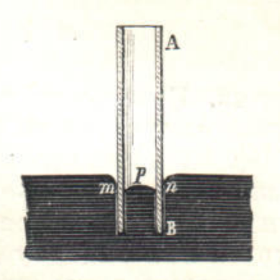
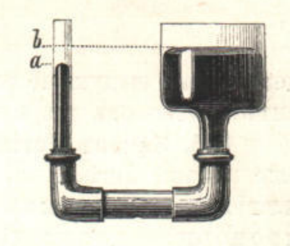


Рис. 289. Рис. 290. Рис. 291.





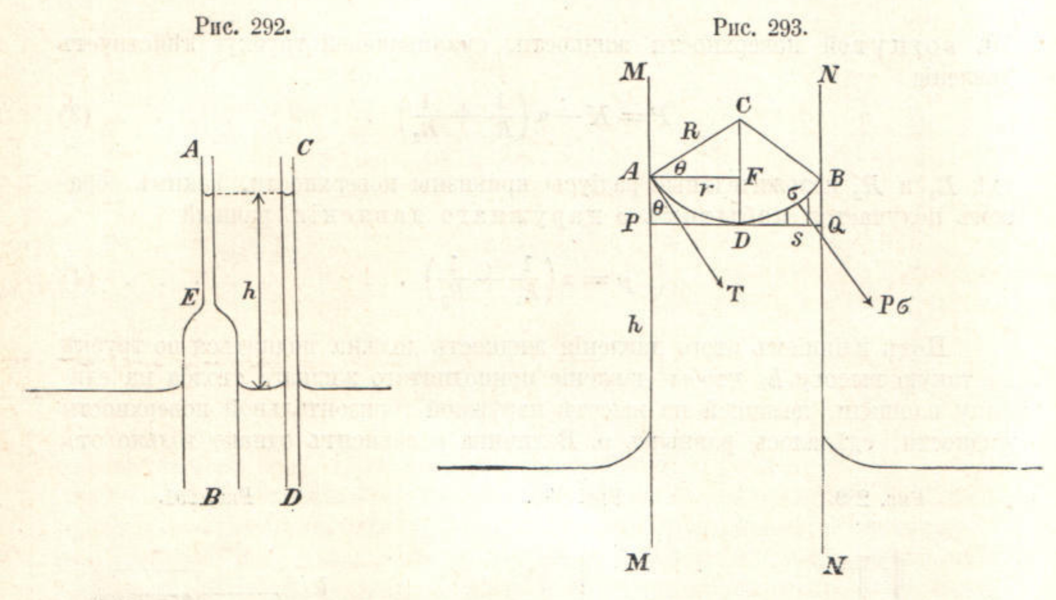


поверхностнаго натяженія α и отъ радіусовъ кривизны, которые съ своей стороны зависятъ отъ діаметра трубки въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится менискъ. Отсюда слѣдуетъ, что высота h столба жидкости, который можетъ держаться внутри трубки, не зависитъ отъ размѣровъ тѣхъ частей этой трубки, которыя лежатъ ниже мениска. Такъ напр. жидкость удерживается на одинаковой высотѣ въ трубкахъ AB и CD (рис. 292), если ширина канала въ CD и въ AE одна и та же. Понятно, что въ CD жидкость сама поднимется, а въ AB она должна быть сперва приподнята выше точки E вытягиваніемъ воздуха изъ верхняго отверстія трубки. Та же высота h получилась бы, еслибы нижняя часть трубки CD была ўже верхней.

Когда жидкость не смачиваетъ трубки, то на ней образуется выпуклый менискъ съ поверхностнымъ давленіемъ

$$P = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

гдѣ R_1 и R_2 опять положительные радіусы кривизны. Избытокъ p давленія, величина котораго выражается прежнею формулою (4), заставляетъ уровень жидкости въ трубкѣ понизиться на такую величину h, при которой гидростатическое давленіе наружной жидкости уравновѣшиваетъ избытокъ дав-



ленія p на выпуклой поверхности. И въ этомъ случаѣ пониженіе h зависитъ только отъ ширины трубки въ томъ мѣстѣ, гдѣ образуется менискъ.

§ 5. Законъ Jurin'a (1718). Подъ этимъ названіемъ извѣстенъ законъ, еще раньше Jurin'a высказанный въ 1670 г. Borelli: высота h поднятія или опусканія жидкости въ волосной трубкѣ обратно пропорціональна діаметру d или радіусу r канала трубки.

Высота h можетъ быть вычислена двумя путями.

Пусть $MMNN$ (рис. 293) трубка, внутренній радіусъ которой r; ADB поверхность жидкости, которую можно принять за часть сферической поверхности съ центромъ въ C и съ радіусомъ $R = AC$. Краевой уголъ обозначимъ черезъ $\theta = \angle PAT = \angle CAF$; мы видѣли, что онъ зависитъ только отъ рода жидкости и твердаго тѣла, когда ихъ поверхности совершенно чисты. Ниже будетъ сказано, какимъ образомъ можно сдѣлать $\theta = 0$, когда стѣнка трубки смачивается жидкостью. Полагая въ (3) $R_1 = R_2 = R$, имѣемъ

$$P = K - \frac{2\alpha}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

На каждый элементъ σ поверхности ADB дѣйствуетъ нормальное давленіе $P\sigma$, вертикальная слагаемая котораго очевидно равна Ps, гдѣ s проекція элемента σ на горизонтальную плоскость. Полное вертикальное давленіе на единицу горизонтальной плоскости PQ равно $P = K - \frac{2\alpha}{R}$. На наружной горизонтальной поверхности имѣемъ давленіе K на единицу поверхности, слѣд. давленіе жидкаго столба на единицу поверхности его горизонтальнаго основанія должно равняться $\frac{2\alpha}{R}$. Давленіе столба равно $h\delta$, гдѣ δ плотность жидкости; слѣд. $\frac{2\alpha}{R} = h\delta$. Но $R = \frac{r}{\cos\theta}$, слѣд.

$$\frac{2\alpha\cos\theta}{r} = h\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

откуда

$$h = \frac{2\alpha}{\delta} \cdot \frac{\cos\theta}{r} = \frac{4\alpha}{\delta} \cdot \frac{\cos\theta}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

гдѣ $d = 2r$ діаметръ трубки.

Покажемъ другой выводъ. На единицу длины контура AB мениска дѣйствуетъ натяженіе α по направленію касательныхъ къ поверхности жидкости; полное натяженіе равно $2\pi\alpha r$, а его вертикальная слагаемая равна $2\pi\alpha r\cos\theta$. Представимъ себѣ, что это натяженіе поддерживаетъ столбъ жидкости, высота котораго h, площадь поперечнаго сѣченія πr^2 и плотность δ. Тогда имѣемъ

$$2\pi\alpha r\cos\theta = \pi r^2 h\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

откуда опять получается формула (7). Та же формула выражаетъ пониженіе жидкости, не смачивающей стѣнокъ трубки, и не трудно оба вывода приложить и къ этому случаю.

Въ случаѣ полнаго смачиванія имѣемъ $\theta = 0$ и слѣд.

$$h = \frac{2\alpha}{\delta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\alpha}{\delta} \cdot \frac{1}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Формула (7) подтверждаетъ законъ Jurin'a.

§ 6. Названія и обозначенія постоянныхъ. Къ сожалѣнію до сихъ поръ не установились ни обозначенія, ни даже, что особенно неудобно, названія тѣхъ величинъ, съ которыми мы имѣемъ дѣло въ ученіи о капилярныхъ и родственныхъ имъ явленіяхъ. Оказывается, что главную роль играютъ двѣ величины.

I. Первая величина—это α въ основной формулѣ Laplace'a, (10) стр. 462, которую самъ Laplace пишетъ въ видѣ $\frac{H}{2}$; это сила натяженія, приходящаяся на единицу длины линіи, начертанной на поверхности. Ее принято выражать въ миллигр. на миллиметръ длины. Нерѣдко α принимаютъ за одну изъ двухъ т. наз. «капилярныхъ постоянныхъ». Для избѣжанія возможныхъ недоразумѣній, мы величину α только и будемъ называть поверхностнымъ натяженіемъ.

Итакъ

$$\left(\frac{H}{2}\right)_{\text{Laplace}} = \alpha = \text{«поверхностное натяженіе»} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Размѣръ α равенъ, см. (6) стр. 456,

$$[\alpha] = \left[\frac{\text{мгр.}}{\text{мм.}}\right] = \frac{ML}{T^2} : L = \frac{M}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Такъ какъ C. G. S. единица натяженія будетъ

$$1 \frac{\text{динъ}}{\text{сантим.}} = \frac{1{,}02 \text{ миллигр.}}{10 \text{ мм.}} = 0{,}102 \frac{\text{миллигр.}}{\text{мм.}},$$

то ясно, что численное значеніе величинъ α въ C. G. S. единицахъ получится отъ умноженія обыкновенно приводимыхъ численныхъ значеній (въ $\frac{\text{мгр.}}{\text{мм.}}$ единицахъ) на 9,84.

II. Вторая величина, которую принято обозначать черезъ a^2, равна

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ δ плотность жидкости, равная числу граммовъ вѣса въ куб. сантим., или числу миллигр. въ куб. миллиметрѣ. Размѣръ величины δ равенъ

$$[\delta] = \left[\frac{\text{вѣсъ}}{\text{объемъ}}\right] = \frac{ML}{T^2} : L^3 = \frac{M}{T^2L^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Отсюда размѣръ величины a^2:

$$[a^2] = [\alpha] : [\delta] = \frac{M}{T^2} : \frac{M}{T^2L^2} = L^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Величина a^2 размѣра L^2; принято выражать ее въ кв. миллиметрахъ. Величину a^2 часто называютъ удѣльнымъ сцѣпленіемъ, считая ее какъ бы за вторую капилярную постоянную.

Мы условимся только величину a^2 называть капилярною постоянною.

Замѣтимъ, что Gauss обозначаетъ величину $\frac{1}{2}a^2 = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{H}{2\delta}$ черезъ α^2. Формулы (9) и (12) даютъ

$$a^2 = hr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

или, если принять, что при $r = 1$ получается $h = h_1$,

$$a^2 = h_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Капилярная постоянная данной жидкости численно равна высотѣ подъема этой жидкости въ трубкѣ, радіусъ канала

которой равенъ 1 мм. и стѣнки которой жидкостью вполнѣ смачиваются ($\theta = 0$ въ (7)).

На основаніи формулы (15) произведеніе изъ діаметра $2r$ трубки на высоту h подъема должно быть постояннымъ для данной жидкости. Это подтверждается опытами Gay-Lussac'a, какъ видно изъ слѣдующихъ чиселъ

Жидкость.	Діаметръ трубки $2r$.	Высота подъема h.	$2rh$.
Вода	1,274 мм.	23,739 мм.	30,262
	1,903	15,903	30,263
Алкоголь	1,294	9,398	12,164
$\delta = 0,8196$	1,903	6,389	12,158

§ 7. Явленія волосности въ нецилиндрическомъ пространствѣ.

I. Параллельныя пластинки. Если опустить въ жидкость двѣ параллельныя пластинки, разстояніе которыхъ d, то жидкость между ними поднимется или опустится на высоту h, которую легко опредѣлить. Жидкость сверху будетъ ограничена частью поверхности цилиндра, образующія котораго параллельны пластинкамъ. Положимъ, что на рис. 293 MM и NN двѣ пластинки, $PQ = d$ ихъ разстояніе. Давленіе P на единицу поверхности ADB равно, какъ всегда, $K - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$; но для цилиндра $R_1 = \infty$, $R_2 = R = AC$, такъ что $P = K - \frac{\alpha}{R}$. Аналогично прежнему мы видимъ, что теперь давленіе $h\delta$ приподнятаго слоя жидкости должно равняться избытку давленія K на наружней плоской поверхности надъ давленіемъ P, т.-е.

$$h\delta = \frac{\alpha}{R} = \frac{\alpha\cos\theta}{r} = \frac{2\alpha\cos\theta}{d};$$

итакъ

$$h = \frac{2\alpha\cos\theta}{\delta d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Сравнивая эту формулу съ (7), мы видимъ, что высота подъема жидкости между параллельными пластинками равна половинѣ высоты подъема въ трубкѣ, когда разстояніе пластинокъ равно діаметру трубки. Когда жидкость вполнѣ смачиваетъ пластинки, то, см. (12),

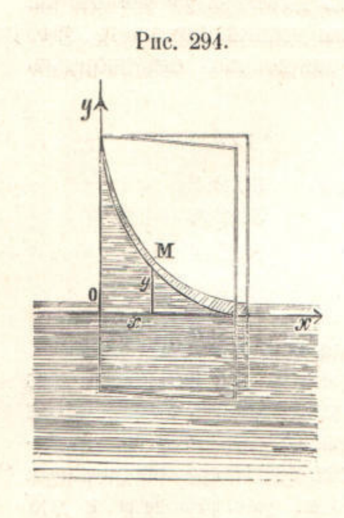
$$h = \frac{2\alpha}{\delta d} = \frac{a^2}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Высота подъема жидкости между параллельными пластинками обратно пропорціональна ихъ разстоянію.

II. Непараллельныя пластинки. Если въ жидкость опустить двѣ пластинки, образующія двугранный уголъ φ (рис. 294), то жидкость поднимется тѣмъ выше, чѣмъ меньше разстояніе d пластинокъ, т.-е. чѣмъ ближе она находится къ ребру двуграннаго угла. Поверхность жидкости ограничена нѣкоторой кривой, уравненіе которой легко опредѣлить. При-

мемъ ребро двуграннаго угла за ось y-овъ; начало координатъ O у поверхности жидкости и ось x'овъ по направленію прямой, дѣлящей пополамъ горизонтальный уголъ φ. Точка M имѣетъ координаты x и y; высота поднятія y опредѣляется формулою (17), въ которой d разстояніе пластинокъ въ точкахъ, находящихся на разстояніи x отъ ребра Oy. Если черезъ M провести горизонтальную плоскость, то въ сѣченіи получится равнобедренный треугольникъ съ вершиною на ребрѣ Oy, съ основаніемъ d, высотою x и угломъ φ при вершинѣ. Ясно, что $d = 2xtg\frac{\varphi}{2}$. Вставивъ это въ (17), и положивъ y вмѣсто h, получаемъ

Рис. 294.



$$y = \frac{\alpha\cos\theta}{\delta xtg\frac{\varphi}{2}},$$

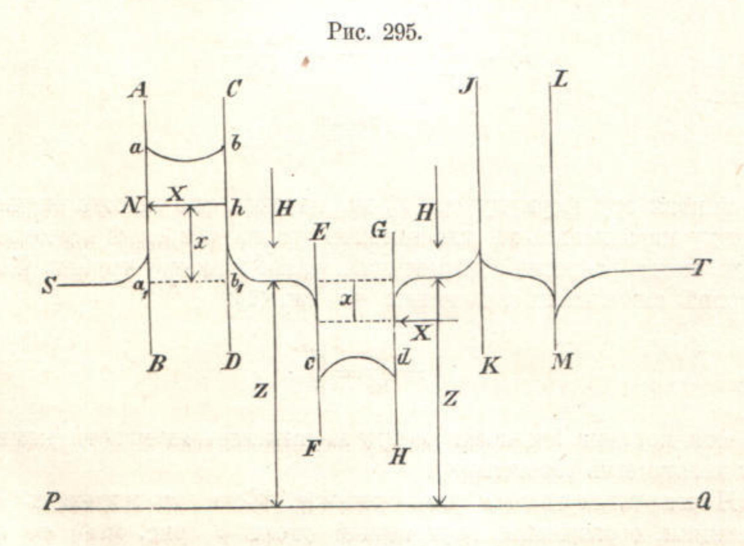
откуда

$$xy = \frac{\alpha\cos\theta}{\delta tg\frac{\varphi}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Вся правая сторона постоянная, и потому искомое уравненіе имѣетъ видъ $xy = \text{Const}$. Это уравненіе гиперболы. Когда жидкость вполнѣ смачиваетъ пластинки, то въ (19) $\cos\theta = 1$.

§ 8. Кажущееся притяженіе и отталкиваніе тѣлъ, отчасти погруженныхъ въ жидкость. Два тѣла плавающихъ, или висящихъ на нитяхъ

Рис. 295.



и отчасти погруженныхъ въ жидкость стремятся сблизиться, когда оба смачиваются или оба не смачиваются жидкостью; они стремятся удалиться другъ отъ друга, когда одно изъ нихъ смачивается, другое не смачивается.

Это явленіе легко объясняется гидростатическими давленіями. Пусть ST (рис. 295) поверхность жидкости; AB и CD двѣ пластинки, вполнѣ смачиваемыя жидкостью, которая между ними поднялась на высоту h до ab; атмосферное давленіе обозначимъ черезъ H. Давленіе подъ наружней горизонтальной поверхностью равно $H+K$, а подъ вогнутой поверхностью ab оно равно $H+K-\frac{\alpha}{R}$ (см. § 7). Проведемъ горизонтальную плоскость PQ ниже пластинокъ на разстояніи z отъ поверхности. Давленіе p на единицу этой поверхности должно быть вездѣ одинаковое; подъ горизонтальной поверхностью оно равно $H+K+\delta z$, гдѣ δ плотность жидкости; подъ ab оно равно $H+K-\frac{\alpha}{R}+(z+h)\,\delta$. Итакъ

$$p=H+K+\delta z=H+K-\frac{\alpha}{R}+(z+h)\delta,$$

откуда попрежнему $\delta h=\frac{\alpha}{R}$. Опредѣлимъ давленіе X на стѣнку AB въ точкѣ N на высотѣ x надъ уровнемъ ST. Давленіе p_x внутри жидкости въ этомъ мѣстѣ равно $p_x=p-(x+z)\delta=H+K-x\delta$; искомое же давленіе $X=p_x-K$, ибо давленіе K на стѣнку не передается. Такимъ образомъ

$$X=H-x\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Это давленіе меньше наружняго давленія H, и потому пластинка AB будетъ стремиться передвинуться направо; точно также CD перемѣстится налѣво и пластинки какъ будто притянутся. Если l ширина пластинки, то вся сила F, дѣйствующая на нее, равна

$$F=l\delta\int_0^h x\,dx=\frac{l\delta}{2}h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Когда пластинки EF и GH не смачиваются, то очевидно, что на разстояніи x отъ поверхности ST дѣйствуетъ наружное давленіе $X=$ $=H+\delta x$; избытокъ надъ внутреннимъ давленіемъ H и здѣсь равенъ δx.

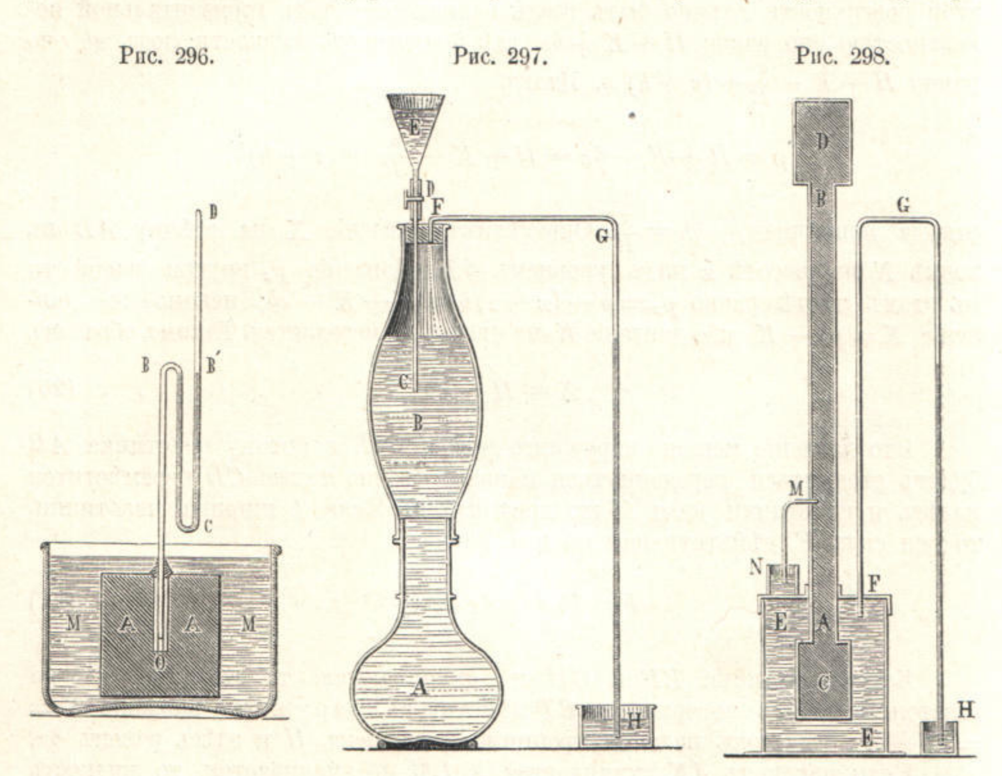
Если наконецъ JK смачивается, а LM не смачивается, то жидкость на наружней сторонѣ отъ JK поднимается выше, а на наружней сторонѣ отъ LM опустится ниже, чѣмъ на сторонахъ внутреннихъ. Въ этомъ случаѣ JK будетъ находиться какъ бы въ положеніи CD; она двинется налѣво, между тѣмъ какъ ZM, находясь въ положеніи EF, перемѣстится направо. Произойдетъ кажущееся отталкиваніе между JK и LM.

Этимъ объясняется скопленіе въ одну кучу тѣлъ, плавающихъ на поверхности жидкости, которою они смачиваются, какъ напр. пузырьковъ, листьевъ на прудахъ и т. под.

§ 9. Всасываніе жидкостей пористыми тѣлами. На волосности основано безчисленное множество разнообразныхъ явленій всасыванія жидкостей пористыми тѣлами. Губка, сахаръ, пропускная бумага, песокъ, мѣлъ, дерево, литографскій камень и т. д. съ большою силою какъ бы втягиваютъ въ себя жидкости. На рис. 296 показанъ приборъ Jamin'а, имѣющій слѣ-

дующее устройство. Въ сосудъ съ водою *MM* опущенъ кусокъ мѣла *AA*, въ которомъ просверлено цилиндрическое углубленіе. Изогнутая трубка *OBCB'D*, содержащая ртуть или подкрашенную воду въ части *BCD*, и служащая манометромъ, вставлена нижнимъ концомъ въ это углубленіе, залитое сверху сургучемъ. Вода, всасываемая мѣломъ, вгоняетъ воздухъ, содержащійся въ его порахъ, въ небольшое пространство *O*, и затѣмъ въ трубку. Если конецъ *D* запаянъ, то можно наблюдать сдавливаніе воздуха до 3-хъ и болѣе атмосферъ. На рис. 297 изображенъ другой приборъ

Рис. 296. Рис. 297. Рис. 298.



J a m i n'а. Глиняные немуравленные сосуды *AB* наполняются прокипяченою водою черезъ воронку *E*. Трубка *FGH* опущена въ чашечку со ртутью. Вода, непрерывно просачиваясь черезъ стѣнки сосудовъ, испаряется на ихъ наружней сторонѣ. Надъ водой происходитъ разрѣженіе воздуха и ртуть поднимается по трубкѣ *HG*. Поднятіе можетъ доходитъ до 600 и болѣе мм.

Явленія волосности играютъ большую роль въ жизни растеній.

На рис. 298 изображенъ интересный приборъ J a m i n'а, разъясняющій эту роль, а также вліяніе испаренія воды на поверхности листьевъ. *D* и *C* пористыя банки, наполненныя гипсомъ; *AB* гипсовый столбъ, окруженный жестяной трубкой. Поверхность банки *D* соотвѣтствуетъ поверхности листьевъ; на ней происходитъ испареніе воды, поднимающейся изъ герметически закрытаго сосуда *E*. Трубка *FGH* опущена нижнимъ концомъ *H*

въ ртуть, а трубка MN въ воду. Испареніе въ D вызываетъ весьма значительное поднятіе ртути въ трубкѣ HG, и довольно быстрое всасываніе воды изъ N по трубкѣ NM.

§ 10. Способы опредѣленія поверхностнаго натяженія α и капилярной постоянной $a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$ (гдѣ δ плотность жидкости).

I. Способъ капилярныхъ трубокъ (опредѣленіе a^2). Мы имѣли формулу (8) стр. 479, выражающую, что натяженіе $2\pi\alpha r\cos\theta$ поддерживаетъ вѣсъ жидкаго столба $\pi r^2 h\delta$. Полагая, что h есть высота жидкаго столба до нижней точки мениска, мы должны еще прибавить вѣсъ самого мениска. Когда жидкость вполнѣ смачиваетъ стѣнки трубки, имѣемъ $\theta = 0$, и объемъ мениска, ограниченный поверхностью полушарія, равенъ объему цилиндра, высота и радіусъ основанія котораго r, безъ объема полушара, т.-е. онъ равенъ $\pi r^2 r - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3$. Поэтому (8) слѣдуетъ написать въ видѣ (при $\theta = 0$):

$$2\pi r\alpha = \pi r^2 h\delta + \frac{1}{3}\pi r^3\delta = \pi r^2\delta\left(h + \frac{1}{3}r\right) \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

откуда

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta} = r\left(h + \frac{1}{3}r\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Для болѣе широкихъ трубокъ Poisson далъ для второго множителя выраженіе $h + \frac{1}{3}r - \frac{r^3}{3a^2}(lg\,4 - 1)$, или иначе $h + \frac{1}{3}r - 0{,}1288\frac{r^2}{h}$. Hagen и Desains ввели вмѣсто $h + \frac{1}{3}r$ въ (23) множитель $h + b$, гдѣ

$$b = \frac{3a^2 r}{3a^2 + r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Измѣряя r и h, и вводя поправку по одной изъ указанныхъ формулъ, можно измѣрить капилярную постоянную a^2, а зная плотность δ, получить натяженіе α. Величины r и h должны быть выражены въ миллиметрахъ.

Чтобы имѣть возможность пользоваться формулой (23), мы должны устроить наблюденіе такъ, чтобы краевой уголъ $\theta = 0$. Это достигается предварительнымъ покрываніемъ поверхности канала трубки слоемъ испытуемой жидкости, которую всасываніемъ поднимаютъ на высоту бо̀льшую, чѣмъ h, и затѣмъ даютъ ей свободно опуститься. Въ этомъ случаѣ смачиваніе полное и краевой уголъ равенъ нулю.

Этимъ способомъ опредѣляли капилярную постоянную Gay-Lussac, Desains, Simon de Metz, Quet, Д. И. Менделѣевъ, De Heen, Quinke, Frankenheim и друг. Н. Пильчиковъ видоизмѣнилъ этотъ способъ, наблюдая разность высотъ жидкости въ сообщающихся капилярныхъ трубкахъ различнаго діаметра.

Приводимъ таблицу чиселъ a^2 и α для нѣкоторыхъ веществъ.

ВЕЩЕСТВО.	$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$ кв. мм.	$\alpha = \frac{\delta a^2}{2}$ $\frac{\text{мгр.}}{\text{мм.}}$
Ртуть	7,0	47,0
Вода (0°)	16,4	8,18
Алкоголь (0°)	6,06	2,58
Эфиръ (0°)	5,43	1,97
Бензолъ (15°)	6,82	2,88
Хлороформъ (12,5°)	3,80	2,81
Скипидаръ	—	3,03
Сѣроуглеродъ	—	3,27
Оливковое масло	7,16	3,27

Итакъ напр. натяженіе воды равно 8,18 мгр. на каждый миллиметръ длины. Числа, даваемыя различными наблюдателями, вообще сильно расходятся между собою. Важную роль играетъ чистота поверхности жидкости. Такъ натяженіе α для воды почти вдвое увеличивается, если ея поверхность искусственно очистить. Verschaffelt изслѣдовалъ этимъ способомъ капилярныя свойства жидкихъ CO_2 и N_2O.

II. Способъ параллельныхъ пластинокъ (опредѣленіе a^2). Мы вывели (17), стр. 481, полагая, что h высота слоя жидкости, приподнявшейся между пластинками, разстояніе которыхъ d. Здѣсь поправку къ h получимъ, прибавляя къ вѣсу $dh\delta$ жидкаго столба, ширина котораго единица, еще вѣсъ цилиндрическаго мениска, равнаго вѣсу призмы $d \cdot \frac{1}{2} d\delta$ безъ вѣса $\frac{1}{2}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \delta$ полуцилиндра. Приподнятый вѣсъ слѣдовательно равенъ $d\delta \left(d + \frac{1}{2} d - \frac{\pi}{8} d\right)$. Очевидно (18) даетъ $\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = 0{,}107\right)$

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta} = d(h + 0{,}107\, d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Пользуясь этой формулой, многіе ученые опредѣляли величину a^2.

III. Способъ Wilhelmy (опредѣленіе α). Если отчасти опустить вертикальную пластинку въ жидкость, то вдоль ея контура приподнимется нѣкоторое количество жидкости, вѣсъ которой на единицу длины контура равенъ $\alpha \cos\theta$, т.-е. вертикальной слагаемой силы натяженія. Если l ширина, d толщина пластинки, то $2(l+d)\alpha\cos\theta$ будетъ вѣсъ приподнятой жидкости, а потому кажущаяся потеря вѣса пластинки будетъ равна

$$p = ldh\delta - 2(l+d)\alpha\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

гдѣ h глубина, на которую пластинка погружена въ жидкость.

Если устроить такъ, чтобы было $\theta = 0$, то эта формула можетъ служить для опредѣленія величины α.

Wilhelmy полагалъ, что изъ его опытовъ можетъ быть опредѣленъ особый коеффиціентъ сгущенія жидкости у поверхности твердаго тѣла.

Позднѣйшіе опыты Roentgen'а и Schleiermacher'а однако не подтвердили существованія такого сгущенія.

IV. Способъ отрыванія пластинокъ (опредѣленіе α и a^2). Горизонтальная пластинка, поверхность которой S, и контуръ s, доводится до соприкосновенія съ поверхностью жидкости. Привѣшивая ее къ одному изъ плечъ коромысла вѣсовъ, опредѣляютъ тотъ вѣсъ P, который необходимъ, чтобы ее оторвать отъ поверхности жидкости. Увеличивая постепенно нагрузку, мы замѣтимъ, что жидкость вмѣстѣ съ пластинкою приподнимется на нѣкоторую высоту z, которую мы для момента разрыва, т. е. когда она достигнетъ наибольшаго своего значенія, обозначимъ черезъ h. Пусть θ уголъ между касательной плоскостью къ поверхности жидкости около контура соприкосновенія ея съ твердымъ тѣломъ и вертикальною плоскостью, проходящей черезъ контуръ (или къ нему касательной). Вѣсъ приподнятой жидкости равенъ $Sz\delta$; вертикальная слагаемая натяженія равна $s\alpha\cos\theta$, и потому нагрузка p будетъ равна

$$p = Sz\delta + s\alpha\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Въ моментъ разрыва $\theta = 0$, $p = P$ и $z = h$, такъ что

$$P = S\delta h + s\alpha$$

По теоріи Laplace'а, см. ниже (33), высота $h = a = \sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}$, и слѣд.

$$P = S\sqrt{2\alpha\delta} + s\alpha = S\delta a + \frac{s\delta a^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Опредѣливъ P, можно вычислить a^2 или α.

V. Способъ взвѣшиванія капель (опредѣленіе α). Когда жидкость, наполняющая узкую вертикальную трубку, медленно выходитъ изъ ея нижняго конца, то образуются капли, которыя, достигнувъ опредѣленнаго вѣса p, спадаютъ. Передъ отпаденіемъ капля имѣетъ форму, изображенную на рис. 299; она поддерживается натяженіемъ вдоль периметра нѣсколько съуженной части. Обозначая черезъ r радіусъ горизонтальнаго сѣченія въ этой части, имѣемъ равенство

Рис. 299.

$$p = 2\pi r\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Наблюдая p и r, находимъ α; p опредѣляется взвѣшиваніемъ опредѣленнаго числа n капель. Труднѣе опредѣлить r, которое нѣсколько меньше радіуса канала трубки. Капли можно получать также на нижнемъ концѣ палочки, по поверхности которой жидкость медленно стекаетъ.

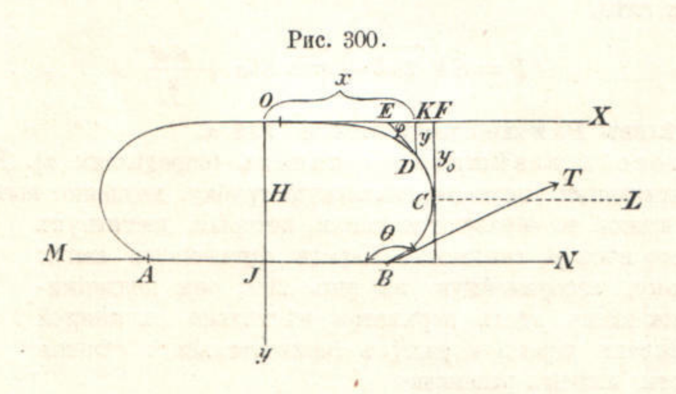
Duclaux устроилъ спиртомѣръ въ видѣ пипетки, емкость которой равна 5 куб. см., съ отверстіемъ, изъ котораго наполняющая ее жидкость вытекаетъ по каплямъ. Число капель, получаемыхъ при опоражниваніи

пипетки, указываетъ, по готовой таблицѣ, на процентное содержаніе чистаго алкоголя; такъ напр. чистая вода даетъ 100 капель, 10% спиртъ — 145 капель, 90% спиртъ — 259 капель. Quincke пользовался методомъ капель для опредѣленія поверхностнаго натяженія α расплавленныхъ металловъ и другихъ тѣлъ, накаливая концы стержней или проволокъ, и опредѣляя вѣсъ образующихся и спадающихъ при этомъ капель. Такъ онъ для Ag находитъ $\alpha = 42{,}75$. Опредѣляя затѣмъ $a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$, гдѣ δ плотность жидкаго вещества, онъ находитъ, что тѣла раздѣляются на группы, для которыхъ a^2 опредѣленное кратное отъ 4,3:

a^2 около 4,3 для Se, Br, S, P, $NaBr$, KBr, $AgBr$, KJ;
a^2 » $4{,}3 \times 2 = 8{,}6$ для Hg, Pb, Ag, Bi, Sb, $NaNO_3$, KNO_3, $NaCl$, $AgCl$, $CaCl_2$, для воска, парафина, сахара и др.;
a^2 » $4{,}3 \times 3 = 12{,}9$ для Au;
a^2 » $4{,}3 \times 4 = 17{,}2$ для Pt, Cd, Sn, Na_2CO_3, K_2CO_3, K_2SO_4, H_2O, для стекла и др.
a^2 » $4{,}3 \times 6 = 25{,}8$ для Pd, Zn, Fe;
a^2 » $4{,}3 \times 12 = 51{,}6$ для Na;
a^2 » $4{,}3 \times 20 = 86$ для K.

VI. **Способъ измѣренія размѣровъ капель и пузырей.** На горизонтальной поверхности MN (рис. 300) расположена столь большая капля

Рис. 300.



AOB, что недалеко отъ выпуклаго ея края можно пренебречь кривизною горизонтальныхъ сѣченій. Возьмемъ начало координатъ въ вершинѣ O капли, ось x-овъ проведемъ горизонтально, ось y-овъ вертикально; какая-либо точка D меридіана капли имѣетъ координаты x и y. Давленіе въ O равно $K + H$, гдѣ H внѣшнее давленіе, K нормальное давленіе въ формулѣ Laplace'а. Если δ плотность жидкости, то давленіе, переданное извнутри капли къ точкѣ D, равно $K + H + y\delta$. Оно должно уравновѣшиваться давленіемъ въ D, которое по формулѣ Laplace'а равно $H + K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Но по предположенію радіусъ кривизны горизонтальнаго сѣченія капли

въ D безконечно великъ, слѣд. $R_1 = \infty$, $R_2 = R$ равенъ радіусу кривизны меридіана OCB въ точкѣ D. Равенство двухъ давленій въ точкѣ D даетъ

$$K + H + y\delta = K + H + \frac{\alpha}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

или

$$y = \frac{\alpha}{\delta} \cdot \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Для кривизны $\frac{1}{R}$ имѣемъ

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} : \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Вставляя это въ (31), получаемъ по умноженіи на $dy = \frac{dy}{dx}dx$

$$ydy = \frac{\alpha}{\delta} \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}dx}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha}{\delta} d\left\{ \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Проведемъ въ D касательную DE, и пусть $\angle\, DEx = \varphi$; тогда $tg\varphi = \frac{dy}{dx}$ и слѣд.

$$y\,dy = -\frac{\alpha}{\delta} d\cos\varphi$$

Изъ двухъ знаковъ слѣдуетъ взять $(-)$, ибо при $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $d\cos\varphi < 0$.

Интегрируя получаемъ

$$\int_0^y y\,dy = -\frac{\alpha}{\delta}\int_0^\varphi d\cos\varphi$$

или

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= \frac{2\alpha}{\delta}(1 - \cos\varphi) \\ y &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}\sqrt{1 - \cos\varphi} \\ y &= \sqrt{a^2}\sqrt{1 - \cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Для точки C, въ которой вертикальная плоскость касается края капли, имѣемъ $\varphi = 90$, и слѣд. для ея ординаты $CF = y_0$ имѣемъ

$$y_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}} = \sqrt{a^2} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

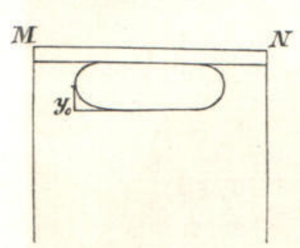
Не трудно обобщить этотъ результатъ: вертикальное разстояніе двухъ элементовъ поверхности жидкости, изъ которыхъ одинъ горизонталенъ, другой вертикаленъ, равно корню

квадратному изъ капилярной постоянной жидкости. Теперь понятно, почему мы при выводѣ (28) положили $h = a$. Формула (33) даетъ

$$\left.\begin{aligned} a &= y_0 \\ \alpha &= \frac{\delta y_0^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Рис. 300 относится къ случаю капли, не смачивающей поверхности твердаго тѣла MN; легко понять, что (34) должно относиться и къ случаю пузыря воздуха, помѣщеннаго въ жидкости подъ какою-либо пластинкою MN (рис. 301).

Рис. 301.



Для измѣренія разстоянія $CF = y_0$, Lippmann помѣщаетъ въ L свѣтящуюся точку и устанавливаетъ трубку катетометра на фокальную свѣтлую линію, видную около C, какъ въ выпукломъ зеркалѣ. Ошибка въ установкѣ L на 1 мм. въ вертикальномъ направленіи влечетъ за собою перемѣщеніе фокальной линіи всего въ 0,001 мм. Quincke произвелъ многія опредѣленія величины α по изложенному здѣсь способу лежачихъ капель и воздушныхъ пузырей. Н. Кастеринъ пользовался небольшими каплями, для которыхъ онъ развилъ теорію болѣе точную, чѣмъ та приближенная, которая лежитъ въ основаніи разсмотрѣннаго здѣсь метода Quincke.

VII. Измѣреніе α для жидкостей, находящихся въ пластинчатомъ состояніи. Изъ различныхъ способовъ укажемъ только на тотъ, который основанъ на формулѣ (19) стр. 467. Измѣряя радіусъ и внутреннее давленіе пузыря (напр. мыльнаго) находимъ α.

VIII. Измѣреніе натяженія $\alpha_{1,2}$ на границѣ двухъ срединъ. Способъ VI непосредственно прилагается и здѣсь. Положимъ, что надъ каплей AOB рис. 300 находится другая жидкость, или что на рис. 301 мы имѣемъ не пузырь воздуха, но каплю жидкости, плавающей въ другой жидкости. Въ такомъ случаѣ (30) замѣняется формулой

$$K + H + y(\delta_1 - \delta_2) = K + H + \frac{\alpha_{1,2}}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

гдѣ δ_1 и δ_2 плотности двухъ жидкостей и $\delta_1 > \delta_2$. Очевидно, что (35) даетъ намъ вмѣсто (34) теперь формулу

$$\alpha_{1,2} = \frac{y_0^2}{2}(\delta_1 - \delta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Этимъ способомъ Quincke опредѣлялъ величину $\alpha_{1,2}$ для различныхъ сочетаній двухъ жидкостей. Приводимъ нѣкоторыя изъ чиселъ, которыя онъ получилъ для натяженія $\alpha_{1,2}$.

	α_1	α_2	$\alpha_{1,2}$
Ртуть-вода	55,03	8,25	42,58
Ртуть-алкоголь . . .	55,03	2,60	40.71
Ртуть-хлороформъ . .	55,03	3,12	40,71
Ртуть-CS_2	55,03	3,27	37,97
Ртуть-оливковое масло .	55,03	3,76	34,19
Вода-CS_2	8,25	3,27	4,26
Вода-хлороформъ . . .	8,25	3,12	3,01
Вода-оливковое масло .	8,25	3,76	2,09.

Величина $\alpha_{1,2}$ иногда быстро убываетъ послѣ приведенія жидкостей въ соприкосновеніе; это объясняется образованіемъ слоя, содержащаго смѣсь жидкостей.

IX. Измѣреніе краевого угла θ. Краевой уголъ θ можетъ быть измѣренъ непосредственно способомъ, аналогичнымъ способу измѣренія двугранныхъ угловъ кристалловъ (стр. 277), т. е. наблюдая отраженіе луча отъ краеваго элемента жидкости. Уголъ θ можетъ быть также вычисленъ изъ наблюденій надъ высотой h мениска или надъ высотой H большой плоской капли.

Еслибы KD на рис. 300 изображало вертикальную стѣнку, то мы имѣли бы $KD = h$ и $\theta = 180^0 - \angle EDK = 180^0 - (90^0 - \varphi) = 90^0 + \varphi$ и слѣд. $\varphi = \theta - 90^0$. Формула (32) дала бы

$$h = a\sqrt{1 - \sin\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Для точки B имѣемъ $y = H$ и $\varphi = \theta$, слѣд.

$$H = a\sqrt{1 - \cos\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Уравненія (37) и (38) даютъ a^2 и θ. Для ртути получается $\theta = 138^0$.

Кромѣ перечисленныхъ здѣсь, существуютъ и другіе способы опредѣленія величинъ α и a^2, напр. интересный способъ Sentis'а для ртути, на поверхности которой онъ заставлялъ плавать желѣзную призму. По величинѣ углубленія, вызваннаго призмою, онъ могъ вычислить величины α и a^2.

§ 11. Дальнѣйшіе результаты измѣренія α и a^2. Роль температуры. Мы уже привели нѣкоторыя числовыя значенія величинъ α и a^2. Укажемъ еще на нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія изъ этихъ чиселъ, а также на нѣкоторые дальнѣйшіе результаты.

Рис. 302.

Таблица на стр. 486 показываетъ, что натяженіе хлороформа больше натяженія эфира, но меньше натяженія воды. Плотность хлороформа 1,52, а эфира 0,74. Если въ изогнутую трубку (рис. 302) налить хлороформъ AB и на него воду BC и эфиръ AD, то въ B образуется выпуклый, въ A вогнутый менискъ.

Quincke и др. опредѣляли α и a^2 для растворовъ солей и кислотъ въ водѣ и алкоголѣ. Оказывается, что натяженіе α растетъ для многихъ растворовъ приблизительно пропорціонально числу y эквивалентовъ соли, растворенныхъ въ 100 эквивалентахъ воды. Такъ для раствора $NaCl$

$$\alpha = 7{,}36 + 0{,}157y.$$

Вопросомъ о поверхностномъ натяженіи и капилярныхъ свойствахъ растворовъ занимались Sentis, Казанкинъ, Klupathy и др.

Увеличеніемъ натяженія объясняется ползучесть солей: растворъ, поднявшійся по стѣнкѣ сосуда, испаряется, дѣлается гуще и пріобрѣтаетъ большее натяженіе, вслѣдствіе чего онъ притягиваетъ свѣжій растворъ и т. д.

Съ повышеніемъ температуры уменьшаются α и a^2. Приводимъ числа изъ наблюденій Brunner'a, Wolf'a и друг.

t^0	Вода.		Алкоголь.		Эфиръ.	
	a^2 кв. мм.	$\alpha \frac{\text{мгр.}}{\text{мм.}}$	a^2 кв. мм.	$\alpha \frac{\text{мгр.}}{\text{мм.}}$	a^2 кв. мм.	$\alpha \frac{\text{мгр.}}{\text{мм.}}$
0^0	15,41	7,92	6,062	2,585	5,434	1,971
20^0	14,84	7,57	5,776	2,409	4,916	1,737
35^0	14,42	7,30	5,562	2,277	4,526	1,562
60^0	13,71	6,84	5,204	2,057		
75^0	13,29	6,55	4,948 (78^0)	1,898		
90^0	12,86	6,25				
100^0	12,58	6,04				

Новѣйшія изслѣдованія Volkmann'a дали для воды:

$t=$	0^0	5^0	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0	40^0
$a^2=$	15,387	15,266	15,109	14,969	14,833	14,694	14,552	14,41	14,29.

Далѣе

	Бензолъ.	Анилинъ.	Толуолъ.
$t=12{,}5^0$	6,864	8,87	6,813
$t=17{,}5^0$	6,739	8,78	6,719.

Н. Кастеринъ изслѣдовалъ поверхностное натяженіе эфира при высокихъ температурахъ, а также вообще зависимость сцѣпленія жидкостей отъ температуры. Между прочимъ онъ нашелъ, что съ повышеніемъ температуры сцѣпленіе жидкости убываетъ быстрѣе квадрата плотности.

Для многихъ жидкостей α и a^2 выражаются линейными функціями температуры

$$\alpha = \alpha_0(1-\beta t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$a^2 = a_0^{\ 2}(1-\gamma t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Б. Вейнбергъ находитъ для воды $\beta = 0{,}002254$, $\gamma = 0{,}001975$ для t отъ 0^0 до 70^0. Hall находитъ для воды

$$\alpha = 7{,}700\,(1-0{,}00185\,t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Для эфира по Бруннеру

$$a^2 = 5{,}35(1-0{,}00525t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41,a)$$

Съ повышеніемъ температуры a^2 стремится къ нулю и при нѣкоторой температурѣ $t = t_1$, которая опредѣляется равенствомъ

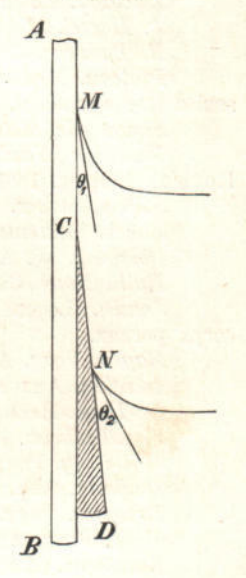
$$t_1 = \frac{1}{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

имѣемъ $a^2 = 0$; жидкость въ капилярной трубкѣ вовсе не поднимается и между ея частицами исчезаетъ то особое сцѣпленіе, которое характерно для жидкаго состоянія; она перестаетъ отличаться отъ газа. На стр. 358 мы назвали эту температуру критическою; и дѣйствительно для эфира (41,a) и (42) даютъ $t_1 = 191°$, что вполнѣ согласно съ непосредственными наблюденіями критической температуры эфира (193°). Для воды получается $t_1 = 332°$ (вмѣсто 365°) и т. д.

§ 12. О величинѣ радіуса ρ сферы частичнаго дѣйствія. Разсмотримъ нѣкоторыя попытки опредѣленія величины ρ.

На стр. 468 мы уже упомянули, что Plateau на основаніи наблюденій толщины мыльно-глицериноваго пузыря вывелъ, что ρ не болѣе 0,06 микрона, что приблизительно равно 0,1 длины волны желтаго свѣта.

Рис. 303.



Quincke опредѣлилъ ρ слѣдующимъ способомъ: онъ покрывалъ стеклянную пластинку AB (рис. 303) тонкимъ клинообразнымъ слоемъ серебра CD, опускалъ ее до разныхъ глубинъ въ воду, и измѣрялъ краевой уголъ θ. Въ M. на чистомъ стеклѣ получалось одно значеніе θ_1 угла, въ N при достаточно толстомъ слоѣ серебра другое значеніе θ_2. Начиная отъ C внизъ, краевой уголъ постепенно переходилъ отъ θ_1 до θ_2, принимая промежуточныя значенія, что доказываетъ наличность вліянія массы стекла черезъ слой серебра Quincke опредѣлялъ толщину слоя серебра въ томъ мѣстѣ, въ которомъ краевой уголъ принималъ постоянное значеніе θ_2; эта толщина и должна равняться искомому ρ. Вмѣсто воды онъ бралъ и ртуть, причемъ серебро было замѣнено коллодіумомъ, AgJ или Ag_2S. Quincke находитъ ρ близкимъ къ 0,05 микрона и только для стекло-коллодіумъ—ртуть получаетъ $\rho = 0,08$ микрона.

Въ таблицахъ XI, XII и XIII, въ концѣ этой книги, помѣщены числовыя значенія величинъ a^2 и α для различныхъ жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА.

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНІЕ И ВОЛОСНОСТЬ.

Исторія: Gehler, Physikal. Wörterb. II, Capillarität.
Jurin. Phil. Trans. 30 № 355, 363, 759, 1083 (1718 г.).
Young. Phil. Trans. 1805, I p. 65. Lectures on natural philosophy. II, p. 649, 1807.
Laplace. Supplem. au X livre du Traité de mécanique céléste. Oeuvres, T. IV, p. 389.

Gauss. Principia generalia и т. д. Сочиненія, Т. 5, стр. 9. (Изд. 1867 г.).
Poisson. Nouvelle théorie de l'action capillaire.
Weinstein. (Сравненіе теорій). Wied. Ann. 27 p. 544, 1886.
Stahl. Pogg. Ann. 139 p. 239, 1870.
Quet. Progrés de la capillarité. Paris. 1867.
Segner. Commentationes Soc. sc. Goettingensis. I, 1752.
Bertrand. Journ. dè Liouville. 13, 1832; 9, p. 117, 1844.
Van der Mensbrugghe. Bull. de l'Acad. de Belgique (2) 22 p. 272, 1866; 39 p. 375, 1875; (3) 11 p. 338, 1886; 24 p. 343, 1892; 25 p. 233, 1893; 26 p. 37, 1893. Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles. T. 18, 1 partie. Mém. couronnés de l'Acad. de Belg. 34, 1869. C. R. 115 p. 1059; 121 p. 461.
Mellberg. Om Ytspänningen hos vätskor. Helsingfors. 1871.
Worthington. Phil. Mag. (5) 18 p. 334, 1884.
Quincke. Pogg. Ann. 134 p. 356, 1868; 135 p. 621, 1868; 137 p. 402, 1869; 139 p. 1, 1870; 160 p. 371, 1877; Ann. d. chem. et phys. (4) 16 p. 502, 1869. W. A. 27 p. 222, 1886; 52 p. 1, 1894.
Б. Срезневскій. Сцѣпленіе водныхъ растворовъ хлористаго цинка. Ж. Ф. Х. О. 13 стр. 242, 1881.
Duclaux. Théorie élém. de la capillarité. Paris. 1872.
P. Hersel. Methoden zur Bestimmung der Oberflächenspannung. Iserlohn. 1893.
И. Громека. Къ теоріи капилярныхъ явленій. Казань. 1886.
Plateau. Mém. de l'Acad. de Belg. 1843—1863. Statique des liquides soumis aux seules forces molécul. Gand et Paris. 1873.
Simon (de Metz). C. R. 12 p. 892 (1841); Ann. ch. et phys. (3) 32 p. 5, 1851.
Van der Waals. Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. (Переводъ Roth'a). Leipzig. 1881 p. 103.
Stefan. Stsber. Wien. Acad. 94, II, 1886; W. A. 29 p. 655, 1886.
Бойсъ. Мыльные пузыри. (C. V. Boys, Seifenblasen. Нѣмецк. пер. Leipzig. 1893).
Oberbeck. W. A. 11 p. 634, 1880.
Roiti. Nuov. Cim. (3) 3, 1878. (Beibl. 1878 p. 381).
Jamin. Leçons sur les lois de l'équilibre et du mouvement des liquides dans les corps poreux.
Hagen. Pogg. Ann. 67 p. 1, p. 170, 1846.
Désains. Ann. ch. et phys. 51 p. 385, 1832.
De-Heen. Recherches touchant la phys. comparée. Paris. 1888 p. 77.
Frankenheim. Die Lehre von der Cohaesion. Breslau. 1835. Pogg. Ann. 72 p. 177, 1847.
Wilhelmy. Pogg. Ann. 119 p. 186, 1863; 121 p. 44; 122 p. 1; 1864.
Duclaux. Ann. ch. et phys. (4) 21 p. 386, 1870.
Brunner. Pogg. Ann. 70 p. 485, 1847.
Wolf. Pogg. Ann. 98 p. 643, 1856; 101 p. 550; 102 p. 571, 1857.
Вейнбергъ. Ztschr. phys. Ch. X p. 34, 1892; Ж. Ф. Х. О. 24, стр. 13 и 44, 1892. (Содержитъ подробное указаніе литературы по вопросу объ опредѣленіи величинъ α и a^2).
Казанкинъ. Капилярныя свойства соляныхъ растворовъ. Казань. 1893.
Кастеринъ. Объ измѣненіи сцѣпленія жидкостей съ температурой. Ж. Ф. Х. О. 24, Отд. физ., стр. 196, 1892; 25, стр. 51, стр. 203, 1893.
Lord Rayleigh. Phil. Mag. (5) 33 p. 363, 1892.
Eötvös. W. A. 27 p. 448, 1886.
Hall. Phil. Mag. (5) 36 p. 385, 1893.
Sentis. C. R. 118 p. 1132, 1894; J. de phys. (2) 6 p. 571, 1887; 9 p. 384, 1890.
Volkmann. Wied. Ann. 11 p. 187, 1880; 56 p. 457, 1895.
Marangoni. J. de phys. (3) 2 p. 68, 1893.
Klupathy. Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn. 5 p. 101, 1887; Beibl. 12 p. 750, 1888.
Пильчиковъ. Ж. Ф. Х. О. 20, Отд. Физ., стр. 83, 1888.
Sohncke. W. A. 40 p. 344, 1890.

Verschaffelt. Zittingsverslag. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam. 1895—1896, p. 74; Beibl. 20 p. 343, 1896.

Краевичъ. Ж. Ф. Х. О. 7 стр. 129, 1875.

Казанкинъ. Подъемъ водныхъ растворовъ въ капилярныхъ трубкахъ. Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 122, 1891.

Казанкинъ. Капилярныя постоянныя насыщенныхъ растворовъ. Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 468, 1891.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Растворы твердыхъ и жидкихъ тѣлъ.

§ 1. Общiя замѣчанiя о растворахъ. Когда твердое тѣло находится въ соприкосновенiи съ жидкостью, то оно, или часть его, также переходитъ въ жидкое состоянiе, и образуетъ съ данною жидкостью однообразную смѣсь, называемую раствором ъ. Количество твердаго вещества, могущее раствориться въ данномъ количествѣ жидкости, имѣетъ предѣлъ, зависящiй отъ рода взятыхъ двухъ веществъ, отъ температуры, давленiя и вообще отъ физическихъ условiй, при которыхъ совершается растворенiе. Когда этотъ предѣлъ достигнутъ, то говорятъ, что растворъ насыщенъ.

Понятiе о растворимости, къ сожалѣнiю, до сихъ поръ опредѣляется двояко, отъ чего легко происходятъ недоразумѣнiя. Растворимостью или коеффицiентомъ растворимости называютъ:

1. Вѣсовое количество S вещества, могущее раствориться въ 100 вѣсовыхъ частяхъ растворителя (воды, алкоголя и т. д.).

2. Вѣсовое количество P вещества, которое содержится въ 100 вѣсовыхъ частяхъ насыщеннаго раствора.

Связь между S и P легко найти; если S частей вещества заключаются въ 100 частяхъ растворителя, то онѣ же содержатся въ $100 + S$ частяхъ раствора, а потому въ 100 частяхъ раствора имѣемъ

$$P = \frac{100S}{100+S} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

частей растворѐннаго вещества. Наоборотъ

$$S = \frac{100P}{100-P} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Коеффицiентъ S чаще дается; онъ можетъ мѣняться отъ нуля до какихъ угодно чиселъ. Коеффицiентъ P не можетъ достигнуть предѣльнаго значенiя 100, которое соотвѣтствовало-бы безконечной растворимости ($S = \infty$).

Когда рѣчь идетъ о ненасыщенныхъ растворахъ, то ихъ составъ опредѣляется величинами s и p, имѣющими тѣ же значенiя, какъ S и P (максима отъ s и p), и связанными тѣми же равенствами (1) и (2). Въ рѣдкихъ

случаяхъ растворимость опредѣляется не вѣсовыми, но объемными соотношеніями растворителя, растворимаго и раствора.

При соприкосновеніи двухъ жидкостей, не смѣшивающихся во всѣхъ пропорціяхъ, также образуются растворы.

Вѣроятно всякое вещество растворяется, хотя бы въ нѣкоторомъ количествѣ, во всякой жидкости. Когда это количество весьма мало или вовсе не поддается опредѣленію, то говорятъ о нерастворимости одного вещества въ другомъ.

Раствореніе представляетъ явленіе крайне сложное и въ немъ играетъ роль цѣлый рядъ различныхъ факторовъ. Вопросъ о растворахъ составляетъ въ настоящее время одинъ изъ главныхъ отдѣловъ обширной науки, развившейся подъ названіемъ физической химіи. Основатели этой науки суть: Д. И. Менделѣевъ, Ostwald, Arrhenius, Raoult, van't Hoff, Nernst, Pfeffer и другіе. Этой наукѣ спеціально посвящены обширные учебники, и для ея преподаванія назначаются отдѣльныя лекціи и даже особыя каѳедры при университетахъ. Здѣсь, въ курсѣ физики, мы ограничиваемся краткимъ указаніемъ на нѣкоторыя важнѣйшія стороны ученія о растворахъ.

Когда твердое вещество растворяется, то оно прежде всего переходитъ въ жидкое состояніе, а затѣмъ распространяется по всей массѣ растворителя. Переходъ изъ одного состоянія въ другое, а также расширеніе вещества сопровождаются затратою работы, обыкновенно на счетъ тепловой энергіи самихъ веществъ. Поэтому раствореніе весьма часто сопровождается охлажденіемъ.

При раствореніи играетъ большую, можетъ быть и первенствующую роль химизмъ, и притомъ его проявленія разнообразны. Во-первыхъ, на самый растворъ во многихъ случаяхъ можно смотрѣть, какъ на своего рода непрочное химическое соединеніе между растворителемъ и растворимымъ. Измѣненіе плотности раствора, о которомъ ниже будетъ сказано, можетъ служить прямымъ указаніемъ на то, что раствореніе не должно быть разсматриваемо, какъ простое смѣшеніе растворителя съ ожиженнымъ твердымъ веществомъ. Раствореніе въ водѣ солей, кислотъ и т. д. можетъ, далѣе, сопровождаться распаденіемъ, или образованіемъ въ растворѣ различныхъ гидратовъ. Наконецъ, и это одна изъ самыхъ интересныхъ сторонъ ученія о растворахъ, въ настоящее время цѣлая школа ученыхъ придаетъ огромное значеніе диссоціаціи (стр. 427) раствореннаго вещества. Предполагается, что въ слабыхъ растворахъ почти всѣ молекулы раствореннаго вещества диссоціированы, т.-е. разложены на составныя части, а именно на тѣ, которыя выдѣляются изъ раствора на электродахъ при пропусканіи черезъ него электрическаго тока, и которыя называются іонами. Къ ученію о свободныхъ іонахъ намъ придется еще часто возвращаться. Замѣтимъ вообще, что мы не намѣреваемся въ этой главѣ собрать все, что касается растворовъ; на кое-что уже раньше было нами указано, какъ напр. на сжимаемость растворовъ (стр. 449) и на ихъ поверхностное натяженіе (стр. 491). Въ послѣдующихъ отдѣлахъ мы познакомимся еще съ нѣкоторыми ихъ свой-

ствами, напр. со свойствами оптическими, тепловыми и, въ особенности, съ ихъ электропроводностью.

Нѣкоторыя свойства растворовъ, будучи выражены численными величинами, оказываются такими, каковыми ихъ можно было бы ожидать, если считать растворъ за простую смѣсь двухъ веществъ. Такія свойства Ostwald предложилъ называть «аддитивными».

§ 2. Отдѣленіе растворителя отъ растворимаго и обратно. Существуютъ три способа для разъединенія частей раствора.

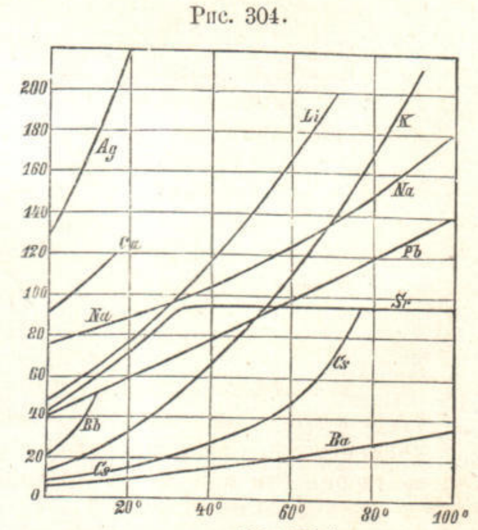
1. Нагрѣваніе раствора, причемъ жидкій растворитель переходитъ въ парообразное состояніе, и въ отдѣльности можетъ быть полученъ при охлажденіи, если только растворенное вещество нелетуче, т.-е. при нагрѣваніи само не превращается въ пары. Если же и растворенное вещество при нагрѣваніи испаряется, но имѣетъ другую точку кипѣнія, чѣмъ растворитель (напр. алкоголь и вода), то болѣе или менѣе полное раздѣленіе раствора достигается многократною фракціонированною перегонкою, причемъ перегнанное вещество съ каждою новою перегонкою дѣлается все богаче тою составною частью, точка кипѣнія которой ниже.

2. Охлажденіе раствора. При охлажденіи крѣпкаго раствора какого-либо вещества въ жидкости это вещество вообще выдѣляется, и притомъ весьма часто въ кристаллическомъ видѣ; при охлажденіи слабыхъ растворовъ въ водѣ вообще выдѣляется чистый ледъ. Къ этому интересному явленію мы возвратимся въ ученіи о теплотѣ.

3. Добавленіе къ раствору третьяго вещества, не могущаго служить растворителемъ, весьма часто приводитъ къ выдѣленію части растворепнаго вещества.

§ 3. Зависимость растворимости отъ температуры. Съ повышеніемъ температуры растворимость вообще увеличивается; изъ этого правила существуютъ однако исключенія. Многіе ученые выражали растворимость эмпирическими функціями температуры, причемъ опять-таки нѣкоторые дали формулы для S, другіе для P. Нагляднѣе всего изображается зависимость растворимости отъ температуры кривыми линіями. Такъ на рис. 304 изображена эта зависимость для азотнокислыхъ солей *Ag, Ca, Na, Li, Sr, Pb, Rb, K, Cs* и *Ba*. На оси абсциссъ отложены температуры, на оси ординатъ величины S, т.-е. вѣсовыя количества соли, растворяющіяся въ 100 частяхъ воды. Мы видимъ изъ этихъ кривыхъ напр., что особенно правильно возростаетъ съ температурою растворимость $Pb(NO_3)_2$; что при низкихъ температурахъ $NaNO_3$ болѣе растворима, чѣмъ $LiNO_3$ и KNO_3,

Рис. 304.



а при болѣе высокихъ она растворяется менѣе, чѣмъ послѣднія двѣ соли; мы видимъ, что особенно быстро возростаетъ растворимость KNO_3 съ температурой, и что растворимость $Sr(NO_3)_2$ представляетъ странную особенность: она растетъ отъ 0° примѣрно до 33°, и затѣмъ дѣлается почти постоянною.

Изъ солей, растворимость которыхъ въ водѣ графически изображается линіей, мало уклоняющейся отъ прямой, и для которыхъ поэтому S выражается линейною функціею температуры, укажемъ на слѣдующія:

$$\begin{array}{rll} BaCl_2 & \ldots & S = 30{,}62 + 0{,}2711\,t \\ KCl & \ldots & S = 28{,}5 + 0{,}29\,t \\ K_2SO_4 & \ldots & S = 8{,}36 + 0{,}1741\,t \\ KBr & \ldots & S = 54{,}43 + 0{,}5128\,t \\ KJ & \ldots & S = 126{,}23 + 0{,}8088\,t. \end{array}$$

Для другихъ солей получаются вообще болѣе сложныя эмпирическія формулы. Укажемъ напр. на формулу Д. И. Менделѣева для растворимости KNO_3 въ водѣ:

$$S = 13{,}3 + 0{,}574\,t + 0{,}01717\,t^2 + 0{,}0000036\,t^3.$$

Nordenskjoeld далъ цѣлый рядъ эмпирическихъ формулъ вида

$$lg S = a + b\left(\frac{t}{100}\right) + c\left(\frac{t}{100}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

напр.

$$Ba(NO_3)_2 \ldots lg S = 0{,}7207 + 1{,}2495\left(\frac{t}{100}\right) - 0.4307\left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Étard выразилъ P для опредѣленнаго промежутка температуръ отъ t_1^0 до t_2^0 эмпирическими формулами, въ которыхъ $\vartheta = t - t_1$. Приводимъ нѣкоторые примѣры:

$$\begin{array}{lll} CaCl_2 & \ldots & P_{50^0-170^0} = 54{,}5 + 0{,}0755\,\vartheta \\ AgNO_3 & \ldots & P_{55^0-198^0} = 81{,}0 + 0{,}1328\,\vartheta \\ ZnSO_4 & \ldots & P_{(-5^0)-81^0} = 27{,}6 + 0{,}2604\,\vartheta. \end{array}$$

Для нѣкоторыхъ веществъ растворимость съ повышеніемъ температуры сперва увеличивается, достигаетъ максимума, и затѣмъ опять уменьшается. Сюда относится сода; $Na_2CO_3 + 10H_2O$ имѣетъ максимумъ растворимости при 38°, а именно $S = 1142{,}17$; для безводной соли имѣемъ

t^0	10°	20°	30°	32°,5	34° до 79°	100°
S	12,6	21,4	38,1	59,0	46,2	45,4.

Примѣръ неправильнаго измѣненія растворимости съ температурою представляетъ желѣзный купоросъ $FeSO_4+7H_2O$, для котораго Etard даетъ формулы

$$P_{(-2)^0-65^0}=13,5+0,3784\vartheta$$

$$P_{65^0-98^0}=38,8$$

$$P_{98^0-156^0}=38,8-0,6685\vartheta$$

$$P_{156^0}=0.$$

$3CdSO_4+8H_2O$ имѣетъ максимумъ растворимости при 68°; $MnSO_4$ при 57°; $ZnSO_4$ (безводный) при 81°.

Замѣчательно мало мѣняется растворимость $NaCl$ въ зависимости отъ температуры:

$t^0=$	-15^0	0^0	40^0	80^0	100^0
$S=$	32,73	35,52	36,64	38,22	40,35.

Для промежутка отъ 0° до 10° Д. И. Менделѣевъ даетъ формулу

$$S=35,7+0,024t+0,0002t^2.$$

Для тростниковаго сахара имѣемъ

t^0	0^0	25^0	50^0	75^0	100^0
S	179,2	211,4	260,4	339,9	487,2
P	64,18	67,89	72,25	77,27	82,97.

Въ 1894 г. появилось обширное изслѣдованіе Etard'а о растворимости большого числа различныхъ солей въ водѣ и въ цѣломъ рядѣ органическихъ жидкостей. Мы не можемъ останавливаться на интересныхъ результатахъ этого изслѣдованія.

Растворимость веществъ, весьма мало растворяющихся въ водѣ, изслѣдовали F. Kohlrausch и Rose, а также Hollemann. Приводимъ нѣкоторые изъ результатовъ, найденныхъ послѣднимъ изъ названныхъ ученыхъ. Одна вѣсовая часть соли растворяется въ N частяхъ воды:

	N	t^0
$BaSO_4$ . . .	429700 . . .	18°,4
$AgBr$ . . .	1971650 . . .	20°,2
AgJ . . .	1074040 . . .	28°,4
$BaCO_3$ . . .	64070 . . .	8°,8
$SrCO_3$ . . .	121760 . . .	8°,8
$CaCO_3$ . . .	99500 . . .	8°,7.

Растворимость веществъ въ различныхъ органическихъ растворителяхъ изслѣдовалъ также В. Тимоѳеевъ.

§ 4. Раствореніе въ смѣсяхъ нѣсколькихъ жидкостей и растворимость смѣсей въ одной жидкости. Если къ раствору прилить жидкость, плохо растворяющую данное вещество, то часть этого вещества выдѣляется; напр. если прилить алкоголь ко многимъ растворамъ солей въ водѣ. Вообще можно сказать, что растворимость въ смѣси жидкостей меньше суммы растворимостей вещества въ отдѣльныхъ жидкостяхъ. На это уже было указано въ § 2, III стр. 497. Вопросомъ о распредѣленіи вещества между двумя смѣшанными (напр. взбалтываніемъ) жидкостями занимались Berthelot и Joungfleisch, Hoff, Rikke, Aulich, Nernst и Яковкинъ. Послѣдній изучалъ раствореніе J и Br въ смѣсяхъ воды и CS_2, воды и $CHBr_3$, воды и CCl_4.

Bodländer занимался интереснымъ вопросомъ о растворимости данной соли въ смѣси такихъ двухъ жидкостей, изъ которыхъ только одна растворяетъ эту соль въ значительномъ количествѣ. Онъ находитъ, что вещество, нерастворимое въ алкоголѣ, растворяется въ смѣси воды и алкоголя въ количествѣ, пропорціональномъ кубу процентнаго содержанія воды въ растворѣ. Точно также растворимость нѣсколькихъ солей въ одной жидкости меньше суммы растворимостей отдѣльныхъ частей смѣси. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ образуются растворы, въ которыхъ количества растворенныхъ веществъ находятся въ опредѣленномъ отношеніи. Сюда относятся KNO_3 и $Pb(NO_3)_2$; Na_2SO_4 и $CuSO_4$; $NaCl$ и $CuCl_2$; KJ и KCl; $NaCl$ и KCl, NH_4Cl или $NaNO_3$.

Другія соли вытѣсняютъ другъ друга изъ растворовъ, такъ что можно получить насыщенные растворы съ различнымъ относительнымъ содержаніемъ солей.

§ 5. Пересыщенные растворы. Если медленно охлаждать насыщенный растворъ, то во многихъ случаяхъ растворенное вещество изъ него не выдѣляется, несмотря на то, что по содержанію въ растворѣ оказывается гораздо болѣе этого вещества, чѣмъ соотвѣтствуетъ насыщенію при новой, болѣе низкой температурѣ. Такой растворъ называется пересыщеннымъ. Особенно хорошо это явленіе удается обнаружить, если растворить 4 части Na_2SO_4 въ 1 части кипящей воды и медленно охладить растворъ, который можно довести до того, что онъ будетъ содержать въ 8 разъ больше соли, чѣмъ соотвѣтствовало бы непосредственному его насыщенію при достигнутой температурѣ. Соль быстро начинаетъ выдѣляться, когда въ растворъ попадетъ малѣйшая крупинка соли $Na_2SO_4 + 10H_2O$. Эта соль содержится въ пыли, носящейся въ комнатномъ воздухѣ, и потому пересыщенный растворъ довольно быстро кристаллизуется на открытомъ воздухѣ. Въ запаянномъ сосудѣ или при доступѣ только очищеннаго воздуха пересыщенный растворъ можетъ сохраняться весьма долго. Loewel и Gernez выяснили механизмъ образованія этихъ пересыщенныхъ растворовъ. Дѣло въ томъ, что слѣдуетъ отличать три соли: безводную Na_2SO_4 и соли $Na_2SO_4 + 7H_2O$ и $Na_2SO_4 + 10H_2O$, которыя обладаютъ различною растворимостью, а именно соль съ 7-ью паями воды болѣе растворима, чѣмъ соль, содержащая $10H_2O$. При охлажденіи насыщеннаго раствора $Na_2SO_4 + 10H_2O$ часть соли переходитъ въ $Na_2SO_4 + 7H_2O$. Прибавка къ раствору кристалла послѣдней

соли не вызываетъ выдѣленія растворенной соли, которое немедленно начинается въ присутствіи малѣйшей частицы $Na_2SO_4+10H_2O$.

Вообще выдѣленіе соли изъ пересыщеннаго раствора вызывается присутствіемъ твердой частицы той же соли или другой, съ ней изоморфной (см. Отдѣлъ шестой, Гл. 1), т.-е. кристаллизующейся въ одинаковой съ ней формѣ. Такъ напр. $Na_2SO_4+10H_2O$ заставляетъ кристаллизоваться пересыщенный растворъ $Na_2Cr_2O_7+10H_2O$.

Существуютъ соли, которыя могутъ кристаллизоваться въ двухъ формахъ, незначительно разнящихся другъ отъ друга; однако растворы этихъ двухъ разновидностей одного и того же вещества отличаются другъ отъ друга своими оптическими свойствами: одинъ вращаетъ плоскость поляризаціи свѣта (см. Томъ II, Глава семнадцатая) направо, другой налѣво. Если въ пересыщенный растворъ, содержащій обѣ разновидности, бросить кристаллъ одной изъ нихъ, то изъ раствора выдѣляются кристаллы только этого же рода вещества, между тѣмъ какъ соль другого рода остается въ растворѣ. Быстрое выдѣленіе вещества изъ пересыщеннаго раствора сопровождается иногда весьма значительнымъ развитіемъ тепла.

§ 6. Плотность растворовъ. Раствореніе почти всегда сопровождается сгущеніемъ вещества, т.-е. объемъ раствора меньше суммы объемовъ растворителя и растворённаго вещества. Д. И. Менделѣевъ посвятилъ этому вопросу обширное сочиненіе, озаглавленное «Изслѣдованіе водныхъ растворовъ по удѣльному вѣсу» С.-Петербургъ 1887 г., къ которому и отсылаемъ читателей, желающихъ ближе ознакомиться съ этимъ интереснымъ вопросомъ.

Сжатіемъ называется относительное уменьшеніе объема при раствореніи. Если v_1 объемъ жидкости, v_2 объемъ растворяемаго вещества и V объемъ раствора, то сжатіе k равно

$$k=\frac{v_1+v_2-V}{v_1+v_2}=1-\frac{V}{v_1+v_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Если соотвѣтствующія вѣсовыя количества суть p_1, p_2 и P, а плотности d_1, d_2 и D, то $v_1=\frac{p_1}{d_1}$, $v_2=\frac{p_2}{d_2}$ и $V=\frac{P}{D}$, такъ что

$$k=1-\frac{\frac{P}{D}}{\frac{p_1}{d_1}+\frac{p_2}{d_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Wuellner растворилъ 21,522 куб. сант. селитры (44,293 гр.) въ 554,077 куб. сант. воды; объемъ раствора оказался равнымъ 570,838 куб. см., а не $554{,}077+21{,}522=575{,}599$. Отсюда $k=\frac{4{,}761}{575{,}6}=0{,}00827$.

Съ возростаніемъ количества растворённаго вещества сжатіе вообще увеличивается, достигая наибольшаго значенія при нѣкоторомъ опредѣленномъ составѣ раствора. Такъ наибольшее сжатіе раствора $SrCl_2$ въ водѣ соотвѣтствуетъ случаю $S=100$ или $P=50$ (равныя вѣсовыя количества соли и воды). Геричъ находитъ для уменьшенія δ объема воды, получаемаго при

образованіи 100 гр. раствора, содержащаго p процентовъ соли, слѣдующее выраженіе:

$$\delta = C(100-p)p,$$

гдѣ C величина постоянная относительно p, но зависящая отъ температуры.

Наибольшее сжатіе соотвѣтствуетъ $p=50$.

Въ связи съ сжатіемъ находится явленіе нагрѣванія или охлажденія, которое сопровождаетъ разбавленіе растворовъ чистою водою. Если смѣшать равные объемы насыщеннаго раствора и чистой воды, то замѣчается повышеніе температуры для растворовъ KCl, $ZnSO_4$, уксуснокислыхъ солей натрія и цинка, и пониженіе для растворовъ Na_2SO_4, KNO_3, HNO_3 и т. д.

Valson открылъ замѣчательное правило для вычисленія плотности «нормальныхъ» растворовъ, содержащихъ эквивалентныя количества соли въ равныхъ объемахъ воды, а именно 1 граммъ-молекулу въ одномъ литрѣ. Исходною точкою служитъ плотность 1,015 нормальнаго раствора NH_4Cl (53,5 гр. въ 1 литрѣ). Плотность нормальнаго раствора другихъ солей оказывается «аддитивнымъ» свойствомъ (стр. 497), получающимся отъ сложенія частей, зависящихъ отдѣльно отъ металла и отъ кислоты, которымъ соотвѣтствуютъ опредѣленные «модули». Эти модули суть для металловъ:

K	Na	Ca	Mg	Sr	Ba	Mn	Fe	Zn	Cu	Cd	Pb	Ag
30	25	27	20	55	73	37	37	41	42	61	103	105

для кислотъ:

HBr	HJ	H_2SO_4	HNO_3	H_2CO_3
34	64	20	15	14

Эти модули слѣдуетъ прибавить къ третей десятичной числа 1,015, чтобы получить плотность нормальнаго раствора. Такъ напр. плотность нормальнаго раствора $Ca(NO_3)_2$ равна $1{,}015+\frac{27+15}{1000}=1{,}057$. Bender (1883) расширилъ правило Valson'а и для кратно-нормальныхъ растворовъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ раствореніе сопровождается расширеніемъ, т.-е. объемъ раствора больше суммы объемовъ растворителя и раствореннаго. Это явленіе замѣтили впервые для раствора нашатыря въ водѣ Michel и Krafft (1854), а затѣмъ Schiff (1859), Gerlach (1859), Nicol (1883) и Lecoq de Boisbaudran. Обширное изслѣдованіе произвели Schiff и Monsacchi (1896). Они нашли значительное расширеніе при раствореніи NH_4NO_3 въ водѣ (до 4% при 63% растворѣ), въ азотной кислотѣ, въ растворѣ селитры и въ растворѣ нашатыря. Раствореніе-же въ метиловомъ и въ этиловомъ алкоголѣ сопровождается сжатіемъ. Далѣе они нашли расширеніе при раствореніи NH_4Cl, NH_4Br въ водѣ, между тѣмъ какъ раствореніе NH_4J въ водѣ сопровождается сжатіемъ. Нѣкоторыя вещества ($NH_3.OHCl$, $Na_2S_2O_3+5H_2O$) обнаруживаютъ сжатіе у слабыхъ и расширеніе у болѣе крѣпкихъ растворовъ.

§ 7. Обзоръ нѣкоторыхъ дальнѣйшихъ свойствъ растворовъ. Считаемъ не лишнимъ упомянуть о нѣкоторыхъ наиболѣе важныхъ свойствахъ растворовъ, къ которымъ мы отчасти впослѣдствіи еще возвратимся.

I. Давленіе увеличиваетъ растворимость тѣхъ веществъ, раствореніе которыхъ сопровождается сжатіемъ; наоборотъ, когда при раствореніи происходитъ увеличеніе объема ($V > v_1 + v_2$ и слѣд. $k < 0$), то растворимость уменьшается съ возростаніемъ внѣшняго давленія. Этотъ результатъ нашелъ Sorby. Такъ напр. растворимость поваренной соли увеличивается почти на $\frac{1}{2}$%, при давленіи въ 121 атм., а растворимость нашатыря уменьшается болѣе, чѣмъ на 1% при давленіи въ 164 атм.

Braun далъ слѣдующую теоретическую формулу для измѣненія растворимости, вызваннаго увеличеніемъ внѣшняго давленія на одну единицу:

$$\varepsilon = \frac{\eta\varphi}{Q} F,$$

гдѣ ε та масса соли, которая растворяется въ насыщенномъ растворѣ, находящемся подъ давленіемъ p, когда p растетъ на единицу; η та масса соли, которая растворяется въ насыщенномъ растворѣ, когда абсолютная температура T растетъ на 1^0; φ—увеличеніе объема и Q поглощенная теплота (въ механическихъ единицахъ) при раствореніи 1 гр. соли въ почти насыщенномъ растворѣ. E. Stackelberg изслѣдовалъ вліяніе давленія на растворимость $NaCl$, NH_4Cl и квасцовъ.

II. Явленія всасыванія растворовъ нерѣдко сопровождаются выдѣленіемъ раствореннаго вещества. Песокъ и уголь удерживаютъ, при прохожденіи черезъ нихъ растворовъ солей, часть послѣднихъ. Подобное относится къ неклеенной бумагѣ; она быстрѣе всасываетъ воду, чѣмъ растворенныя въ ней соли.

III. Упругость p' пара раствора меньше упругости p пара растворителя. Относительное пониженіе упругости пара равно

$$\frac{p-p'}{p} = \frac{M_0}{M} S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

гдѣ M_0 и M молекулярные вѣса растворителя и раствореннаго вещества; S, какъ и выше, число вѣсовыхъ частей вещества, приходящихся на 100 частей растворителя. Формулу (6) можно написать и такъ

$$\frac{p-p'}{p} = \frac{n}{n+N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

гдѣ n число молекулъ раствореннаго вещества, приходящихся на N молекулъ растворителя.

IV. Температура t' затвердѣванія раствора ниже температуры t затвердѣванія растворителя. Пониженіе $t - t'$ равно

$$t - t' = k\frac{S}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

гдѣ M молекулярный вѣсъ растворенна̀го вещества; S то-же, что и въ предыдущей формулѣ; k постоянный коеффиціентъ, зависящій отъ рода растворителя. Оказывается, что

$$k = 0{,}02\frac{T^2}{w} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

гдѣ T абсолютная температура затвердѣванія растворителя $(t + 273)$ и w скрытая теплота плавленія (одного грамма въ малыхъ калоріяхъ).

V. Теплоемкость растворовъ солей въ водѣ меньше суммы теплоемкостей воды и соли.

VI. Температура наибольшей плотности водныхъ растворовъ лежитъ ниже $+4^0$ Ц., температуры наибольшей плотности чистой воды.

VII. Многія оптическія и электрическія свойства растворовъ, особенно слабыхъ, суть свойства «аддитивныя». Сюда относятся преломляемость, вращеніе плоскости поляризаціи (естественное и электромагнитное), электропроводность и т. д.

§ 8. Взаимное раствореніе жидкостей. Слѣдуетъ отличать три случая, впрочемъ не рѣзко другъ отъ друга разграниченныхъ.

1. Нѣкоторыя жидкости вовсе не растворяются одна въ другой, или, вѣроятнѣе, незамѣтно мало. Сюда относятся напр. вода и масло.

2. Нѣкоторыя жидкости могутъ быть смѣшаны во всѣхъ пропорціяхъ, напр. алкоголь и вода, многія кислоты и вода, хлороформъ и сѣроуглеродъ и т. д.

3. Существуютъ жидкости, растворяющія другъ друга въ опредѣленныхъ количествахъ. Если смѣшать такія двѣ жидкости, взболтать ихъ и дать смѣси отстояться, то она черезъ нѣкоторое время раздѣляется на двѣ части. Внизу собирается болѣе тяжелая жидкость, насыщенная растворенной въ ней другою жидкостью, а наверху насыщенный растворъ болѣе тяжелой жидкости въ болѣе легкой. Такіе два раствора даютъ напр. вода и эфиръ, алкоголь и CS_2.

Взаимное раствореніе жидкостей сопровождается поглощеніемъ или выдѣленіемъ тепла; такъ при смѣшеніи хлороформа и бензина происходитъ повышеніе (на $7^0{,}2$), при смѣшеніи уксуснокислаго эфира съ алкоголемъ пониженіе (на $2^0{,}4$) температуры. Интересный вопросъ объ упругости пара смѣси нѣсколькихъ жидкостей разсмотримъ впослѣдствіи.

Смѣшеніе жидкостей сопровождается иногда весьма значительнымъ уплотненіемъ: объемъ смѣси меньше суммы объемовъ составныхъ частей. Особенный интересъ представляетъ сжатіе, сопровождающее смѣшеніе воды и алкоголя, подробно изслѣдованное Д. И. Менделѣевымъ. Это сжатіе доходитъ до $4{,}15\%$ суммы объемовъ воды и алкоголя для случая смѣшенія 45,88 частей алкоголя и 54,12 частей воды, что соотвѣтствуетъ образованію вещества $C_2H_6O + 3H_2O$. При комнатной температурѣ (около 20^0 Ц.) величина сжатія опредѣляется изъ слѣдующей таблички:

100	объемовъ	воды	+ 0	объемовъ	алкоголя	даютъ	100	объем.	смѣси
90	»	»	+ 10	»	»	»	99,4	»	»
80	»	»	+ 20	»	»	»	98,2	»	»
60	»	»	+ 40	»	»	»	96,6	»	»
50	»	»	+ 50	»	»	»	96,3	»	»
40	»	»	+ 60	»	»	»	96,5	»	»
20	»	»	+ 80	»	»	»	97,4	»	»
10	»	»	+ 90	»	»	»	98,3	»	»
0	»	»	+ 100	»	»	»	100	»	»

Величина сжатія зависитъ отъ температуры, и наибольшее сжатіе соотвѣтствуетъ при различныхъ температурахъ не вполнѣ одинаковымъ смѣсямъ.

ЛИТЕРАТУРА.

Д. И. Менделѣевъ. Изслѣдованіе водныхъ растворовъ по удѣльному вѣсу. Спб. 1887 г.

Nordenskjöld. Pogg. Ann. 136 p. 309, 1869.

Etard. C. R. 98 p. 1432, 1884; 104 p. 1615, 1887; 106 p. 740, 1888; 108 p. 117, 1889; Ann. ch. et phys. (7) 2 p. 503, 1894.

Gernez. Annales de l'École Normale. (1) 3 p. 167, 1866; (2) 5 p. 9, 1876.

Valson. C. R. 73 p. 441, 1871; 77 p. 806, 1873.

Bender. W. A. 20 p. 560, 1883.

Д. И. Менделѣевъ Смѣшеніе спирта съ водою. Спб. 1865.

Ограничиваемся указаніемъ на работы, упомянутыя въ текстѣ. Болѣе обширныя указанія на литературу можно найти у Landolt, Phys.-chem. Tabellen. Berlin. 1894 p. 235—256.

Вл. Тимоѳеевъ. Растворимость веществъ въ органическихъ растворителяхъ. Труды физ.-хим. секціи Общ. опыт. наукъ при Харьковск. Унив. Годъ 21. Приложенія. Вып. 6-ой. Харьковъ. 1894.

А. Геричъ. Ж. Ф. Х. О. 21 стр. 51, 1889 г.; О. Ф. Н. Об. Л. Е. 3, вып. 1, стр. 18, 23, 1890.

Heritsch. W. A. 36 p. 115, 1889.

Любавинъ. Объ изслѣд. А. Герича. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 3, вып. 2, стр. 9, 1890.

Kohlrausch und Rose. W. A. 50 p. 127, 1893.

Hollemann. Zeitschr. f. phys. Chemie. 12 p. 125, 1893.

Berthelot et Joungfleisch. Ann. ch. et phys. (4) 26 p. 400, 1872.

Hoff. Zeitschr. phys. Chem. 5 p. 322.

Rikke. Zeitschr. phys. Chem. 7 p. 97.

Aulich. Zeitschr. phys. Chem. 8 p. 105.

Nernst. Zeitschr. phys. Chem. 8 p. 111.

Яковкинъ. Zeitschr. phys. Chem. 13 p. 539 и Ж. Ф.-Х. Общ. 28, Отд. химич. стр. 175 и 860, 1896 г.

Bodländer. Zeitschr. phys. Chem. 7 p. 308, 358; 16 p. 729.

Michel et Krafft. Ann. chim. et phys. (3) 41 p. 471, 1854.

Schiff. Lieb. Annalen. 109 p. 325, 1859; 113 p. 349, 1860.

Gerlach. Zeitschr. f. anal. Chemie. 27 p. 271, 1888.

Nicol. Proc. R. Soc. Edinb. 1881—1882 p. 819.

Lecoq de Boisbaudran. C. R. 120 p. 540; 121 p. 100, 1895.

Schiff und Monsacchi. Zeitschr. phys. Chemie. 21 p. 277, 1896.

Braun. W. A. 30 p. 250, 1887; Zeitschr. phys. Chem. 1 p. 259, 1887.
Sorby. Proc. Roy. Soc. 12 p. 538, 1863.
Stackelberg. Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. (5) 4 № 2, 1896; Zeitschr. phys. Chem. 20 p. 159, 1896.
Казанкинъ. Сжатіе соляныхъ растворовъ. Ж. Ф. Х. О. 26 p. 218. 1894.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Диффузія и осмосъ.

§ 1. Свободная диффузія жидкостей. На стр. 419 было дано общее опредѣленіе термина «диффузія». Двѣ жидкости, способныя смѣшиваться и приведенныя въ соприкосновеніе, диффундируютъ одна въ другую; диффузія окончена, когда получилась вполнѣ однородная смѣсь. Жидкости могутъ быть вполнѣ различныя, напр. вода и алкоголь, или одна изъ нихъ чистая жидкость, а другая растворъ какого либо вещества въ этой же жидкости. Въ послѣднемъ случаѣ, наиболѣе важномъ и интересномъ, диффузія заключается въ постепенномъ распространеніи растворенннаго вещества по избытку растворителя.

Graham (1850) двумя способами изслѣдовалъ явленія диффузіи. На дно большого сосуда (рис. 305), наполненнаго водой, ставился маленькій флаконъ, содержавшій испытуемый растворъ. Черезъ опредѣленное время флаконъ вынимался и опредѣлялось, какое количество растворенннаго вещества успѣло перейти изъ флакона въ окружающую воду. Въ позднѣйшихъ своихъ изслѣдованіяхъ Graham помѣщалъ одну жидкость непосредственно надъ другою и черезъ опредѣленные промежутки времени анализировалъ составъ жидкости въ различныхъ горизонтальныхъ слояхъ, извлекая пробы помощью капилярнаго сифона. Отсюда онъ могъ опредѣлить относительныя значенія времени, въ теченіе котораго различныя вещества одинаково диффундируютъ, т.-е. въ одинаковомъ количествѣ появляются на данномъ разстояніи отъ первоначальной границы раствора и чистой воды; при этомъ различные растворы брались одинаковой крѣпости. Время, относящееся къ HCl было принято за единицу; для другихъ веществъ получились времена:

Рис. 305.

Хлористоводородная кислота	1
Поваренная соль	2.3
Сахаръ.	7
Альбуминъ	49
Карамель	98

Особенно медленно диффундируютъ альбуминъ и карамель, принадлежащіе къ т. наз. коллоидамъ, которые разсмотримъ въ концѣ этого отдѣла.

W. Thomson (нынѣ Lord Kelvin) далъ удобный способъ наблюденія послѣдовательныхъ стадій диффузіи. Въ цилиндрическомъ сосудѣ, содержащемъ внизу болѣе тяжелую жидкость (напр. растворъ), а надъ нею болѣе легкую, помѣщается рядъ стеклянныхъ полыхъ шариковъ, имѣющихъ различныя среднія плотности. Сначала всѣ шарики находятся на границѣ двухъ жидкостей; но по мѣрѣ измѣненія плотности въ различныхъ горизонтальныхъ слояхъ, нѣкоторые шарики опускаются въ нижнюю жидкость, другіе поднимаются въ верхнюю. По расположенію шариковъ можно судить о составѣ жидкости въ различныхъ разстояніяхъ отъ первоначальной плоскости раздѣла.

Бейльштейнъ (1856) помѣщалъ растворы въ сосудъ, форма котораго напоминала опрокинутый сифонъ; короткое колѣно оканчивалось подъ поверхностью воды, налитой въ большой сосудъ.

Berthollet (1803), Fick (1855), Stefan (1874) и друг. развили математическую теорію диффузіи. Мы имѣемъ здѣсь формулу, вполнѣ аналогичную формулѣ (24) стр. 420. Количество dq вещества (соли, кислоты и т. д.), проходящаго въ теченіе времени dt черезъ горизонтальную площадь s по вертикальному направленію x (снизу вверхъ), выражается формулою

$$dq = -ks\frac{du}{dx}dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которой u есть концентрація раствора (вѣсовое количество раствореннаго вещества въ единицѣ объема раствора) въ той горизонтальной плоскости, вертикальная координата которой равна x, и въ которой расположена разсматриваемая площадь s. Множитель k, характерный для даннаго рода раствора и зависящій отъ его состава и физическаго состоянія, называется **коеффиціентомъ диффузіи**. Онъ численно равенъ вѣсовому количеству раствореннаго вещества, проходящему въ единицу времени черезъ единицу горизонтальной плоскости, когда разность концентрацій двухъ слоевъ, отстоящихъ на единицу длины, равна единицѣ. Легко формулировать опредѣленіе *C. G. S.* единицы коеффиціента диффузіи. Размѣръ этой величины получается немедленно, если замѣтить, что dq есть нѣкоторое количество вещества, а du количество вещества въ единицѣ объема, такъ что $[du] = [dq] : L^3$. Имѣемъ

$$k = -\frac{dq}{s\frac{du}{dx}dt};$$

s есть поверхность, dx длина, dt время, слѣд.

$$[k] = \frac{[dq]}{L^2\frac{[dq]}{L^3 \, . \, L}T} = \frac{L^2}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Весьма часто принимаютъ за единицу времени сутки, за единицу длины сантиметръ; когда пользуются *C. G. S.* системой, то пишутъ k въ

видѣ $k = N . 10^{-7} \frac{(\text{сантим.})^2}{\text{сек.}}$. Если черезъ n обозначить численное значеніе въ системѣ сутки—сантим., то

$$k = N . 10^{-7} \frac{(\text{см.})^2}{\text{сек.}} = n \frac{(\text{см.})^2}{\text{сутки}} .$$

Но сутки $= 86400$ сек.; слѣд. $n = 86400\, N . 10^{-7}$ и, наконецъ,

$$N = 115{,}7 n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Такъ для насыщеннаго раствора поваренной соли при 15°

$$k = 108 . 10^{-7} \frac{(\text{см.})^2}{\text{сек.}} = 0{,}93 \frac{(\text{см.})^2}{\text{сутки}} .$$

Здѣсь $N = 108$, $n = 0.93$. Fick принималъ за единицу времени часъ; понятно, что численныя значенія для k въ этомъ случаѣ должны равняться $\frac{1}{24} n$, напр. въ только что приведенномъ примѣрѣ $k = 0{,}039$.

Stefan вычислилъ k изъ опытовъ Graham'а, относившихся къ перемѣнному состоянію раствора и нашелъ слѣдующія числа для $10^7 k$ въ *C. G. S.* единицахъ:

	Карамель.	Альбуминъ.	Сахаръ.	*NaCl.*		*HCl.*
	9° — 10°	13° — 15°	9° — 10°	5°	9° — 10°	5°
$k . 10^7 =$	5,4	7,3	39,9	88,5	107.8	201,6 $\frac{(\text{см.})^2}{\text{сек.}}$.

Для раствора J въ алкоголѣ $k . 10^7 = 61{,}7$.

F. Weber произвелъ обширное изслѣдованіе диффузіи раствора $ZnSO_4$ въ водѣ, а Schumeister и въ особенности Scheffer изучили вліяніе концентраціи и температуры раствора на величину k. Оказалось, что при возрастающей концентраціи для нѣкоторыхъ растворовъ k растетъ, для другихъ убываетъ.

Р. Э. Ленцъ изучалъ диффузію алкогольныхъ растворовъ солей KJ, NaJ, CdJ_2 и K_2CrO_4; онъ находитъ, что скорость диффузіи пропорціональна электрическому сопротивленію раствора.

Wiener далъ весьма интересный способъ изученія диффузіи наблюденіемъ пути свѣтового луча, проходящаго черезъ столбъ жидкости, въ которомъ происходитъ диффузія. Другой его способъ основанъ на измѣреніи тѣхъ искривленій, которымъ подвергается изображеніе освѣщенной щели, наклоненной подъ 45° къ горизонту, если это изображеніе проектировать на диффузіонный сосудъ. Boltzmann далъ математическую теорію способа Wiener'а.

Съ повышеніемъ температуры коеффиціентъ диффузіи увеличивается. Такъ для $NaCl$

$$k_t = k_0 (1 + 0{,}0429 t).$$

De Heen находитъ для $MgSO_4$, KNO_3, $NaCl$, Na_2HPO_4 и K_2CO_3 почти одинаковую зависимость отъ температуры; но коэффиціентъ при t онъ находитъ равнымъ 0,012.

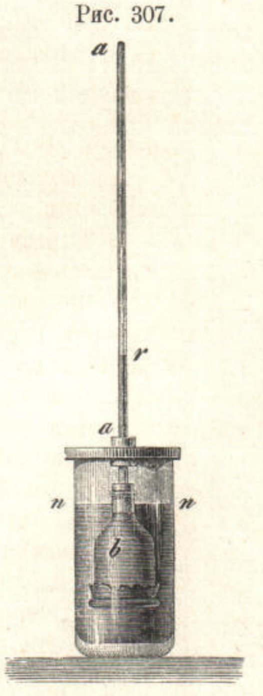
§ 2. Диффузія жидкостей черезъ пористую перегородку или осмосъ. Если двѣ жидкости разъединены пористой перегородкой (слабо обожженная, немуравленная глина, животный пузырь, пергаментъ и т. д.), то онѣ, вообще говоря, проходятъ черезъ нее съ различною скоростью. Это явленіе называется осмосомъ. Особыя названія экзосмоса и эндосмоса для болѣе медленнаго и для болѣе быстраго прохожденія въ настоящее время оставлены.

Рис. 306.

Явленіе осмоса было открыто аббатомъ Nollet (1748), который помѣстилъ въ воду небольшой сосудъ, наполненный алкоголемъ и плотно закрытый пузыремъ, и наоборотъ въ алкоголь сосудъ, наполненный водой; онъ замѣтилъ, что въ первомъ случаѣ пузырь вздувался (рис. 306), а во второмъ какъ бы вдавливался во внутрь сосуда. Въ обоихъ случаяхъ вода очевидно быстрѣе проникала черезъ перегородку, чѣмъ алкоголь.

Первый, внимательно изслѣдовавшій это явленіе, былъ Dutrochet (1827—1835); приборъ, которымъ онъ пользовался, изображенъ на рис. 307. Сосудъ b закрытъ снизу пузыремъ; въ его горлышко вставлена вертикальная, открытая сверху трубка aa, проходящая черезъ крышку болѣе широкаго сосуда nn, содержащаго одну изъ двухъ испытуемыхъ жидкостей, между тѣмъ какъ другая наполняетъ сосудъ b и въ нѣкоторыхъ случаяхъ часть трубки aa. Когда въ b находится растворъ соли въ водѣ, а въ nn чистая вода, то жидкость начинаетъ подниматься по трубкѣ, что́ и доказываетъ, что чистая вода быстрѣе проходитъ черезъ перепонку, чѣмъ растворъ соли. Недостатокъ опытовъ Dutrochet заключается въ томъ, что жидкій столбъ въ трубкѣ aa производитъ сильное гидростатическое давленіе, вызывающее обратный «фильтраціонный» токъ жидкости. Поэтому Vierordt (1847) расположилъ перепонку вертикально такъ, чтобы гидростатическія давленія на нее съ двухъ сторонъ оставались равными. Онъ подтвердилъ результатъ, найденный уже Dutrochet, что избытокъ скорости одного теченія надъ скоростью другого пропорціоналенъ разности концентрацій двухъ растворовъ одного и того же вещества, помѣщенныхъ съ двухъ сторонъ отъ перегородки. Идея объ особаго рода «эндосмотическомъ эквивалентѣ», къ которой Jolly былъ приведенъ своими изслѣдованіями, была впослѣдствіи оставлена, а потому мы на ней не останавливаемся.

Рис. 307.



Направленіе болѣе быстраго теченія зависитъ отъ рода взятыхъ двухъ жидкостей, отъ вещества перегородки, а также отъ степени концентрацій если взяты два раствора. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

Если вода и алкоголь отдѣлены животнымъ пузыремъ, то быстрѣе проникаетъ вода; если же взять тонкую каучуковую перепонку, то, наоборотъ, алкоголь проникаетъ быстрѣе, чѣмъ вода.

Чистая вода проходитъ быстрѣе черезъ перепонку, чѣмъ растворы виннокаменной и лимонной кислотъ опредѣленной крѣпости, но медленнѣе, чѣмъ растворы слабые.

Объясненіе осмотическихъ явленій представляетъ большія трудности. Полагали сперва, что это явленіе чисто капилярнаго характера, что та жидкость быстрѣе проходитъ черезъ поры перепонки, которая выше поднимается въ капилярныхъ трубкахъ. Это объясненіе оставлено, но Quincke указалъ на роль, которую можетъ играть поверхностное натяженіе жидкостей, соприкасающихся у стѣнки канала внутри пористой перегородки; это натяженіе можетъ вызвать перемѣщеніе жидкостей въ ту или другую сторону.

Liebig объяснялъ осмосъ неодинаковою способностью перегородки впитывать въ себя различныя жидкости. Онъ нашелъ, что 100 вѣсовыхъ единицъ сухого бычачьяго пузыря впитываютъ въ себя въ 24 час. воды — 268, раствора $NaCl$ – 133, спирту (84%) — 38 и костяного масла — 17 вѣсовыхъ единицъ. Пузырь, насыщенный водой, теряетъ часть этой воды, если его обсыпать солью или положить въ алкоголь. На основаніи этого Liebig объясняетъ осмосъ тѣмъ, что перепонка неодинаково быстро поглощаетъ двѣ жидкости, съ которыми она соприкасается; жидкость, впитанная на одной сторонѣ перепонки, выдѣляется на сторонѣ противоположной. Болѣе сложныя объясненія дали Bruecke и Fick.

Съ повышеніемъ температуры осмосъ черезъ животный пузырь вообще усиливается, хотя и въ очень незначительной степени.

§ 3. Осмотическое давленіе. Мы видѣли въ § 1, что если надъ растворомъ какой либо соли, кислоты, сахара и т. д. въ водѣ помѣстить столбъ чистой воды, то растворенное вещество, какъ бы расширяясь, постепенно распространяется по всему объему жидкости. На аналогію этого явленія съ расширеніемъ газа, которое наблюдается при соединеніи занимаемаго имъ пространства съ пустотою, указалъ впервые еще Gay-Lussac. Чистая вода или болѣе слабый растворъ играютъ здѣсь роль пустоты или разрѣженнаго пространства для растворennаго вещества. Мы можемъ сказать, что это вещество стремится занять по возможности большій объемъ. Если это такъ, то должно обнаружиться особаго рода давленіе на перегородку, помѣщенную между растворомъ и водою. Такое давленіе дѣйствительно и наблюдается; оно называется осмотическимъ. Его существованіе непосредственно обнаруживается въ приборѣ Dutrochet (рис. 307), въ которомъ осмотическимъ давленіемъ поддерживается столбъ жидкости, поднимающійся по трубкѣ *aa*.

Изученіе осмотическаго давленія могло широко развиться только послѣ изобрѣтенія такъ называемыхъ «полупроницаемыхъ» перепонокъ, обра-

зующихся при соприкосновеніи двухъ жидкостей, и состоящихъ изъ вещества, осаждающагося вслѣдствіе химической реакціи между жидкостями. Такими перепонками впервые пользовался Traube (1867), назвавшій ихъ осадочными мембранами; онѣ получаются напр., если трубочку, наполненную клеемъ, опустить въ дубильную кислоту. Pfeffer (1877) и др. показали цѣлый рядъ способовъ полученія полупроницаемыхъ перепонокъ. Одинъ изъ наиболѣе удобныхъ способовъ заключается въ приведеніи въ соприкосновеніе растворовъ мѣднаго купороса и желѣзисто-синеродистаго калія, причемъ перепонка получается состоящею изъ желѣзисто-синеродистой мѣди (Pfeffer). Удобнѣе всего взять сосудъ изъ пористой глины, пропитать его сперва растворомъ мѣднаго купороса, а затѣмъ растворомъ желѣзисто-синеродистаго калія. Тогда всѣ поры сосуда затягиваются пленкою.

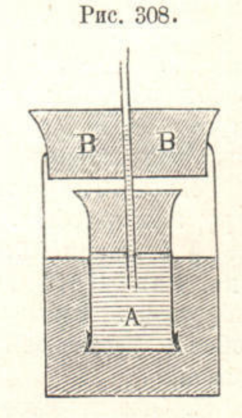
Полупроницаемая пленка имѣетъ свойство свободно пропускать черезъ себя воду, задерживая въ большей или меньшей степени растворенныя въ ней вещества, особенно тѣ, отъ взаимодѣйствія которыхъ она образовалась. Впрочемъ de-Vries и Quincke показали, что въ очень малыхъ количествахъ даже и эти вещества проходятъ черезъ перепонку.

Если пористый сосудъ Pfeffer'a наполнить какимъ либо растворомъ, закрыть его пробкою, черезъ которую проходитъ манометръ, и помѣстить сосудъ въ чистую воду, то манометръ указываетъ возростаніе внутренняго давленія, достигающаго до нѣкотораго максимальнаго значенія, которое обозначимъ черезъ p.

Ostwald и его ученики приписываютъ это давленіе, доходящее въ нѣкоторыхъ случаяхъ до нѣсколькихъ атмосферъ, непосредственно растворенному веществу, молекулы котораго ударяютъ въ полупроницаемую перепонку. Изъ этихъ ударовъ суммируется давленіе, какъ мы это видѣли для газовъ (стр. 386).

Van't Hoff, одинъ изъ основателей ученія объ осмотическомъ давленіи, болѣе осторожно указываетъ лишь на аналогію между этимъ давленіемъ и упругостью газовъ, идущую, какъ мы увидимъ ниже, весьма далеко. Противъ взгляда Ostwald'a особенно рѣзко высказался Victor Mayer, утверждая, что давленіе на перепонку производится растворителемъ, а не растворенньмъ веществомъ.

Рис. 308.



На рис. 308 изображенъ приборъ Nernst'a, въ которомъ слой воды играетъ роль полупроницаемой перегородки. Большой стаканъ содержитъ эфиръ, насыщенный водою, а сосудикъ A эфиръ, также насыщенный водою и большимъ количествомъ бензола; онъ внизу закрытъ животнымъ пузыремъ, пропитаннымъ водою и играющимъ здѣсь роль пористаго сосуда въ приборѣ Pfeffer'a, т.-е. служащимъ только для удержанія въ цѣлости полупроницаемой водяной перепонки, пропускающей эфиръ, но не проницаемой для бензола. По вертикальной трубкѣ мало-по-малу поднимается столбъ эфира.

Растворы, обладающіе одинаковымъ осмотическимъ давленіемъ, называются изотоническими или изоосмотическими.

Tammann (1888) далъ изящный способъ для нахожденія такихъ изотоническихъ растворовъ, при соприкосновеніи которыхъ образуется полупроницаемая перепонка, напр. мѣднаго купороса и желѣзисто-синеродистаго калія. Положимъ, что растворъ A имѣетъ крѣпость a; требуется найти крѣпость b раствора B, изотоническаго съ первымъ. Для этого опускаютъ каплю раствора B въ растворъ A; капля немедленно покрывается оболочкой. Если концентрація b' раствора B больше b, то вода вступаетъ снаружи въ каплю, окружающій растворъ дѣлается болѣе крѣпкимъ, и въ видѣ струйки, которую можно ясно наблюдать глазомъ, а еще лучше, особымъ оптическимъ методомъ, опускается внизъ. Если же $b' < b$, то чистая вода выступаетъ наружу и струйка разбавленнаго раствора поднимается вверхъ. Когда растворы изотоничны, то никакой струйки не является, т. е. обмѣна воды не происходитъ.

Traube, de-Vries и Pfeffer изслѣдовали явленія осмотическаго давленія въ живыхъ растительныхъ и животныхъ клѣткахъ. Внутренняя оболочка этихъ клѣтокъ пропускаетъ воду, но непроницаема для многихъ растворенныхъ въ ней веществъ. Вслѣдствіе этого въ клѣткахъ развивается давленіе, доходящее до 4-хъ атмосферъ и даже до 18-ти атм., напр. въ клѣткахъ моркови и, какъ показали изслѣдованія Владимірова (1891), въ клѣткахъ нѣкоторыхъ бактерій.

Если живую клѣтку помѣстить въ растворъ, осмотическое давленіе котораго больше давленія въ клѣткѣ, то внутренняя оболочка клѣтки отстаетъ отъ наружной, и этимъ можно воспользоваться для отысканія изотоническихъ растворовъ. Для этой же цѣли могутъ служить и красные кровяные шарики.

Изотоническіе растворы обладаютъ одинаковою упругостью пара. Этотъ важный законъ вывели теоретически Van't-Hoff и Duhem; онъ былъ подтвержденъ опытами Tammann'a (1888). Van't-Hoff далъ формулу

$$p = 4{,}55\, T lg \frac{P_0}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

въ которой p осмотическое давленіе въ атмосферахъ, T абсолютная температура, P_0 и P упругости пара воды и раствора при температурѣ T, lg знакъ натуральныхъ логариѳмовъ.

Изотоническіе растворы имѣютъ одинаковую температуру замерзанія. И этотъ законъ подтвердился опытами Tammann'a.

§ 4. Законы Бойля-Маріотта, Гей-Люссака и Авогадро для растворовъ. Van't-Hoff, Ostwald, Arrhenius, Raoult и друг. положили основаніе ученію о близкомъ сходствѣ, если не тождествѣ, цѣлаго ряда основныхъ свойствъ растворовъ и газовъ. Эти свойства выражаются слѣдующимъ образомъ:

I. Осмотическое давленіе p при неизмѣнной температурѣ пропорціонально концентраціи раствора, или обратно пропорціонально объему v, занимаемому даннымъ количествомъ растворенного вещества (Бойль-Маріоттъ).

II. Осмотическое давленіе p пропорціонально абсолютной температурѣ T, т.-е. его температурный коэффиціентъ равенъ 0,00367 (Гей-Люссакъ).

III. Одинакіе объемы v изотоническихъ растворовъ (равныя давленія p) содержатъ при данной температурѣ t одинаковое число N молекулъ, равное числу газовыхъ молекулъ, находящихся въ объемѣ v при давленіи p и температурѣ t (Авогадро).

Полупроницаемыя перепонки лишь въ немногихъ случаяхъ даютъ возможность измѣрить осмотическое давленіе p, которое косвеннымъ образомъ опредѣляется на основаніи наблюденій упругости пара P (см. формулу (4) стр. 512) или температуры затвердѣванія. Но напр. для раствора сахара давленіе p можетъ быть опредѣлено помощью прибора Pfeffer'а (стр. 511).

Законъ I подтверждается слѣдующими числами для раствора сахара:

Концентрація.	Давленіе.	Отношеніе.
m	p	$\frac{p}{m}$
1%	53,5 см.	53,5
2	101,6	50,8
2,74	151,8	55,4
4	208,2	52,1
6	307,5	51,3

Давленіе выражено въ сантим. ртутнаго столба. Замѣтимъ, что для однопроцентнаго раствора селитры давленіе p превышаетъ три атмосферы.

Законъ II подтверждается слѣдующими числами, относящимися къ однопроцентному раствору сахара:

t^0	p набл.	p вычисл.	Разности:
6°,8	0,664 атм.	0,665 атм.	+ 0,001
13,7	0,691	0,681	− 0,010
14,2	0,671	0,682	+ 0,011
15,5	0,684	0,686	+ 0,002
22,0	0,721	0,701	− 0,020
32,0	0,716	0,725	+ 0,009
36,0	0,746	0,735	− 0,011

Величины p, стоящія въ третьемъ столбцѣ, вычислены по формулѣ

$$p = 0,649\,(1 + 0,00367\,t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Совокупность первыхъ двухъ законовъ приводитъ къ формулѣ, аналогичной формулѣ Клапейрона, (5) стр. 360,

$$pv = RT \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

гдѣ R величина постоянная. Мы видѣли, что если объемъ v выражать въ литрахъ, давленіе p въ атмосферахъ, и каждаго вещества брать граммъ-молекулу, т.-е. столько граммовъ, сколько единицъ заключается въ моле-

кулярномъ вѣсѣ этого вещества, или, иначе, если брать одинаковое число молекулъ различныхъ веществъ, то для всѣхъ газовъ

$$R = 0{,}0815 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

см. (8) стр. 361.

Вычислимъ величину p для однопроцентнаго раствора сахара при 0°, допуская, что и для него $R = 0.0815$. Въ формулѣ

$$p = \frac{RT}{v} = \frac{0{,}0815\,T}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

полагаемъ $R = 0{,}0815$, $T = 273$. Молекулярный вѣсъ сахара $C_{12}H_{22}O_{11}$ равенъ 342. Объемъ 100 граммовъ раствора, содержащихъ 1 гр. сахара, равенъ 99,7 куб. см.; слѣд. объемъ v равенъ $99{,}7 \times 342$ куб. см. или $v = 34{,}1$ литра. Итакъ теоретически

$$p = \frac{0{,}0815 \times 273}{34{,}1} = 0{,}656 \text{ атм.}$$

Это число замѣчательно близко къ найденному изъ опытовъ числу $p = 0{,}649$ атм., см. (5). Такимъ образомъ дѣйствительно давленіе растворённаго сахара равно тому давленію, которое онъ имѣлъ бы, заполняя предоставленное ему пространство въ видѣ недиссоціированнаго (стр. 426) пара.

Такое совпаденіе между наблюденными осмотическими давленіями и вычисленными на основаніи формулы (8) не замѣчается, однако, для многихъ другихъ растворовъ, для которыхъ формула (6) должна быть замѣнена другою

$$pv = iRT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Здѣсь R постоянная для всѣхъ растворовъ, равная постоянной въ соотвѣтствующей формулѣ для газовъ, если брать граммъ-молекулу вещества. Множитель i показываетъ отступленіе даннаго раствора отъ «нормальнаго». Эти отступленія напоминаютъ то, что было сказано на стр. 426 о диссоціаціи газовъ. Если i не равно 1, то это показываетъ, что растворенное вещество диссоціировано, и что слѣд. число свободныхъ молекулъ увеличено.

Весьма важно то, что для растворовъ не-электролитовъ, т.-е. тѣлъ, не разлагающихся подъ вліяніемъ электрическаго тока, коэффиціентъ $i = 1$; для электролитовъ $i > 1$. Отсюда Planck и Arrhenius заключили, что электролиты (соли, кислоты) въ растворахъ отчасти диссоціированы, т.-е. разложены на составныя части, а именно на іоны (стр. 496). Приведемъ нѣкоторыя численныя значенія множителя i:

	HCl	$CaCl_2$	$NaNO_3$	$NaCO_3$	$K_2Al_2(SO_4)_4$	$KClO_3$	$Na_2B_4O_7$
$i =$	1,98	2,52	1,82	2,18	4,45	1,78	3,57

Arrhenius показалъ, что i можно вычислить для растворовъ по формулѣ

$$i = 1 + (k-1)\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ k полное число частей, на которыя распадается молекула электролита въ растворѣ; напр. $k = 2$ для KCl; $k = 3$ для $BaCl_2$, K_2SO_4 и т. д. Величина α опредѣляетъ степень диссоціаціи, т.-е. отношеніе числа разложенныхъ къ числу всѣхъ молекулъ. Чѣмъ болѣе растворъ разбавленъ, тѣмъ ближе α къ единицѣ, т.-е. тѣмъ полнѣе диссоціація (см. стр. 428). Величина α можетъ быть опредѣлена изъ наблюденій надъ электропроводностью растворовъ, и формула (10) даетъ для i числа, весьма согласныя съ тѣми, которыя отчасти приведены выше.

Nernst (1888) далъ наиболѣе полную молекулярную теорію диффузіи растворовъ. Mac-Gregor (1897) далъ интересную формулу, связывающую различныя свойства (плотность, тепловое расширеніе, треніе, поверхностное натяженіе, коеффиціентъ преломленія) водныхъ растворовъ солей съ соотвѣтствующими свойствами чистой воды. Въ эту формулу тоже входитъ коеффиціентъ, выражающій степень диссоціаціи (или іонизаціи) раствора.

ЛИТЕРАТУРА.

Graham. Phil. Trans. 1850, I p. 1; II p. 805; 1851, II p. 483. Liebig's Annal. 77. p. 56 и 129; 80 p. 197, 1851; 121 p. 1, 1862.

Beilstein. Lieb. Ann. 99 p. 165, 1856.

Berthollet. Essai de statique chimique. Paris 1803 p. 412.

Fick. Pogg. Ann. 94 p. 59, 1855.

Stefan. Wien. Ber. 79, 2 p. 161, 1879.

H. F. Weber. W. A. 7 p. 469 и 536; 1879.

Schumeister. Wien. Ber. 79, II p. 603, 1879.

Scheffer. Chem. Ber. 15 p. 788, 1882; 16 p. 1903, 1883 г.

De-Heen. Bull. Ac. Belg. (3) 8 p. 219, 1884; 19 p. 197, 1890.

Nollet. Histoire de l'Acad. des sciences 1748 p. 101.

Dutrochet. Ann. d. ch. et phys (2) 35 p. 393; 37 p. 191; 49 p. 411; 51 p. 159; 60 p. 337, 1827—35.

Vierordt. Archiv v. Roser und Wunderlich VI p. 1847. Pogg. Ann. 73 p. 519, 1848.

Jolly. Zeitchr. f. rationelle Med. 7 p. 83, 1849; Pogg. Ann. 78 p. 261, 1849.

Liebig. Ursachen der Saeftebewegung. Braunschweig 1848. Theorie der Osmose. Lieb. Ann. 121 p. 78, 1862.

Quinke. Pogg. Ann. 160 p. 118, 1877.

Wiener. Wied. Ann. 49 p. 105, 1893.

Boltzmann. Wied. Ann. 53 p. 959, 1894.

Умовъ. (О диффузіи) Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 335, 1891.

Грибоъдовъ. (О диффузіи) Ж. Ф. Х. О. 25 стр. 36, 1893.

Traube. Arch. f. Anat. u. Physiol. 1867 p. 87.

Pfeffer. Osmotische Untersuchungen. Leipzig. 1877.

Adie. J. of. Chem. Soc. 1891 p. 344.

de Vries. Arch. Néerland. 31 p. 344, 1878. (Beibl. 3 p. 7); Ztschr. f. phys. Chem. 2 p. 414, 1888.

Tammann. Ztschr. f. phys. Chem. 8 p. 685, 1891; W. A. 34 p. 229 (1866).

Van'tHoff. Arch. Néerl. 20 p. 239, 1885; Ztschr. f. phys. Chem. 1 p. 481, 1887.

Nernst. Ztschr. f. phys. Chem. 2 p. 611, 1888; 6 p. 37, 1890.

Arrhenius. Ztschr. f. phys. Chem. 3 p. 115, 1889; 10 p. 51, 1892.

Duhem. J. d. phys. (2) 6 p. 134, 1887; 6 p. 397, 1887; 7 p. 391, 1888.

Fick. Ztschr. f. phys. Chemie. 5 p. 527, 1890.

Pupin. Der osmotische Druck. Berlin. 1889.

Dieterici. W. A. 45 p. 220, 1892.
Fuchs. Exner's Repert. 27 p. 176, 1891.
Poynting. (Osmotic pressure), Phil. Mag. (5) 42 p. 289, 1896.
Mac-Gregor. Phil. Mag. (5) 43 p. 46, 98, 1897.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Треніе въ жидкостяхъ.

§ 1. Коеффиціенты внутренняго тренія. На стр. 406 было дано общее опредѣленіе коеффиціента внутренняго тренія, развивающагося во всякой средѣ, въ которой различныя части движутся съ неодинаковыми скоростями. Формула (59) стр. 407

$$f = \eta s \frac{dv}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

одинаково относится какъ къ газамъ, такъ и къ жидкостямъ. Здѣсь η коеффиціентъ внутренняго тренія, s площадь соприкосновенія двухъ сосѣднихъ слоевъ, v скорость слоя, $\frac{dv}{dx}$ мѣра измѣняемости этой скорости, которая наблюдается, если идти по направленію x, перпендикулярному къ s; наконецъ f—сила, замедляющая движеніе одного, ускоряющая движеніе другого слоя. Величина η также называется вязкостью данной жидкости. На стр. 407 было дано опредѣленіе единицы вязкости.

Размѣръ величины η легко получается, если вспомнить, что f есть сила, dv скорость, s площадь и dx длина. Имѣемъ

$$[f] = \frac{ML}{T^2}; \ [s] = L^2; \ [dv] = \frac{L}{T} \text{ и } [dx] = L.$$

отсюда

$$\frac{ML}{T^2} = [\eta] L^2 \frac{L}{TL},$$

и слѣд.

$$[\eta] = \frac{M}{LT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Вязкость принято выражать двояко, а именно во-первыхъ въ $C. G. S.$ единицахъ, въ каковомъ случаѣ мы ее и будемъ обозначать черезъ η; во вторыхъ, сравниваютъ вязкость различныхъ жидкостей съ вязкостью воды при 0°, которую принимаютъ равной 100. Полученныя такимъ образомъ числа измѣряютъ удѣльную вязкость; мы ее обозначимъ черезъ z. Если вязкость воды при 0° въ $C. G. S.$ единицахъ обозначить черезъ η'_0, то связь между η и z будетъ очевидно

$$z = \frac{\eta}{\eta'_0} 100 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Jaeger развилъ теорію жидкостей, аналогичную кинетической теоріи газовъ (стр. 385). Между прочимъ онъ далъ и теорію внутренняго тренія въ жидкостяхъ, соотвѣтствующую теоріи тренія въ газахъ (стр. 407). Онъ находитъ для діаметра частицъ воды $\delta = 70 \,.\, 10^{-9}$ см., а для средней длины пути $\lambda = 91 \,.\, 10^{-11}$, такъ что $\lambda < \delta$, между тѣмъ, какъ для газовъ $\lambda > \delta$.

§ 2. Коеффиціентъ внѣшняго тренія и коеффиціентъ скольженія. Когда жидкость касается неподвижнаго твердаго тѣла и скорость V слоя жидкости, непосредственно прилегающаго къ поверхности твердаго тѣла, и движущагося вдоль этой поверхности, не равна нулю, то между жидкостью и твердымъ тѣломъ появляется треніе. Сила f, дѣйствующая въ этомъ случаѣ на разсматриваемый слой жидкости, пропорціональна поверхности s слоя и скорости V, которую можно разсматривать и какъ разность скоростей жидкости и твердаго тѣла. Имѣемъ

$$f = \lambda s V \,.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (4)$$

гдѣ λ называется коеффиціентомъ внѣшняго тренія жидкости. Размѣръ этой величины очевидно

$$[\lambda] = \frac{M}{L^2 T} \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (5)$$

Ее ввелъ впервые Navier (1822). Обыкновенно допускаютъ, что въ большинствѣ случаевъ

$$\lambda = \infty \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (6)$$

т.-е. $V = 0$. Это значитъ, что предѣльный слой жидкости, какъ бы приставшій къ поверхности твердаго тѣла, неподвиженъ, что непосредственнаго скольженія жидкости по поверхности твердаго тѣла не существуетъ.

Если λ не безконечно велико, то величину

$$\gamma = \frac{\eta}{\lambda} \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (7)$$

называютъ коеффиціентомъ скольженія. (2) и (5) даютъ

$$[\gamma] = L \,.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (8)$$

Допущеніе $\lambda = \infty$ даетъ $\gamma = 0$; скольженія вовсе не существуетъ.

§ 3. Опредѣленіе коеффиціента тренія по способу капилярныхъ трубокъ. Poiseuille (1842) далъ слѣдующую формулу для объема Q жидкости, протекающей втеченіе времени T черезъ капилярную трубку, внутренній діаметръ которой D и длина L, если жидкость находится подъ давленіемъ P

$$Q = k \frac{PD^4}{L} T \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (9)$$

гдѣ k множитель пропорціональности, который, какъ оказывается, зависитъ отъ внутренняго тренія η и отъ коеффиціента скольженія γ. Математическая теорія движенія жидкости въ капилярной трубкѣ приводитъ къ формулѣ

$$Q = \frac{\pi P}{8\eta L}(R^4 + 4\gamma R^3)T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

гдѣ $R = \frac{1}{2}D$. Допуская, что $\lambda = \infty$, и слѣд. $\gamma = 0$, имѣемъ

$$Q = \frac{\pi P R^4}{8\eta L}T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

т.-е. формулу Poiseuille'а, въ которой слѣд. ($R = \frac{1}{2}D$):

$$k = \frac{\pi}{128\eta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Пользуясь формулой (11), которая даетъ

$$\eta = \frac{\pi P R^4}{8QL}T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

можно опредѣлить η, измѣряя величины P, R, Q, L и T, и притомъ, чтобы получить η въ $C.\ G.\ S.$ единицахъ, P въ динахъ на кв. см. поверхности, L и R въ см., Q въ куб. см. и T въ секундахъ.

Hagenbach показалъ, что при большой скорости истеченія необходимо прибавить къ выраженію (13) еще одинъ добавочный членъ:

$$\eta = \frac{\pi P R^4}{8QL}T - \frac{Q\delta}{2^{\frac{10}{3}}\pi g L},$$

гдѣ δ плотность жидкости, g ускореніе силы тяжести.

Для опредѣленія удѣльной вязкости z, см. (3), можно было бы сравнить времена T и T' истеченія одинаковыхъ объемовъ испытуемой жидкости (η) и воды (η') черезъ одну и ту же трубку (R и L) и подъ однимъ и тѣмъ же давленіемъ P, ибо (13) даетъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{T}{T'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Такимъ же путемъ можно опредѣлить отношеніе η' къ η'_0, а затѣмъ и z по формулѣ (3). Нѣсколько иначе веденные опыты, о которыхъ будетъ сказано ниже, даютъ для воды

$$\eta'_0 = 0{,}0178\,\frac{\text{гр.}}{\text{см. сек.}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Вставляя это число въ (3), находимъ связь между η и z:

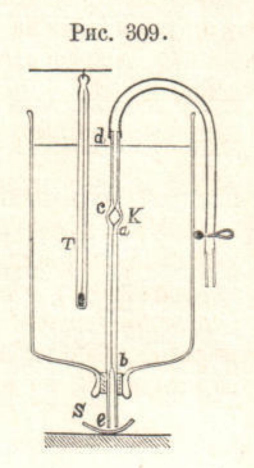
$$\eta = 0{,}000178\,z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Couette (1890) вывелъ изъ своихъ опытовъ, что для воды коэффиціентъ тренія не зависитъ отъ матеріала трубки, и что слѣд. $\lambda = \infty$ и $\gamma = 0$ даже для случая, когда вода не смачиваетъ стѣнокъ трубки (параффинъ). Точно такъ же Warburg (1870) нашелъ, что $\lambda = \infty$ и $\gamma = 0$ для ртути и стекла. Н. П. Петровъ (1896) полагаетъ, что выводы Couette'а неправильны; онъ находитъ, что изъ опытовъ Couette'а получается напр. для сурѣпнаго масла для γ величина, заключающаяся между 0,029 и 0,0012, и во всякомъ случаѣ не равная нулю.

Замѣтимъ, что при выводѣ формулы (13) предполагалось, что скорость жидкой струи при вытеканіи изъ капилярной трубки равна нулю, а потому при опытахъ слѣдуетъ брать слабыя давленія, вызывающія весьма медленное истеченіе.

Способъ опредѣленія величинъ η и z, которымъ пользуются на практикѣ, будетъ понятенъ изъ описанія прибора, служащаго для этой цѣли. Капилярная трубка ab (рис. 309) оканчивается внизу болѣе широкой трубкой be, а наверху вздутіемъ K, отъ котораго идетъ далѣе широкая трубка cd, съуженная въ c. Къ концу d прикрѣплена каучуковая трубка, снабженная зажимомъ. Вся трубка bd находится внутри сосуда съ водою, температура которой опредѣляется термометромъ T. Открывъ зажимъ, всасываютъ испытуемую жидкость въ трубку cd до точки, лежащей нѣсколько выше c. Открывъ зажимъ, опредѣляютъ время T, втеченіе котораго вся жидкость вытечетъ черезъ капилярную трубку. Затѣмъ повторяютъ тотъ же опытъ съ другою жидкостью, напр. съ водою, причемъ время вытеканія пусть будетъ T'. Давленіе P въ формулѣ (13) является здѣсь величиною перемѣнною, ибо оно въ каждый данный моментъ равно давленію еще не вытекшаго столба жидкости. Но такъ какъ для обѣихъ жидкостей законъ измѣненія этого давленія одинъ и тотъ же, то и можно пользоваться формулой (13), которая очевидно даетъ

Рис. 309.



$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{TP}{T'P'}.$$

Но если δ и δ' плотности двухъ жидкостей, то $P : P' = \delta : \delta'$ и потому

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{T\delta}{T'\delta'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Если второю жидкостью взята вода, то $\delta' = 1$ и η' можно взять изъ готовыхъ таблицъ, см. ниже § 5. Жидкости должны быть тщательно профильтрованы, дабы въ капилярную трубку не могли попасть соринки.

§ 4. Способы Coulomb'а, Helmholtz'а, Margules'а и другихъ для опредѣленія η. Горизонтальная круглая металлическая пластинка виситъ внутри изслѣдуемой жидкости на проволокѣ, прикрѣпленной къ ея центру. Повернувъ пластинку нѣсколько около проволоки, предоставляютъ ее самой себѣ

и наблюдаютъ время τ качанія (т.-е. вращенія отъ одного крайняго положенія до слѣдующаго), и логариѳмическій декрементъ λ (стр. 138). Если λ_0 значеніе декремента въ воздухѣ, то теорія приводитъ къ формулѣ

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\pi R^4}{2K}\sqrt{\frac{\pi}{2}\delta\tau\eta} \quad \text{. . . . .} \quad (18)$$

гдѣ R радіусъ пластинки, K ея моментъ инерціи, и δ плотность жидкости; отсюда опредѣляется η (способъ Coulomb'а). Вводя въ эту формулу нѣкоторыя поправки, O. E. Meyer (1887) получилъ результаты, хорошо согласующіеся съ тѣми, которые даетъ методъ капилярныхъ трубокъ. Koenig (1887) употреблялъ вращающійся шаръ вмѣсто пластинки.

Helmholtz и Piotrowski (1860) наблюдали, наоборотъ, колебанія пустого шара, наполненнаго испытуемой жидкостью и привѣшеннаго къ проволокѣ; шаръ, вращаясь около этой проволоки, совершалъ колебанія около своего вертикальнаго діаметра. Теорія даетъ возможность опредѣлить η и γ, см. (7), на основаніи наблюденій времени качанія и его логариѳмическаго декремента. Весьма замѣчательно, что γ не оказалось равнымъ нулю и слѣд. λ не равнымъ безконечности, см. (6). Для воды было найдено $\eta = 0{,}01186 \frac{\text{гр.}}{\text{см. сек.}}$ и $\gamma = 0{,}23534$ см. Umani замѣнилъ шаръ цилиндромъ; онъ нашелъ для ртути $\eta = 0{,}01577 \frac{\text{гр.}}{\text{см. сек.}}$.

Margules (1881) предложилъ такой способъ: въ жидкость помѣщаютъ вертикальный цилиндръ, радіусъ основанія котораго обозначимъ черезъ r_1; его окружаютъ болѣе широкимъ полымъ тонкостѣннымъ цилиндромъ безъ основаній (труба); пусть его радіусъ r_2. Наружный цилиндръ вращаютъ съ нѣкоторою угловою скоростью ω и измѣряютъ моментъ M пары силъ, дѣйствующей на внутренній цилиндръ. Тогда

$$M = 4\pi c\eta h \quad \text{. . . . .} \quad (19)$$

гдѣ h высота внутренняго цилиндра и

$$c = \frac{\omega}{2\gamma\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right) + \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)} \quad \text{. . . . . .} \quad (20)$$

Если нѣтъ скольженія жидкости ($\lambda = \infty$ и $\gamma = 0$, стр. 517), то

$$c = \frac{\omega}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}} \quad \text{. . . . .} \quad (21)$$

Couette (1890) и Brodmann (1892) опредѣляли этимъ способомъ коеффиціентъ тренія η. Нѣкоторымъ видоизмѣненіемъ этого способа представляется способъ Mallock'а.

Jones опредѣлялъ η, основываясь на формулѣ Stokes'а для постоянной скорости v, которую пріобрѣтаетъ шарикъ, падающій внутри жидкости:

$$v = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\sigma - \rho}{\eta} \quad \text{. . . . .} \quad (21, a)$$

гдѣ r радіусъ, σ плотность шарика, ρ плотность жидкости. Jones наблюдалъ паденіе шариковъ ртути.

§ 5. Вліяніе температуры и давленія на вязкость жидкостей. Всѣ опыты показываютъ, что η и z весьма быстро уменьшаются съ повышеніемъ температуры. Приведемъ числа для воды:

t^0	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0
η	0,0181	0,0133	0,0102	0,0081	0,0066	0,0057	0,0049	0,0042
z	100	73,3	56,2	44,9	36,7	31,5	26,9	23,5.

Для алкоголя $z_0 = 100$, $z_{70} = 28,7$.
Для ртути (по Koch'y, 1881)

t^0	$-21^0,4$	0^0	99^0	$196^0,7$	$340^0,1$
η	0,01847	0,01697	0,01223	0,01017	0,009054.

Коеффиціентъ η_t можетъ быть выраженъ эмпирической формулой вида

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{1+at+bt^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

гдѣ напр. для воды по опытамъ O. E. Meyer'a $a = 0,0332$, $b = 0,000244$ и $\eta_0 = 1,775$. Graetz (1888) показалъ, что для однородныхъ жидкостей (не для растворовъ) η_t должно выражаться формулою вида

$$\eta_t = A\frac{t_0-t}{t-t_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

гдѣ A и t_1 постоянныя числа и t_0 критическая температура (стр. 358) жидкости. Такъ для воды $A = 7,338$, $t_1 = -28,619$. Для жидкой CO_2 найдено

t^0	5^0	10^0	20^0	29^0
$\eta =$	0,000925	0,000852	0,000712	0,000539.

Внутреннее треніе жидкостей при температурахъ, которыя выше ихъ точекъ кипѣнія, изслѣдовали Heydweiller, Thorpe, Rodger, Stoel и de Haas. Приводимъ нѣкоторыя изъ чиселъ Heydweiller'a:

Этиловый эфиръ.		*Бензолъ.*		*Толуолъ.*		*Этилацетатъ.*		CCl_4.	
t^0	$10^3\eta$	t^0	$10^3\eta$	t^0	$10^3\eta$	t^0	$10^3\eta$	t^0	$10^3\eta$
$2^0,4$	2,871	$14^0,8$	7,038	$20^0,6$	5,830	$20^0,9$	4,533	$21^0,5$	9,652
18,4	2,392	30,8	5,522	78,2	3,235	77,7	2,515	99,6	4,056
47,1	1,839	78,4	3,185	100,0	2,721	99,6	2,090		
78,5	1,428	100,5	2,606	131,5	2,133	151,9	1,387		
100,4	1,177	161,4	1,546	182,5	1,477	183,0	1,063		
		185	1,254						

Stoel предложилъ эмпирическую формулу

$$\eta = Ce^{-at},$$

гдѣ C и a постоянныя числа. Зависимость внутренняго тренія различныхъ маселъ отъ температуры изслѣдовали Garvanoff, Koller и Perry.

Приводимъ нѣкоторые изъ результатовъ перваго изъ названныхъ ученыхъ; числа для величины η указаны въ $C. G. S.$ единицахъ:

t^0	Лимонное масло.	Терпентинное масло.	Гвоздичное масло.	Оливковое масло.	Миндальное масло.	Вазелиновое масло.
20°	0,01264	0,01461	0,13261	0,80800	0,66561	0,91102
50°	0,00871	0,00968	0,03729	0,25333	0,21894	0,19521
80°	0,00651	0,00716	0,01553	0,11579	0,100065	0,07301.

Вязкость жидкой CO_2—наименьшая изъ наблюденныхъ; при 15° она въ 14,6 разъ меньше вязкости воды. Малою вязкостью обладаетъ и эфиръ, для котораго $z_{10} = 14.5$ (для воды мы имѣли 73,3).

Наоборотъ, огромною вязкостью обладаетъ глицеринъ, различныя масла и т. под. Такъ для глицерина:

t	2,8°	8,°1	14°,3	20°,3	26°,5
η	42,2	25,2	13.9	7,78	4,94.

Вязкость глицерина при 2°,8 въ 2500 разъ больше вязкости воды.

Для сурѣпнаго масла $\eta_0 = 25,3$, $\eta_{6,5} = 5,8$, $\eta_{27,0} = 1,20$.

Вліяніе давленія на вязкость изучали Roentgen (1884), Warburg и Sachs (1884) и Cohen (1892). Оказывается, что съ увеличеніемъ давленія вязкость воды уменьшается, а вязкость концентрированныхъ растворовъ $NaCl$ и NH_4Cl въ водѣ увеличивается; сильное возростаніе вязкости замѣчается также для терпентиннаго масла.

§ 6. Внутреннее треніе въ растворахъ и смѣсяхъ. Вязкость растворовъ иногда больше, иногда меньше вязкости воды, и притомъ съ увеличеніемъ концентраціи иногда замѣчаются максима или минима вязкости. Вязкость растворовъ $NaCl$, K_2SO_4, $NaBr$, NaJ, $NaNO_3$, Na_2SO_4, $BaCl_2$, $CaCl_2$, $MgSO_4$, солей тяжелыхъ металловъ и т. д. больше вязкости чистой воды.

Вязкость растворовъ KCl, KBr, KJ, KNO_3, $KClO_3$, NH_4Cl, NH_4Br, NH_4J, NH_4NO_3, $Ba(NO_3)_2$ при низкихъ температурахъ меньше, при болѣе высокихъ температурахъ больше вязкости чистой воды.

Для многихъ слабыхъ растворовъ вязкость z выражается формулою Arrhenius'а

$$z = A^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

гдѣ A постоянная, x число граммъ-молекулъ растворениаго вещества въ литрѣ воды. Такъ для эфира $A = 1,026$, для сахара $A = 1,046$, для KNO_3 — $A = 0,9664$, для $ZnSO_4 - A = 1,3613$, для $CuSO_4 - A = 1,3533$, для $H_2SO_4 - A = 1,0880$.

Moore изслѣдовалъ внутреннее треніе растворовъ различныхъ солей. Онъ находитъ, что формула Arrhenius'а не приложима къ крѣпкимъ растворамъ. Smoluchowski нашелъ, что внутреннее треніе жидкихъ непроводниковъ электричества, напр. CS_2, алкоголя и др., увеличивается при раствореніи въ нихъ J, KJ, NH_4NO_3.

Внутреннее треніе амальгамъ изслѣдовалъ Schweidler.

Linebarger изслѣдовалъ вязкость смѣсей различныхъ жидкостей: бензола, толуола (C_7H_8), нитробензола ($C_6H_5NO_2$), хлороформа, эфира, четыреххлористаго углерода и др. Онъ нашелъ, что вязкость у смѣси вообще меньше той, которая вычисляется по правилу смѣшенія.

ЛИТЕРАТУРА.

Poiseuille. C. R. 15 p. 1167, 1842.

Couette. Ann. ch. et phys. (6) 21 p. 433, 1890; J. d. phys. (2) 9 p. 560, 1890.

Jaeger Wien. Sitzber. 99 p. 860, 1890; 100 p. 268, 1891; 101 p. 920, 1892; 102 p. 253, 1893.

Warburg. Pogg. Ann. 140 p. 367, 1870.

Coulomb. Mémoires de l'Jnstitut. 3 p. 246, an X (1802).

Navier. Mémoires de l'Jnstitut. 4 p. 431 (1822 г.).

Helmholtz und Piotrowski. Wien. Ber. 50 p. 107, 1865. Helmholtz. Wiss. Abh. I p. 172.

Umani. Nuov. Cim. (4) 3 p. 151, 1896.

Margules. Wien. Ber. 83 (2) p. 588, 1881.

Jones. Phil. Mag. (5) 37 p. 451, 1894.

A. Heydweiller. W. A. 55 p. 561, 1895; 59 p. 193, 1896.

Thorpe and Rodger. Phil. Trans. 185, II A. p. 397, 1895.

Stoel. Commun. Lab. of phys. Leiden. № 2, 1891.

De Haas. Commun. Lab. of phys. Leiden № 12, 1894.

Garvanoff. Wien. Ber. 103, II, a, p. 873, 1894.

Koller. Wien. Ber. 98, 1890.

Perry. Phil. Mag. (5) 35, 1893.

Brodmann. W. A. 45 p. 159, 1891.

Graetz. W. A. 34 p. 25, 1888.

Roentgen. W. A. 22 p. 510, 1884.

Warburg und Sachs. W. A. 22 p. 518, 1884.

Cohen. W. A. 45 p. 666, 1892.

Arrhenius. Zeitschr. f. phys. Chem. 1 p. 285, 1887.

Н. Петровъ. Треніе жидкостей и машинъ. Извѣстія С.-П. Технол. Инст. 1885 г.—1886 С.-П.; Инженерный журн. 1883; № 1, 2, 3, 4; Ж. Ф. Х. О. 16 p. 14, 1884. Извѣстія Имп. Акад. Наукъ. 5, стр. 365, 1896.

Н. Е. Жуковскій. Гидродинамическая теорія тренія хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ. Ж. Ф. Х. О. 18 p. 209, 1886 г.

Smoluchowski. Wien. Sitzber. 102,a p. 1136, 1893.

Hagenbach. Pogg. Ann. 109 p. 385, 1860.

O. E. Meyer. Wied. Ann. 2 p. 394; 1877.

Schweidler. Wien. Sitzber. 104 p. 273, 1895.

Mallock. Proc. R. Soc. 45 p. 126, 1888.

Moore. Physical Review. III p. 321, 1896.

Linebarger. Amer. J, of. Sc. (4) 2 p. 331, 1896.

Н. Жуковскій. Приборъ для опредѣленія коеффиціента вязкости жидкостей. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 4 вып. 1, стр. 25, 1891 г.

Дальнѣйшая литература: Landolt, Tabellen p. 303, 1894.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Движеніе жидкостей.

§ 1. Установившееся движеніе жидкостей. Если въ данной жидкости происходятъ какія либо движенія, то каждая ея частица движется по нѣкоторой линіи, причемъ, вообще говоря, ея скорость будетъ непрерывно мѣняться. Движеніе называется установившимся или стаціонарнымъ, когда скорость въ произвольной данной точкѣ пространства постоянна по величинѣ и по направленію; она принадлежитъ въ послѣдовательные моменты времени различнымъ частицамъ жидкости, непрерывно притекающимъ, одна за другой, къ этой точкѣ, и продолжающимъ движеніе по одной и той же кривой, проходящей черезъ эту точку. Такую кривую, неизмѣнную пока сохраняется стаціонарность движенія, назовемъ линіей тока. Соотвѣтственно назовемъ трубкою тока струю, поверхность которой есть геометрическое мѣсто линій тока, проходящихъ черезъ точки какой либо замкнутой линіи.

Рис. 310.

Пусть MN, рис. 310, весьма тонкая трубка тока, изъ которой вырѣжемъ слой $abcd$, основаніе котораго σ, высота $ac = \xi$ и скорость v. Предположимъ, что на жидкость дѣйствуетъ во-первыхъ сила тяжести по вертикальному направленію OX, причемъ x координата разсматриваемаго малаго количества жидкости, и во-вторыхъ давленіе, которое для основанія ab обозначимъ черезъ p, а для cd черезъ $p + dp$. Когда жидкость $abcd$ перемѣстится на величину ξ, то работа силы тяжести будетъ равна $\sigma\xi\delta g dx$, гдѣ δ плотность жидкости; работа давленія равна $-\sigma dp.\xi$; вся произведенная работа должна равняться приращенію живой силы $\frac{1}{2}\sigma\xi\delta dv^2$.

Такимъ образомъ имѣемъ при отсутствіи внутренняго тренія:

$$\sigma\xi\delta g\, dx - \sigma\xi dp = \frac{1}{2}\sigma\xi\delta dv^2.$$

Раздѣливъ всѣ члены на $\sigma\delta\xi$, получаемъ

$$d\left\{gx - \frac{p}{\delta} - \frac{1}{2}v^2\right\} = 0$$

Отсюда слѣдуетъ, что величина въ скобкахъ остается постоянною во всѣхъ сѣченіяхъ данной трубки теченія, т. е. что

$$\frac{1}{2}v^2 - gx + \frac{p}{\delta} = \text{Const.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Для измѣренія скорости теченія воды въ рѣкахъ и каналахъ можетъ служить приборъ Darcy, изображенный на рис. 311. Онъ состоитъ изъ

двухъ вертикальныхъ трубокъ D и C, соединенныхъ наверху между собою и съ добавочною трубкою, при помощи которой можно изъ нихъ немного высосать воздухъ. Трубки D и C оканчиваются въ a и a', причемъ отверстіе a направлено противъ теченія; отверстіе же a' направлено внизъ, т.-е. перпендикулярно къ теченію. Вслѣдствіе этого вода будетъ стоять въ D выше, чѣмъ въ C. Разность h высотъ, которую легко измѣрить, если высасываніемъ воздуха приподнять, какъ изображено на рисункѣ, воду въ обѣихъ трубкахъ, служитъ мѣрою скорости v теченія воды; можно доказать, что $v^2 = kh$, гдѣ k постоянный множитель.

Рис. 311.

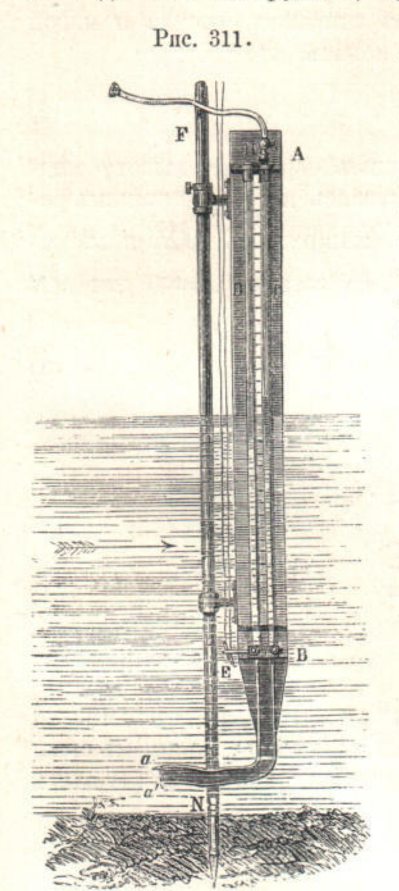
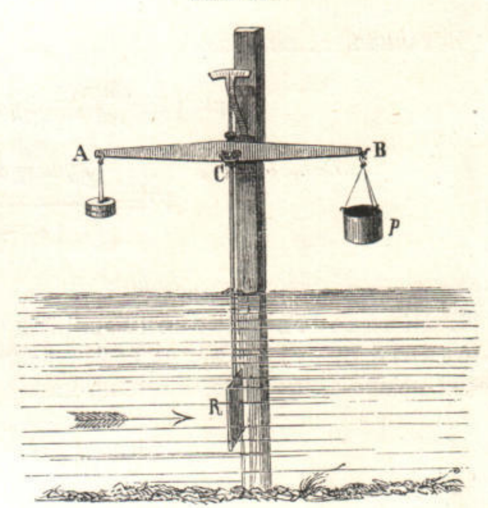


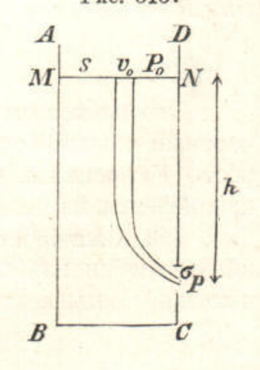
Рис. 312.



Въ приборѣ Poletti (рис. 312) измѣряется скорость v теченія воды тѣмъ грузомъ p, который уравновѣшиваетъ давленіе P воды на пластинку R; это давленіе пропорціонально v^2.

§ 2. Истеченіе жидкости изъ небольшого отверстія. Сосудъ $ABCD$ (рис. 313) наполненъ до MN жидкостью; требуется опредѣлить скорость V истеченія изъ отверстія, находящагося въ боковой стѣнкѣ или въ днѣ сосуда. Скорость V будетъ уменьшаться по мѣрѣ уменьшенія высоты уровня жидкости въ сосудѣ. Чтобы опредѣлить V для данной высоты уровня MN, предположимъ, что мы какимъ либо способомъ (притокомъ) удерживаемъ этотъ уровень неизмѣннымъ, такъ что въ сосудѣ устанавливается стаціонарное движеніе. Тогда можемъ приложить формулу (1) къ трубкѣ тока, начинающейся у поверхности жидкости,

Рис. 313.



или у другой горизонтальной плоскости MN. Пусть P_0 давленіе въ плоскости MN, s площадь MN, v_0 скорость въ MN, т.-е. скорость опусканія поверхности жидкости при отсутствіи притока. Для широкаго сосуда и малой площади σ отверстія величина v_0 мала. Легко понять, что

$$sv_0 = \sigma V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Наружное давленіе въ отверстіи обозначимъ черезъ P; высоту жидкаго столба надъ отверстіемъ черезъ h. Основываясь на (1), напишемъ равенство величинъ $\frac{1}{2}v^2 - gx + \frac{p}{\delta}$ для точекъ, лежащихъ въ MN, и въ отверстіи σ. Взявъ начало x—овъ въ плоскости MN, имѣемъ $x = 0$ для MN и $x = h$ для σ:

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{P_0}{\delta} = \frac{1}{2}V^2 - gh + \frac{P}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Вставимъ v_0 изъ (2):

$$V^2\left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2}\right) = 2gh + 2\frac{P_0 - P}{\delta},$$

$$V^2 = \frac{2gh + 2\frac{P_0 - P}{\delta}}{1 - \frac{\sigma^2}{s^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Разберемъ частные случаи.

I. Жидкость переходитъ подъ сильнымъ давленіемъ P_0 изъ одного сосуда въ другой, въ которомъ давленіе P. Вліяніемъ силы тяжести можно пренебречь; σ весьма мало сравнительно съ s. Тогда (4) даетъ

$$V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\delta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Эта формула тождественна съ (14) стр. 416, гдѣ только обозначенія другія.

II. Давленія P_0 и P равны между собою, σ весьма мало. Это случай вытеканія жидкости черезъ боковое отверстіе изъ открытаго сосуда; въ этомъ случаѣ

$$V = \sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Это извѣстная изъ элементарнаго курса формула Torriceli (1643), частный случай болѣе общаго выраженія (4); она показываетъ, что скорость V такая же, какъ и при свободномъ паденіи съ высоты h. Не останавливаемся на опытной повѣркѣ формулы Torricelli.

§ 3. Сжатіе струи. Количество Q жидкости, выливающейся въ единицу времени изъ малаго отверстія, не оказывается равнымъ $V\sigma$, оно значительно меньше этого и выражается формулою

$$Q = \varepsilon V \sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

гдѣ ε правильная дробь, равная

$$\varepsilon = 0{,}62 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Объясняется это тѣмъ, что струя, выйдя изъ отверстія, сжимается, и ея площадь поперечнаго сѣченія въ 0,62 меньше площади σ отверстія. Это знаменитое contractio venae, замѣченное еще Ньютономъ. По теоріи Bayer'а (1848) $\varepsilon = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}617$, что хорошо согласуется съ наблюденіемъ.

Сжатіе струи происходитъ отъ двухъ причинъ.

Во-первыхъ, частицы притекаютъ со всѣхъ сторонъ къ отверстію по кривымъ линіямъ (рис. 314), вслѣдствіе чего крайнія частицы выходятъ изъ отверстія по направленію, не перпендикулярному къ стѣнкѣ сосуда. Во-вторыхъ, поверхностное натяженіе дѣйствуетъ на струю въ мѣстѣ ея образованія подобно сжимающему кольцу. Isarn (1875) показалъ, что сжатіе водяной струи значительно уменьшается, и количество вытекающей воды соотвѣтственно увеличивается, если вблизи отверстія испаряется эфиръ, вслѣдствіе чего, какъ мы видѣли (стр. 460), уменьшается поверхностное натяженіе.

Рис. 314.

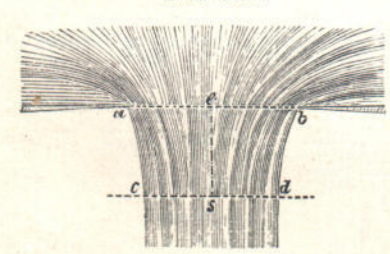
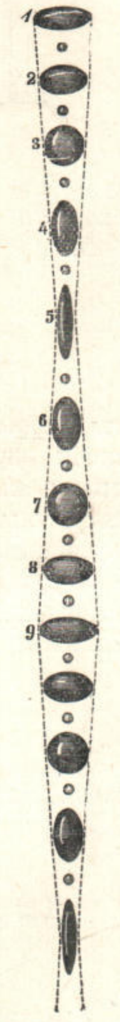


Рис. 315.



§ 4. Устройство жидкой струи. Вблизи отверстія жидкая струя воды прозрачна и гладка; на нѣкоторомъ разстояніи отъ отверстія она дѣлается непрозрачною, а сѣченіе ея періодически увеличивается и уменьшается. Оказывается, что въ этомъ мѣстѣ она перестаетъ быть сплошною и распадается на отдѣльныя большія капли, совершающія какъ бы пульсаціи, т.-е. принимающія во время паденія тѣ формы, которыя показаны на рис. 315, и которыя колеблются между удлиненнымъ и сплюснутымъ эллипсоидами вращенія. Между каждыми двумя большими каплями находится одна малая капля. Наблюдать можно эти капли напр. при моментальномъ освѣщеніи струи электрической искрой, путемъ моментальнаго фотографированія струи, стробоскопомъ и т. д.

Распаденіе струи на капли объясняется тою неустойчивостью жидкаго цилиндра, которая была разсмотрѣна на стр. 465. Тамъ же указана и причина образованія малыхъ промежуточныхъ капель.

Lullin изслѣдовалъ явленія, сопровождающія паденіе жидкой струи въ массу жидкости того же рода.

§ 5. Теченіе жидкости черезъ трубы. Когда жидкость подъ напоромъ течетъ черезъ горизонтальную трубу, то величина гидростатическаго дав-

ленія оказывается линейною функціей разстоянія отъ конца трубы; боковыя вертикальныя открытыя трубки, въ которыхъ жидкость свободно можетъ подниматься, даютъ возможность обнаружить это явленіе, какъ видно изъ рис. 316.

Рис. 316.

Если разность давленій въ началѣ и въ концѣ трубы равна P и длина трубы L, то величина $J=\frac{P}{L}$, т.-е. уменьшеніе напора на единицу длины называется паденіемъ давленія. Скорость V теченія, понятно, во всѣхъ частяхъ трубы одна и та же, зависящая отъ величины того полнаго сопротивленія R, которое жидкость встрѣчаетъ внутри трубы.

Для толстыхъ трубъ невозможно теоретически вычислить величину скорости V, вслѣдствіе крайней сложности задачи. Для круглыхъ трубъ были предложены эмпирическія формулы, а именно

$$\left.\begin{aligned} D &= aV + bV^2 \\ D &= aV^{\frac{3}{2}} + bV^2 \\ D &= cV^k \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

въ которыхъ D діаметръ трубы, a, b, c и k различныя постоянныя, зависящія впрочемъ по мнѣнію нѣкоторыхъ ученыхъ, отъ діаметра D. Мерчингъ нашелъ, что для воды и керосина первая изъ формулъ согласна съ результатами наблюденій, и что для обѣихъ жидкостей коеффиціентъ a увеличивается, b уменьшается съ возростаніемъ діаметра трубки.

Для болѣе тонкихъ трубокъ скорость V выражается формулою, отличающеюся отъ (4) прибавкою нѣкоторой величины R къ знаменателю. Такъ напр. для случая, къ которому относится формула (5), имѣемъ

$$V=\sqrt{\frac{2(P_0-P)}{\delta(1+R)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Для случая истеченія жидкости изъ открытаго сосуда по горизонтальной трубкѣ формула (6) Torricelli принимаетъ видъ

$$V=\sqrt{\frac{2gh}{1+R}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Для круглой трубки

$$R=k\frac{L}{D} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Величина k по Weissbach'у равна

$$k=0{,}01439+\frac{0{,}01716}{\sqrt{V}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

т.-е. сама зависитъ отъ скорости V. Позднѣйшія изслѣдованія Hamilton Smith'a (1884) привели къ еще болѣе сложной формулѣ.

Для капилярныхъ трубокъ вполнѣ рѣшается вопросъ о скорости истеченія жидкостей. Первое тщательное опытное изслѣдованіе принадлежитъ Poiseuille'у, который вывелъ изъ своихъ наблюденій, что объемъ Q жидкости, протекающей во время T черезъ капилярную трубку, пропорціоналенъ давленію P, а не $\sqrt{P}$, какъ получается для толстыхъ трубъ, см. (10); далѣе объемъ Q обратно пропорціоналенъ длинѣ L трубы, пропорціоналенъ четвертой степени діаметра D трубы и, конечно, пропорціоналенъ времени T. Такимъ образомъ получается формула Poiseuille'a, которую мы уже привели на стр. 517, см. (9),

$$Q = k\frac{PD^4}{L}T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

На стр. 518 была приведена болѣе точная теоретическая формула

$$Q = \frac{\pi P}{8\eta L}\left\{R^4 + 4\gamma R^3\right\}T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

въ которой η и γ коеффиціенты тренія и скольженія. При $\gamma = 0$ получается формула Poiseuille'a. Множитель k въ (14), обратно пропорціональный η, быстро увеличивается, когда температура повышается, такъ какъ η при этомъ быстро уменьшается, какъ мы видѣли въ § 5 предыдущей главы (стр. 521). Самъ Poiseuille вывелъ изъ своихъ опытовъ формулу для воды

$$k = k_0(1 + 0{,}03368t + 0{,}000221t^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

§ 6. Волны и вихри. Ученіе о движеніи жидкостей, гидродинамика, составляетъ особый отдѣлъ механики, который не можетъ войти въ нашъ курсъ. Ограничиваемся указаніемъ на нѣкоторыя явленія, которыя представляются особенно важными.

А. Волны. Колебательное движеніе поверхностныхъ частицъ жидкости вызываетъ всѣмъ знакомое явленіе распространяющихся волнъ, которое особенно тщательно было изучено братьями E. и W. Weber (1825). Частицы, лежащія у самой поверхности движутся, смотря по тому, какими причинами было вызвано волненіе, по вертикальнымъ прямымъ, или по замкнутымъ кривымъ, расположеннымъ въ вертикальныхъ плоскостяхъ. Въ движеніи участвуютъ частицы, лежащія на глубинѣ, превышающей до 350-ти разъ высоту волнъ. Скорость V распространенія волнъ, т.-е. ихъ кажущагося поступательнаго движенія, зависитъ отъ глубины h жидкаго слоя, на поверхности котораго образуются волны, отъ длины волны λ, которую здѣсь можно назвать и шириною волны, наконецъ отъ плотности жидкости δ и отъ поверхностнаго натяженія α. Наиболѣе общая формула для V имѣетъ видъ

$$V^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\delta\lambda}\right)\frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

гдѣ g ускореніе силы тяжести и

$$k = \frac{2\pi h}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Въ *C. G. S.* единицахъ $g=981$; для воды $\delta=1$. Далѣе мы имѣли для нея на стр. 492 значенія α при разныхъ температурахъ. Примемъ $\alpha=7{,}4\ \frac{\text{мм.}}{\text{мгр.}}$. Правила перехода отъ одной системы единицъ къ другой (стр. 227) даютъ $\alpha=0{,}074$ *C. G. S.* единицы.

Разсмотримъ интересные частные случаи.

I. Глубина h весьма велика. Тогда k весьма велико и потому

$$V^2=\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\alpha g}{\delta\lambda}\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (19)$$

Для воды $\delta=1$ и

$$V^2=g\left(\frac{\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (20)$$

Величина V имѣетъ минимумъ при $\lambda=2\pi\sqrt{\alpha}=2\pi\sqrt{0{,}074}=1{,}7$ см.; онъ равенъ 23 $\frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$. Болѣе короткія и болѣе длинныя волны движутся быстрѣе. Опыты Matthiesen'а (1877) и Ahrendt'а (1888) вполнѣ подтвердили эту формулу.

Для весьма короткихъ волнъ имѣемъ

$$V=\sqrt{\frac{2\pi\alpha g}{\lambda}}\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (21)$$

т.-е. $\lambda V^2=\text{Const}$.

Если поверхностное натяженіе α жидкости весьма мало, то (20) даетъ

$$V=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (22)$$

т.-е. $\frac{V^2}{\lambda}=\text{Const}$.

II. Глубина h не велика. Для волнъ, длина λ которыхъ велика, сравнительно съ глубиною h, имѣемъ k весьма малое. Тогда послѣдній множитель въ (17) равенъ $k=\frac{2\pi h}{\lambda}$, и эта формула даетъ (при большомъ λ)

$$V=\sqrt{gh}\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (23)$$

Движеніе воздуха (вѣтеръ) у поверхности жидкости можетъ значительно вліять на форму и скорость волнъ.

B. Вихри. Helmholtz'у принадлежитъ ученіе о вихревыхъ движеніяхъ въ идеальной жидкости, вязкость которой равна нулю. Онъ доказалъ слѣдующій рядъ теоремъ:

Вращательныя или вихревыя движенія не могутъ образоваться или уничтожиться въ идеальной жидкости. Разъ они существуютъ, они должны сохраниться вѣчно.

Частицы, участвующія во вращательномъ движеніи, всегда въ немъ участвуютъ, т.-е. когда вихревое движеніе переходитъ съ одного мѣста жидкости къ другому, то при этомъ перемѣщаются и самыя частицы, участвующія въ этомъ движеніи.

Геометрическое мѣсто осей вращенія частицъ даетъ линію, называемую вихревою линіей; всѣ частицы, лежащія на вихревой линіи постоянно на ней остаются.

Если черезъ всѣ точки контура малой площадки провести вихревыя линіи, то получается вихревая нить. Такая нить не можетъ имѣть свободнаго конца внутри жидкости; она должна или оканчиваться у поверхности жидкости, или быть сомкнутою. Въ послѣднемъ случаѣ имѣемъ вихревое кольцо. Илюстраціей могутъ служить всѣмъ извѣстныя кольца изъ табачнаго дыма.

Вихревая нить не можетъ быть перерѣзана; двѣ нити не могутъ пересѣчься, а потому петля въ нити, разъ она существуетъ, не можетъ раскрыться.

Во всякой вихревой нити произведеніе угловой скорости вращенія на площадь поперечнаго сѣченія нити есть величина постоянная вдоль всей нити; ее можно назвать вихревою силою нити.

Вихревая нить дѣйствуетъ на частицу внѣшней для нея жидкости, заставляя ее двигаться со скоростью, которая по величинѣ и по направленію равна силѣ, съ которой по закону Laplace'а дѣйствуетъ электрическій токъ, проходящій вдоль нити, и обладающій напряженіемъ, равнымъ вихревой силѣ нити, на магнитный полюсъ, обладающій единицей напряженія, и находящійся на мѣстѣ разсматриваемой частицы жидкости.

Вихревыя линіи дѣйствуютъ другъ на друга, вызывая разнаго рода поступательныя или вращательныя ихъ движенія. Вихревое кольцо имѣетъ равномѣрное поступательное движеніе по направленію движенія жидкости внутри кольца.

Въ неидеальной жидкости, обладающей вязкостью, возможно образованіе и исчезновеніе вихревыхъ движеній.

Основное свойство вихрей (въ идеальной жидкости), ихъ неуничтожаемость, привело W. Thomson'а (Lord Kelvin) къ его знаменитой теоріи вихревыхъ атомовъ, по которой атомы суть вихри, существующіе въ нѣкоторой всеміровой средѣ, обладающей свойствами идеальной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА.

Torricelli. Opera geometrica, часть 2. Флоренція, 1643.
Bernoulli. Hydrodynamica. Argentorati (Страсбургъ), 1738.
Euler. N. Comm. Ac. Petrop. (1) 14 p. 358, 1759.
Lagrange. Méc. analyt. 3 éd., 2 p. 250.
Bayer. Crelle's J. f. Baukunst. 25; C. R. 26, 1848.
Isarn. J. de phys. (1) 4 p. 167, 1875.
Мерчингъ. О движеніи жидкостей въ трубахъ. Спб. 1889. W. A. 39 p. 312. 1890.
Lullin. Arch. des sc. phys. et natur. (4) 2 p. 201, 1896.
Hamilton Smith. Dingl. Polyt. J. 252 p. 89, 1884.
Poiseuille. Mém. des savants étrangers. 9, 1846; C. R. 15, 1842.
E. H. Weber und W. Weber. Wellenlehre. Leipzig. 1825.
L. Matthiesen. W. A. 32 p. 626, 1887; 38 p. 118, 1889.

Ahrendt. Exner's Repert. d. Phys. 24 p. 318, 1888.
H. Helmholtz. Crelle's J. 55 p. 25, 1858; Wiss. Abhandl. 1 p. 101.
W. Thomson. Trans. R. Soc. Edinb. 25 p. 217, 1867.
Н. Е. Жуковскій. Реакція вытекающей и втекающей воды. Ж. Ф. Х. О. 14 стр. 470, 1882.
Д. К. Бобылевъ. Давленіе потока на двѣ плоскія стѣнки (клинъ). Ж. Ф. Х. О. 13 стр. 63, 1881.
Н. Е. Жуковскій. Движеніе твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородной капельной жидкостью. Ж. Ф. Х. О. 17 стр. 81, 231, 1885.
И. В. Мещерскій. Давленіе на клинъ въ потокѣ неограниченной ширины двухъ измѣреній. Ж. Ф. Х. О. 18 стр. 327, 1886.
Kirchhoff. Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelle's J. 70; 1869.
Rayleigh. Resistance of fluids. Phil. Mag. (5) 2 p. 430, 1876.
В. Л. Розенбергъ. Нѣсколько опытовъ вихревыхъ движеній. Ж. Ф. Х. О. 21 стр. 21, 1889.
Н. Е. Жуковскій. Работы по гидродинамикѣ. Ж. Ф. Х. О. 23 стр. 89, 1891.
Н. Ціолковскій. Давленіе жидкости на равномѣрно движущуюся плоскость. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 4, вып. 2, стр. 13, 1891.
Д. Горячевъ. Движеніе твердаго тѣла въ жидкости. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 5, вып. 2, стр. 59, 1893.
С. Чаплыгинъ. Движеніе твердаго тѣла въ жидкости. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 6, вып. 2, стр. 20, 1894.
В. А. Стекловъ. Движеніе твердаго тѣла въ жидкости. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 7, вып. 2, стр. 10, 1895.
А. Ляпуновъ. Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости, Спб. 1884.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Коллоиды.

§ 1. Коллоиды. Graham первый указалъ на существованіе особаго рода состоянія вещества, отличающагося отъ состояній жидкаго и твердаго, и названнаго имъ коллоидальнымъ. Онъ противоставляетъ коллоиды и кристаллоиды, «два различныхъ міра вещества» по его выраженію. Основное свойство коллоидовъ заключается въ ихъ неспособности кристаллизоваться, между тѣмъ какъ кристаллоиды легко кристаллизуются. Такъ какъ это однако не единственная отличительная черта, и одно и то же (по химическому составу) тѣло, напр. даже серебро, можетъ иногда обладать свойствами кристаллоида, а иногда — коллоида, то приходится говорить о «коллоидальномъ состояніи» того или другого вещества. Между прочимъ растворы коллоидовъ весьма часто имѣютъ студенистую консистенцію, представляя именно нѣчто среднее между жидкими и твердыми тѣлами.

Къ коллоидамъ относится бѣлокъ, альбуминъ, крахмалъ, декстринъ, желатина, клей, карамель, гликогенъ, гумми-арабикъ, агаръ-агаръ (японская растительная желатина), таннинъ, кремневая кислота, окись желѣза, гидраты кремнезема и алюминія, вольфрамовая кислота (H_2WO_4) и др.

Способность свертываться при повышеніи температуры или при соприкосновеніи съ нѣкоторыми веществами есть также признакъ коллоидальнаго состоянія.

Carey Lea открылъ особое состояніе серебра, которое онъ считаетъ за коллоидальное; Barus и Schneider, оспаривая мнѣніе Carey Lea, полагаютъ, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ серебромъ, распредѣленнымъ въ жидкости въ состояніи крайняго измельченія.

§ 2. Диффузія и осмосъ коллоидовъ. Діализъ. Въ § 1 главы VII стр. 506 уже было указано, что альбуминъ и карамель обладаютъ весьма малою способностью диффундировать изъ раствора въ соприкасающуюся съ нимъ чистую воду. Оказывается, что въ этомъ заключается одинъ изъ главныхъ признаковъ коллоидальнаго состоянія: всѣ коллоиды весьма медленно диффундируютъ не только непосредственно, но и черезъ коллоидальныя перепонки, каковы бумага, пергаментъ, животный пузырь и т. д.

Наоборотъ, коллоиды весьма легко пропускаютъ черезъ себя кристаллоиды. Если налить теплый растворъ желатины и мѣднаго купороса въ высокій стаканъ и дать ему охладиться, т.-е. принять состояніе довольно крѣпкаго студня, и затѣмъ надъ нимъ помѣстить такой же студень, но безъ купороса, то синяя окраска нижней части мало-по-малу распространится вверхъ. То же самое наблюдается, если твердые кристаллы помѣстить внутри затвердѣвшаго раствора желатины.

На малой способности коллоидовъ къ осмосу основанъ особый способъ отдѣленія кристаллоидовъ отъ коллоидовъ изъ раствора, содержащаго и тѣ, и другія вещества. Такой способъ называется діализомъ, а приборъ «діализаторомъ». Онъ изображенъ на рис. 317. Сосудъ BC содержитъ чистую воду; сосудъ A, опирающійся на нѣсколько деревяшекъ, и содержащій жидкость, которую желаютъ подвергнуть діализу, обтянутъ снизу, вмѣсто дна, листомъ непроклеенной бумаги, которая на короткое время была погружена въ сѣрную кислоту. Если такую бумагу намочить, то она вытягивается и дѣлается полупрозрачной; иногда ее покрываютъ еще слоемъ бѣлка, который нагрѣваніемъ заставляютъ свернуться. Черезъ такую бумагу быстро диффундируютъ кристаллоиды, между тѣмъ какъ коллоиды остаются въ растворѣ.

Рис. 317.

Осмотическое давленіе (стр. 510) растворенныхъ коллоидовъ весьма незначительное, какъ показали опыты Pfeffer'a (1877) съ полупроницаемой перепонкой изъ желѣзисто-синеродистой мѣди (стр. 511). Такъ осмотическое давленіе раствора гумми-арабика въ 10 разъ меньше давленія раствора сахара при одинаковомъ процентномъ содержаніи того и другого. По формулѣ $pv = 0{,}0815T$, см. (8) стр. 514, можно найти объемъ v растворенной граммъ-молекулы коллоида, а слѣд. и его молекулярный вѣсъ. Растворъ 24,67 гр. H_2WO_4 въ литрѣ воды даетъ при 17° давленіе $p = 25{,}2$ см.

ртутнаго столба; отсюда легко получается молекулярный вѣсъ 1700, что указываетъ на составъ частицы $(H_2WO_4)_7$.

Согласно съ тѣмъ, что было сказано въ концѣ § 3 главы VII (стр. 512) оказывается по опытамъ Tammann'a (1887), что упругость пара раствора коллоида мало отличается отъ упругости пара чистой воды, и по опытамъ Сабанѣева и Александрова (1892), что растворенные коллоиды весьма мало понижаютъ точку замерзанія воды.

Измѣренія осмотическаго давленія даютъ для многихъ коллоидовъ, какъ упомянуто, весьма большія числа молекулярнаго вѣса; они превышаютъ 30,000 для крахмала, кремневой кислоты, окиси желѣза и др. Такіе коллоиды Сабанѣевъ называетъ высшими или типичными. Крайняя сложность ихъ частицъ имѣетъ послѣдствіемъ легкую измѣняемость ихъ свойствъ, вѣроятно вызываемую перемѣною въ строеніи частицы. Если охладить растворъ типичнаго коллоида до затвердѣванія, и затѣмъ его вновь нагрѣть, то онъ переходитъ въ нерастворимое состояніе и осаждается изъ раствора, между тѣмъ какъ коллоиды съ меньшимъ молекулярнымъ вѣсомъ при нагрѣваніи затвердѣвшаго раствора вновь даютъ прозрачный растворъ (Любавинъ, 1890).

Де-Мецъ опредѣлялъ коеффиціентъ сжатія нѣкоторыхъ коллоидовъ, см. стр. 450. Для $10^6\beta$ онъ нашелъ числа:

	δ	$10^6\beta$
Растворъ гумми-арабика въ водѣ	1,041	44,59
Желатинированный клей	1,005	48,49
Растворъ канадскаго бальзама въ водѣ . . .	0,950	57,21
Растворъ метафосфорной кислоты въ водѣ . .	1,545	19,663.

Здѣсь δ плотность вещества.

ЛИТЕРАТУРА.

Graham. Ann. de chim. et phys. (3) 65, 1862; Lieb. Ann. 121 p. 1, 1862.
Pfeffer. Osmotische Untersuchungen. Leipzig. 1877.
Сабанѣевъ и *Александровъ.* Ж. Ф. Х. О. 23, Отд. Хим. стр. 7, 1891.
Tammann. Mém. de l'Acad. de St. Petersb. 35 № 9, 1887.
Любавинъ. Chem. Zentralbl. 1 p. 515, 1890.
De-Metz. W. A. 41 p. 663, 1890.
Barus und Schneider. Ztschr. phys. Chem. 8 p. 278, 1891.
Barus. Sill. Journ. 48 p. 451, 1894.
Carey Lea. Ztschr. für anorgan. Chemie 7 p. 341; Sill. Journ. 48 p. 343, 1894.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

УЧЕНІЕ О ТВЕРДЫХЪ ТѢЛАХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Вещество въ твердомъ состояніи.

§ 1. Характеристика твердаго состоянія вещества. Тѣла твердыя отличаются отъ жидкихъ прежде всего тѣмъ, что они обладаютъ опредѣленною формою, которая, вообще говоря, можетъ быть измѣнена только подъ вліяніемъ внѣшнихъ, дѣйствующихъ на тѣло силъ. Жидкія тѣла, какъ мы видѣли, не обладаютъ опредѣленной формой, сохраняя при данныхъ условіяхъ только неизмѣнный, присущій имъ объемъ. Это показываетъ, что даннымъ условіямъ соотвѣтствуетъ опредѣленное среднее разстояніе между частицами жидкости, измѣненіе (уменьшеніе) котораго требуетъ воздѣйствія сравнительно весьма большихъ внѣшнихъ силъ. Измѣненіе же взаимнаго расположенія частицъ можетъ происходить въ неограниченномъ размѣрѣ подъ вліяніемъ весьма малыхъ внѣшнихъ силъ. Чѣмъ больше внутреннее треніе или вязкость жидкости, тѣмъ труднѣе происходитъ внутреннее перерасположеніе частицъ. Жидкости съ очень большимъ внутреннимъ треніемъ составляютъ какъ бы переходъ къ тѣламъ твердымъ, въ которыхъ не только среднее разстояніе, но и относительное расположеніе частицъ вообще не можетъ подвергаться непрерывно возростающимъ измѣненіямъ подъ вліяніемъ малыхъ внѣшнихъ силъ. Впрочемъ существуютъ твердыя тѣла, въ которыхъ замѣтенъ, какъ бы остатокъ свойства жидкости, обладающей опредѣленною, хотя и весьма большою вязкостью. Не говоря о томъ, что подъ вліяніемъ огромныхъ внѣшнихъ силъ большинство, а можетъ быть и всѣ твердыя тѣла обнаруживаютъ, какъ мы увидимъ, свойство текучести, оказывается, что въ нѣкоторыхъ тѣлахъ непрерывное, хотя и крайне медленное измѣненіе формы вызывается продолжительнымъ дѣй-

ствіемъ даже весьма небольшихъ силъ. Въ видѣ примѣра можно указать на то, что стеклянная палочка, подпертая въ горизонтальномъ положеніи около своихъ концовъ, претерпѣваетъ постоянное измѣненіе формы, мало-по-малу искривляясь подъ вліяніемъ сравнительно ничтожной силы, а именно своего же вѣса.

Внѣшнія силы вызываютъ опредѣленныя перемѣщенія частицъ и слѣд. измѣненія формы твердаго тѣла, вполнѣ или отчасти исчезающія вмѣстѣ съ этими силами. Относящіяся сюда явленія упругости мы разсмотримъ въ особой главѣ.

Мы допускаемъ, что какъ въ газообразныхъ и жидкихъ, такъ и въ твердыхъ тѣлахъ частицы находятся не въ покоѣ, но въ состояніи весьма быстраго и сложнаго движенія, причемъ однако каждая частица не удаляется изъ нѣкоторой малой части пространства, расположенной вокругъ ея средняго положенія. Впрочемъ существуютъ причины допустить и для твердыхъ тѣлъ возможность нѣкоторыхъ, хотя и весьма медленныхъ измѣненій средняго положенія частицъ, даже безъ вліянія внѣшнихъ силъ. Дѣло въ томъ, что расположеніе частицъ твердаго тѣла можетъ быть весьма различное и соотвѣтственно этому бываетъ различна и т. наз. «структура» тѣла, которую можно назвать физическою, для отличія отъ структуры химической, опредѣляемой расположеніемъ атомовъ въ химической молекулѣ. У жидкостей ничего подобнаго физической структурѣ не существуетъ; ихъ свойства вполнѣ опредѣляются химическимъ составомъ и физическими условіями. Свойства же твердыхъ тѣлъ, кромѣ того, зависятъ еще отъ спеціальнаго въ каждомъ данномъ случаѣ распредѣленія частицъ, т.-е. отъ ихъ структуры.

Существуютъ случаи, когда безъ замѣтнаго дѣйствія внѣшнихъ силъ тѣ или другія свойства твердыхъ тѣлъ мало-по-малу измѣняются, что и можетъ быть объяснено только постепеннымъ, хотя и очень медленнымъ измѣненіемъ структуры, а это въ свою очередь указываетъ на перераспредѣленіе частицъ, измѣнившихъ свои среднія положенія. Такому измѣненію структуры способствуютъ внѣшнія причины, хотя бы временно увеличивающія удобоподвижность частицъ, каковы напр. сотрясенія. Въ видѣ примѣра можно указать на постепенное измѣненіе структуры осей желѣзнодорожныхъ вагоновъ, которая изъ волокнистой переходитъ въ болѣе хрупкую кристаллическую.

Внѣшнія силы, стремящіяся измѣнить распредѣленіе частицъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и форму тѣла, встрѣчаютъ сопротивленіе, причина котораго кроется въ особаго рода силахъ, препятствующихъ всякому измѣненію разстоянія между частицами. Эти силы, о которыхъ мы въ предыдущихъ отдѣлахъ упоминали неоднократно, называются молекулярными или междучастичными или также силами сцѣпленія. Онѣ существуютъ и при нормальномъ распредѣленіи частицъ, мѣшая тѣлу распасться на тѣ частицы, изъ которыхъ оно состоитъ; но главнымъ образомъ онѣ обнаруживаются при всякомъ измѣненіи расположенія частицъ, которому онѣ препятствуютъ. Въ чемъ заключается сущность силъ сцѣпленія, какъ слѣдуетъ понимать ихъ происхожденіе и, главное, по какому закону происходитъ ихъ дѣйствіе — это

вопросы, на которые современная наука не можетъ дать удовлетворительнаго отвѣта. Во всякомъ случаѣ и въ твердыхъ тѣлахъ эти силы дѣйствуютъ лишь на весьма малыхъ разстояніяхъ. Поэтому части сломаннаго твердаго тѣла, при сложеніи и даже сильномъ сдавливаніи, вообще говоря, вновь не сращиваются. Такое сращиваніе происходитъ однако при весьма огромныхъ давленіяхъ, когда достаточное сближеніе частей вызываетъ полное развитіе молекулярныхъ силъ между частицами.

Частицы твердыхъ тѣлъ, находясь въ движеніи, непрерывно сталкиваются между собою и притомъ вѣроятно еще чаще частицъ жидкостей. «Кинетическая теорія твердыхъ тѣлъ» находится, однако, пока еще въ зародышѣ. Поверхностныя частицы твердыхъ тѣлъ, какъ и въ жидкостяхъ, но несравненно рѣже, могутъ при исключительно благопріятныхъ условіяхъ, вылетѣть изъ массы тѣла, иначе говоря, твердое тѣло можетъ непосредственно испаряться. Возможно, что такое испареніе постоянно происходитъ на поверхности всѣхъ твердыхъ тѣлъ, но въ столь незначительной степени, что убыль массы даже въ большой промежутокъ времени не можетъ быть замѣчена. Бываютъ однако случаи, когда это испареніе дѣлается замѣтнымъ, хотя бы для обонянія.

Запасъ энергіи, заключающейся въ твердомъ тѣлѣ, состоитъ изъ нѣсколькихъ частей: кинетическая энергія движенія частицъ, интрамолекулярная энергія движенія атомовъ и потенціальная энергія расположенія частицъ.

Нѣкоторыми особыми свойствами обладаютъ **тѣла сыпучія**, состоящія изъ большого числа малыхъ твердыхъ частицъ, не связанныхъ между собою, если сыпучее вещество вполнѣ сухо. Форма даннаго количества сыпучаго вещества сравнительно легко мѣняется подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ. Ѳ. Ѳ. Петрушевскій подробно изслѣдовалъ правильныя формы, которыя принимаютъ сыпучія тѣла въ зависимости отъ очертаній пластинокъ, на которыхъ они помѣщаются. Отчасти относятся сюда же изслѣдованія Н. Е. Жуковскаго о вліяніи давленія на насыщенные водою пески.

§ 2. Кристаллическое и аморфное состоянія вещества [1]). Твердое вещество обладаетъ способностью принимать, при нѣкоторыхъ условіяхъ, форму опредѣленныхъ многогранниковъ; въ этомъ случаѣ тѣла называются кристаллами. Каждый кристаллъ, ограниченный плоскостями, представляетъ собою отдѣльный индивидуумъ, цѣльность котораго обусловливается наличностью всѣхъ плоскостей, реберъ и многогранныхъ угловъ. Мы уже видѣли (стр. 532), что коллоиды не обладаютъ способностью кристаллизоваться; что касается жидкостей, то до недавняго времени не существовало представленія о «жидкихъ кристаллахъ», ибо жидкости, вообще не обладающія опредѣленною формою, конечно и нельзя было представить себѣ въ видѣ кристалловъ. Однако въ 1890 г. O. Lehmann ввелъ понятіе о капельножидкихъ кристаллахъ, доказавъ, что при опредѣленныхъ условіяхъ маленькія капли нѣкоторыхъ жидкостей могутъ обладать свойствами, которыя, помимо формы, считаются также характерными именно для кри-

---

[1]) Статьи о кристаллахъ имѣлъ любезность просмотрѣть проф. С. Ѳ. Глинка.

сталлическаго состоянія вещества. Эти весьма интересныя наблюденія требуютъ, однако, дальнѣйшихъ изслѣдованій и провѣрки.

Вещество можетъ принимать кристаллическую форму при переходѣ изъ жидкаго или газообразнаго состоянія въ твердое; въ первомъ случаѣ оно можетъ быть или растворено въ другой жидкости, или находиться въ расплавленномъ состояніи. Выдѣленіе кристалла изъ жидкости проще всего происходитъ при пониженіи температуры, или при испареніи жидкости; но и при химическомъ или электролитическомъ выдѣленіи вещества, оно также иногда получается непосредственно въ кристаллическомъ состояніи. Кристаллы способны рости, т.-е. увеличиваться въ объемѣ, сохраняя форму опредѣленнаго многогранника; самое образованіе ихъ происходитъ путемъ постепеннаго роста первоначально образовавшагося какъ бы зародыша кристалла, на поверхность котораго осаждается изъ окружающей среды растворенное вещество. Кристаллическому состоянію противоставляютъ аморфное, при которомъ вещество, даже въ мельчайшихъ доступныхъ наблюденію частяхъ, не обнаруживаетъ «кристаллической структуры».

Выдѣленіе кристалловъ изъ растворовъ иногда сопровождается испусканіемъ свѣта, который, можетъ быть, является замѣтнымъ признакомъ электрическихъ явленій, происходящихъ во время кристаллизаціи.

§ 3. Системы кристалловъ. Формы кристалловъ весьма разнообразны; но во всѣхъ случаяхъ они представляются выпуклыми многогранниками. Числа F граней, K ребръ и E угловъ связаны извѣстнымъ соотношеніемъ $F+E=K+2$. Особая наука, кристаллографія, играющая важную роль въ минералогіи и химіи, имѣетъ предметомъ геометрическое изученіе и группировку формъ кристалловъ.

Здѣсь мы можемъ ограничиться самымъ поверхностнымъ указаніемъ на раздѣленіе кристалловъ на шесть системъ въ зависимости отъ внѣшней формы, т.-е. отъ расположенія плоскостей, которыми они ограничены.

Мы совершенно опускаемъ вопросъ о т. наз. поясахъ, образуемыхъ каждый совокупностью граней, пересѣкающихся по параллельнымъ прямымъ. Не останавливаемся также на вопросѣ о степени симметріи различныхъ кристаллическихъ формъ, которая служитъ руководящею нитью для опредѣленія системъ кристалловъ.

Простѣйшій способъ опредѣленія шести главныхъ системъ кристаллическихъ формъ (которыя распадаются на 32 группы) заключается въ слѣдующемъ. Если изъ какой-либо точки внутри кристалла провести координатныя оси параллельно нѣкоторымъ тремъ существующимъ или кристаллографически возможнымъ гранямъ кристалла, то плоскость, совпадающая съ нѣкоторою четвертою гранью, отсѣчетъ отъ этихъ осей отрѣзки, которые мы обозначимъ черезъ a, b и c. Положимъ, что другая, пятая, грань отсѣчетъ отрѣзки ma, nb и pc; въ такомъ случаѣ коэффиціенты m, n и p суть раціональныя числа для всѣхъ возможныхъ граней; это законъ, открытый въ 1781 г. Haüy. Системы кристалловъ опредѣляются относительнымъ расположеніемъ «кристаллографическихъ» осей и отношеніемъ ихъ «длинъ», т.-е. чиселъ a, b и c. Такое дѣленіе впервые было предложено Weiss'омъ (1809). Шесть системъ кристалловъ суть слѣдующія.

I. Правильная система. Она характеризуется тремя взаимно перпендикулярными равными осями (рис. 318); отношеніе $a : b : c = 1$.

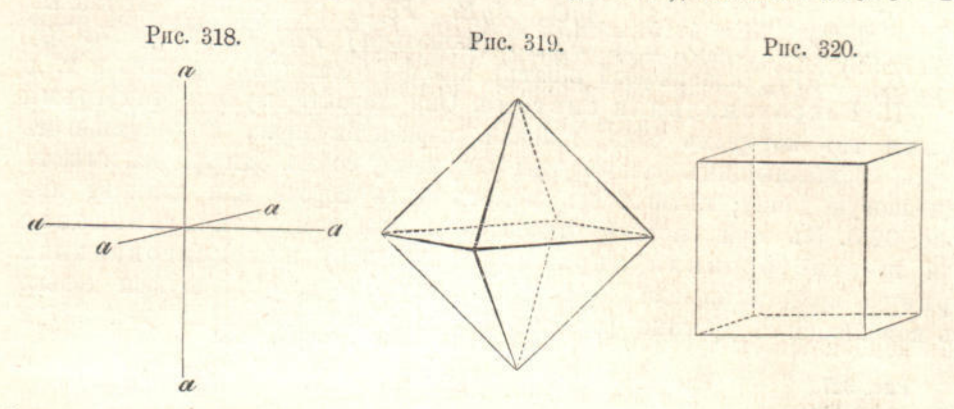


Рис. 318. Рис. 319. Рис. 320.

Сюда относятся прежде всего правильный октаэдръ (рис. 319) и кубъ или гексаэдръ (рис. 320). Болѣе сложную форму представляетъ ромбическій додекаэдръ или двѣнадцатигранникъ, изображенный на рис. 321.

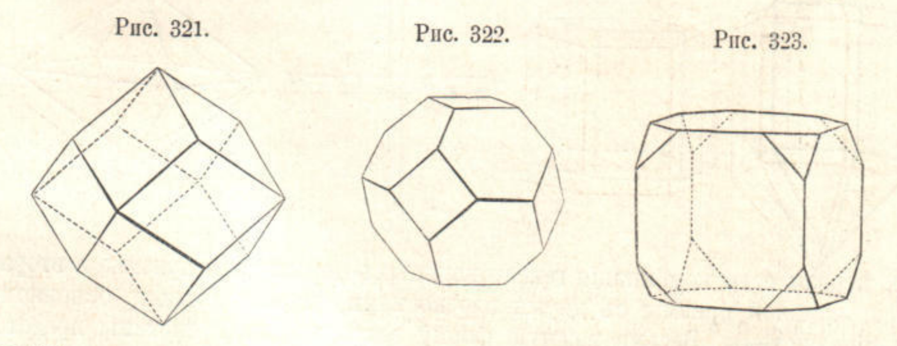


Рис. 321. Рис. 322. Рис. 323.

Нѣкоторыя формы получаются изъ комбинаціи двухъ формъ болѣе простыхъ.

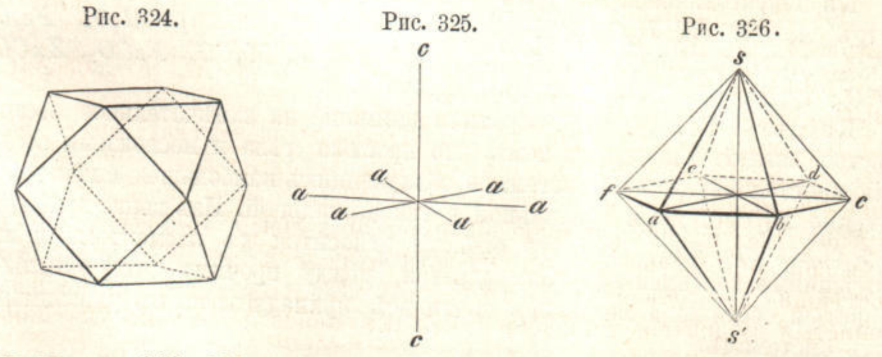


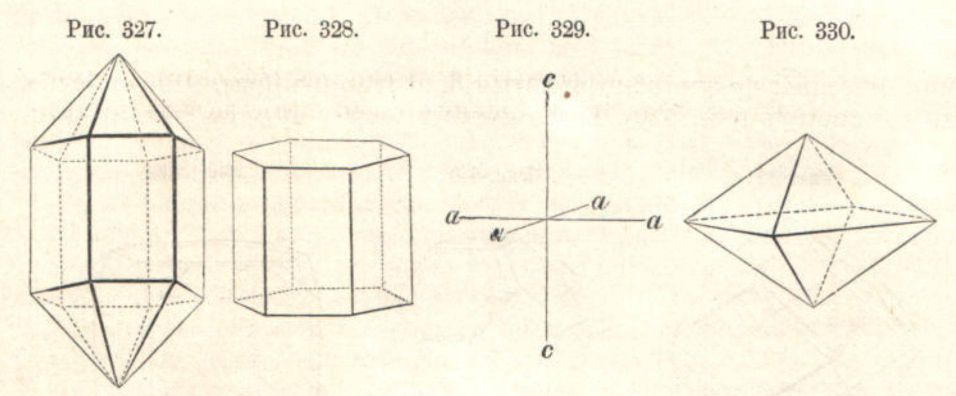
Рис. 324. Рис. 325. Рис. 326.

Такъ на рис. 322, 323 и 324 изображены комбинаціи октаэдра и куба; въ первомъ преобладаютъ грани октаэдра, во второмъ грани куба, въ третьемъ грани того и другого одинаково развиты.

Въ правильной системѣ кристаллизуются между прочимъ слѣдующія вещества: *Fe*, *Pb*, *Cu*, *Ag*, *Hg*, *Au*, *Pt* и друг., *C* (алмазъ), *PbS*, Ag_2S, *CoS*, Sb_2O_3, *NaCl* (кубъ), *AgCl*, *AgBr*, Fe_3O_4 (магнитный желѣзнякъ, октаэдръ), *ZnS*, Cu_2O, *KCl*, NH_4Cl (нашатырь), FeS_2 (пиритъ), $NaClO_3$, $(PbNO_3)_2$, $CaFl_2$ (плавиковый шпатъ), квасцы (октаэдръ), гранатъ и т. д.

II. Гексагональная система. Она характеризуется четырьмя осями, изъ которыхъ одна, главная, перпендикулярна къ остальнымъ тремъ, составляющимъ равные углы (60°) между собою. Эти три оси имѣютъ одинаковую длину; главная ось можетъ быть короче или длиннѣе ихъ (рис. 325). Къ этой системѣ относится прежде всего гексагональная или шестисторонняя пирамида (рис. 326) и гексагональная призма, представляющая форму незамкнутую, и встрѣчающуюся только въ комбинаціи съ другими формами. Таковыя изображены на рис. 327 и

Рис. 327. Рис. 328. Рис. 329. Рис. 330.



328; первая есть комбинація гексагональныхъ пирамиды и призмы, а вторая гексагональной призмы съ двумя плоскостями, параллельными основному сѣченію системы. Весьма важную форму гексагональной системы представляетъ ромбоэдръ; но его мы причислимъ къ формамъ геміэдрическимъ, о которыхъ будетъ сказано ниже.

Къ гексагональной системѣ относятся кристаллы слѣдующихъ веществъ: *As*, *Sb* *Bi*, H_2O (ледяные кристаллы, снѣжинки), Al_2O_3, Fe_2O_3, $NaNO_3$, $CaCO_3$ (исландскій шпатъ, ромбоэдръ), $MgCO_3$, $FeCO_3$, $ZnCO_3$, $MnCO_3$, турмалинъ, SiO_2 (кварцъ), *HgS* и т. д.

Retgers, Rinne и др. обратили вниманіе на замѣчательное обстоятельство, заключающееся въ томъ, что простыя тѣла и несложныя соединенія кристаллизуются въ системахъ, обладающихъ наибольшею симметріею, а именно въ системахъ правильной и гексагональной. Изъ выше приведенныхъ списковъ видно, что это отчасти относится къ элементамъ и ихъ простѣйшимъ соединеніямъ. Оказывается, между прочимъ, что окислы и сѣрнистыя соединенія металловъ почти всѣ принадлежатъ къ указаннымъ двумъ системамъ.

III. Квадратная или тетрагональная система. Въ ней три оси, взаимно перпендикулярныя, изъ которыхъ двѣ равны между собою, а третья, главная ось, можетъ быть короче или длиннѣе двухъ остальныхъ

(рис. 329). Важнѣйшую форму представляетъ октаэдръ съ квадратнымъ основаніемъ, ограниченный восьмью одинаковыми равнобедренными треугольниками. Смотря по тому, будетъ ли главная ось короче или длиннѣе двухъ другихъ, получаются формы, изображенныя на рис. 330 и 331. При безконечномъ удлиненіи главной оси получается квадратная призма, которая встрѣчается только въ комбинаціяхъ.

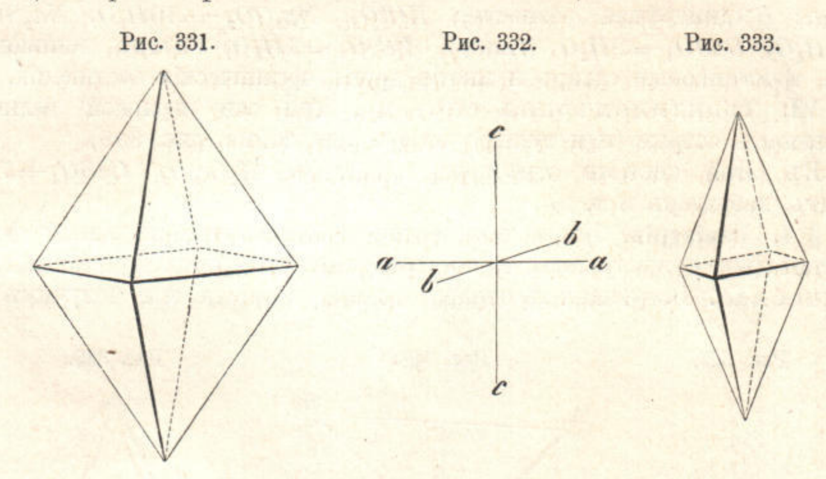


Рис. 331. Рис. 332. Рис. 333.

Въ квадратной системѣ кристаллизуются: Sn, SnO_2, Hg_2Cl_2, $CuFeS_2$ (колчеданъ), сѣрнокислый хининъ, мочевина и т. д.

IV. Ромбическая система. Всѣ три оси хотя еще взаимно перпендикулярны, но неодинаковой величины (рис. 332). Главнѣйшая форма ромбическій октаэдръ (рис. 333), ограниченный восьмью

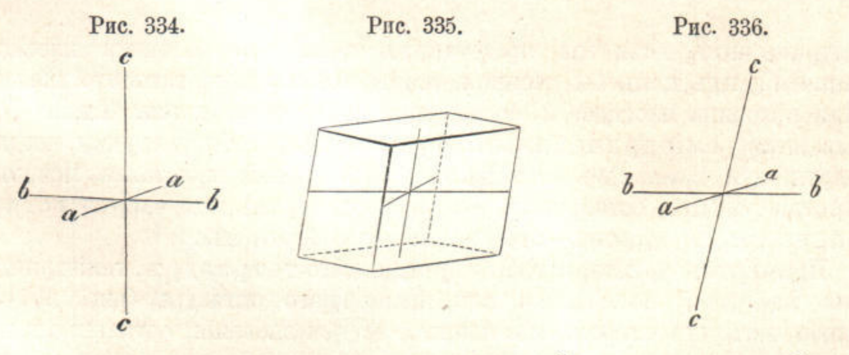


Рис. 334. Рис. 335. Рис. 336.

неравносторонними треугольниками, которые всѣ равны между собою. Изъ этой формы выводятся ромбическая призма и различныя комбинаціи съ плоскостями, перпендикулярными или къ главной оси, или къ одной изъ двухъ другихъ осей, которыя суть діагонали ромба, служащаго основаніемъ.

Въ этой системѣ кристаллизуется весьма большое число минераловъ и искусственно приготовляемыхъ веществъ, напр. S, Cu_2S, $CaCO_3$ (арагонитъ), KNO_3, K_2SO_4, $CaSO_4$ (ангидритъ), $MgSO_4 + 7H_2O$, $ZnSO_4 + 7H_2O$, $PbSO_4$, топазъ, тяжелый шпатъ ($Ba\,SO_4$) и т. д.

V. Одноклиномѣрная система характеризуется тѣмъ, что двѣ оси *aa* и *bb* (рис. 334) взаимно перпендикулярны, а третья *cc* наклонена къ ихъ плоскости, оставаясь при этомъ перпендикулярной къ *bb*. На рис. 335 изображена одноклиномѣрная призма и показано положеніе въ ней кристаллографическихъ осей.

Къ одноклиномѣрной системѣ относятся кристаллы слѣдующихъ веществъ: S (диморфная разность), $KClO_3$, $Na_2CO_3 + 10H_2O$, $Na_2SO_4 + + 10H_2O$, $CaSO_4 + 2H_2O$ (гипсъ), $FeSO_4 + 7H_2O$, слюда, винная кислота, тростниковый сахаръ и многія другія органическія соединенія.

VI. Триклиномѣрная система. Три оси неравной величины составляютъ острые (или тупые) углы между собою (рис. 336).

Къ этой системѣ относятся кристаллы $K_2Cr_2O_7$, $CuSO_4 + 7H_2O$, альбитъ, лабрадоръ и т. д.

§ 4. Геміэдрія. Когда всѣ грани, соотвѣтствующія данной формѣ, дѣйствительно существуютъ, то мы говоримъ, что форма кристалла голоэдрическая. Встрѣчаются однако формы, которыя мы получимъ изъ

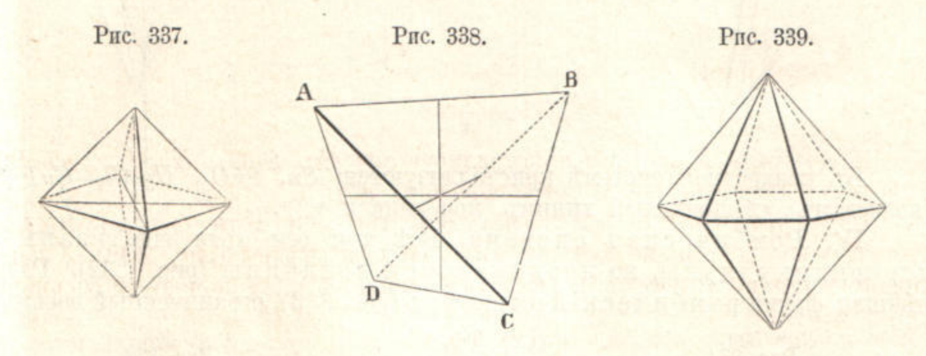


Рис. 337. Рис. 338. Рис. 339.

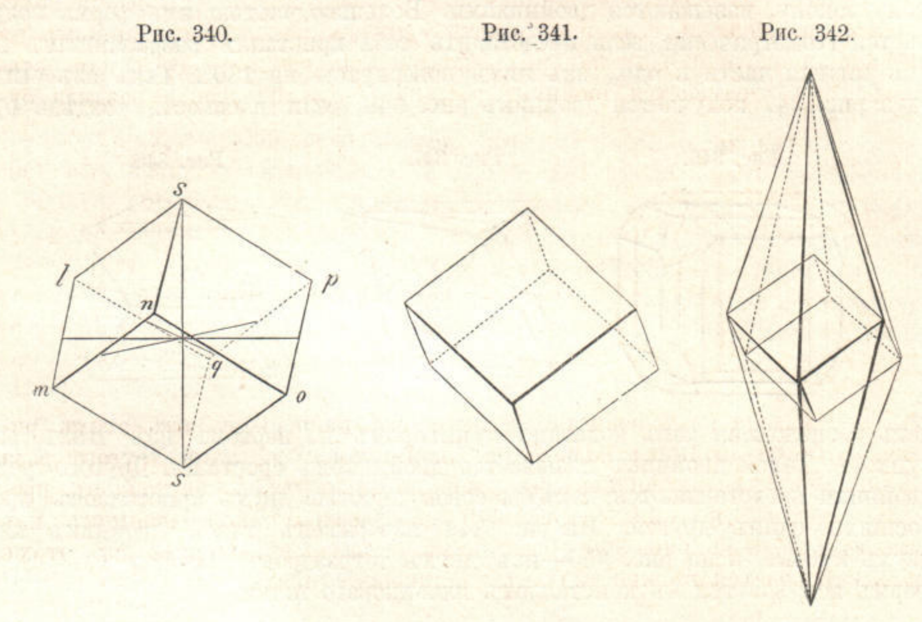
голоэдрическихъ, если мы представимъ себѣ, что половина плоскостей ограниченія ихъ какъ бы расширяется во всѣ стороны, такъ что, наконецъ, другая половина плоскостей совершенно ими подавляется. Такія формы называются геміэдрическими. Бываютъ болѣе рѣдкіе случаи, когда три четверти, или даже семь восьмыхъ всѣхъ граней кристалла исчезаютъ, вслѣдствіе развитія остальныхъ. Въ первомъ случаѣ получаются тетартоэдрическія, во второмъ—огдоэдрическія формы.

Примѣромъ можетъ служить прежде всего тетраэдръ, геміэдрическая форма (рис. 338), получаемая изъ правильнаго октаэдра (рис. 337) при развитіи четырехъ сторонъ послѣдняго до исчезновенія остальныхъ четырехъ. Такъ рис. 338 получается, когда въ октаэдрѣ разовьются изъ нижнихъ сторонъ передняя лѣвая и задняя правая, а изъ верхнихъ сторонъ—передняя правая и задняя лѣвая.

Изъ гексагональной голоэдрической формы шестигранной пирамиды (рис. 339) получается геміэдрическая форма ромбоэдра, изображеннаго на рис. 340, когда расширятся шесть сторонъ, въ томъ числѣ нижняя передняя средняя и верхнія переднія боковыя; если же расширятся другія шесть сторонъ, то возникнетъ ромбоэдръ, расположеніе котораго показано

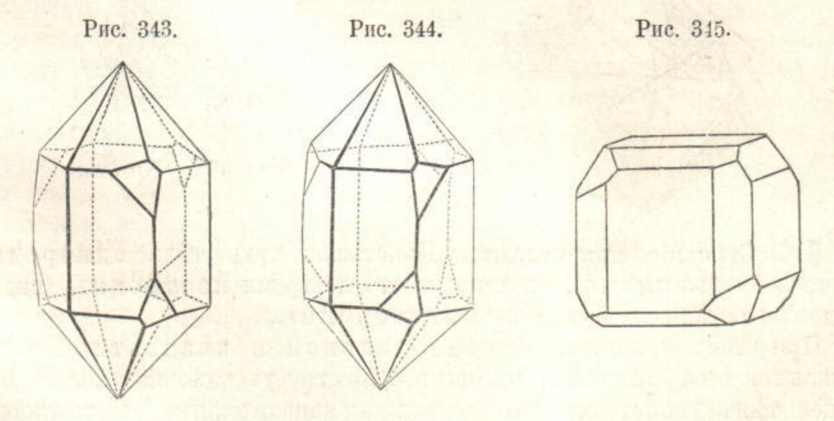
на рис. 341. Другую геміэдрическую форму представляетъ скаленоэдръ (рис. 342), боковыя ребра котораго совпадаютъ съ ребрами ромбоэдра, изображеннаго на рис. 341 и особо внутри рис. 342; соотвѣтствующая скаленоэдру голоэдрическая форма есть двѣнадцатисторонняя пирамида.

Рис. 340. Рис. 341. Рис. 342.



Комбинація геміэдрическихъ или тетартоэдрическихъ формъ приводитъ иногда къ возникновенію двухъ такихъ кристаллическихъ формъ, которыя ограничены плоскостями одинаковаго происхожденія, но распредѣ-

Рис. 343. Рис. 344. Рис. 345.

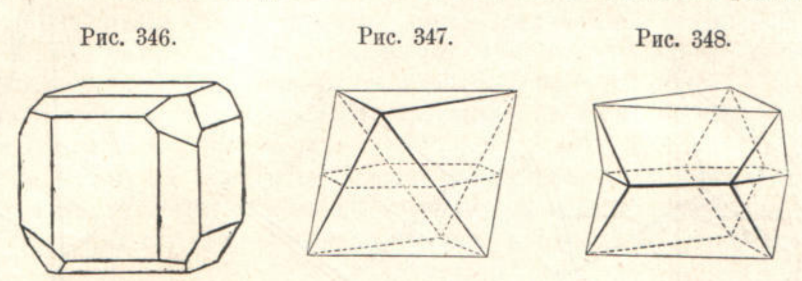


леніе этихъ плоскостей таково, что одна изъ этихъ комбинаціонныхъ формъ, представляя какъ бы зеркальное изображеніе другой, не можетъ быть переведена въ нее вращеніемъ. Такія двѣ формы называются энантіоморфными или гироэдрическими. На рис. 343 и 344 показаны такія двѣ формы изъ гексагональной системы; на рис. 345 и 346 изображены двѣ

энантіоморфныя формы, принадлежащія къ правильной системѣ (хлорноватокислый натръ); онѣ отличаются другъ отъ друга расположеніемъ плоскостей тетраэдра.

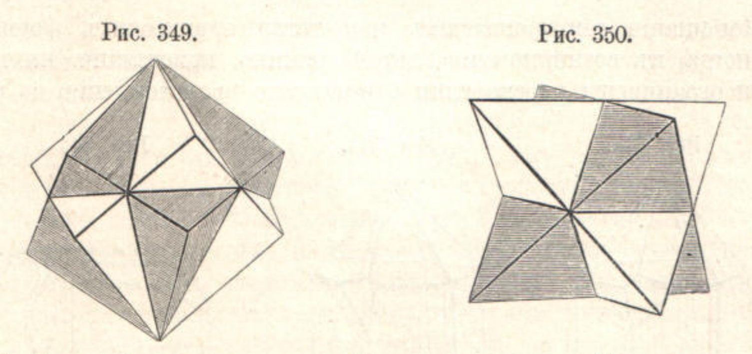
§ 5. Двойники. Два кристалла, сросшіеся по нѣкоторому опредѣленному закону, называются двойниками. Большею частью ихъ форма получается геометрически, если представить себѣ кристаллъ разрѣзаннымъ на двѣ равныя части и одну изъ нихъ повернутою на 180°. Такъ изъ октаэдра рис. 347 получается двойникъ рис. 348, если плоскость раздѣла бу-

Рис. 346. Рис. 347. Рис. 348.



детъ расположена какъ показано пунктиромъ на первомъ изъ этихъ рисунковъ. Такой двойникъ называется двойникомъ сростанія. Другого рода двойники представляются какъ бы совокупностью двухъ кристалловъ, проросшихъ одинъ другой. На рис. 349 изображенъ такой двойникъ изъ двухъ кубовъ, а на рис. 350—изъ двухъ тетраэдровъ. Первая изъ этихъ формъ встрѣчается въ кристаллахъ плавиковаго шпата.

Рис. 349. Рис. 350.



§ 6. Строеніе кристалловъ. Кристаллы суть тѣла однородныя. Кристаллы правильной системы въ то же время изотропны (стр. 25); кристаллы остальныхъ системъ анизотропны.

При этомъ кристаллы гексагональной и квадратной системъ называются одноосными. Въ нихъ существуетъ одно направленіе, обладающее тѣмъ свойствомъ, что во всѣхъ направленіяхъ, составляющихъ одинъ и тотъ же уголъ съ нимъ, свойства кристалла (теплопроводность, тепловая расширяемость, упругость, скорость свѣта и т. д.) одни и тѣ же. Это направленіе, параллельное въ обѣихъ системахъ главнымъ осямъ, называется направленіемъ оптической оси. Въ этомъ направленіи лучъ свѣта проходитъ безъ двойного лучепреломленія, т.-е. не расщепляясь на два луча.

Кристаллы ромбической, одноклиномѣрной и триклиномѣрной системъ называются двуосными. Въ нихъ имѣются двѣ оптическія оси, т.-е. два направленія, по которымъ лучи свѣта проходятъ безъ двойного лучепреломленія. Эти направленія однако не совпадаютъ съ кристаллографическими осями.

Сцѣпленіе въ кристаллахъ въ различныхъ направленіяхъ различное, вслѣдствіе чего они неодинаково легко раскалываются въ различныхъ направленіяхъ. Плоскости, параллельно которымъ кристаллъ наименѣе сопротивляется раскалыванію, называются плоскостями спайности; нѣкоторые кристаллы обладаютъ одной, другіе же—нѣсколькими плоскостями спайности, которыя всегда параллельны какимъ либо гранямъ кристалла. Плоскость спайности особенно хорошо замѣтна въ слюдѣ, которая легко можетъ быть расщеплена на весьма тонкія пластинки. Въ случаѣ нѣсколькихъ плоскостей спайности, онѣ могутъ быть одинаковы или неодинаковы относительно степени легкости раскалыванія кристалла по ихъ направленіямъ.

Рис. 351.

Правильность формы кристалловъ заставляетъ думать, что въ нихъ частицы расположены согласно нѣкоторому опредѣленному закону. Frankenheim (1832—56) и Bravais (1849) первые развили ученіе о сѣтевидномъ распредѣленіи частицъ. Возьмемъ косоугольныя координатныя оси Ox, Oy, Oz (рис. 351), и проведемъ три системы равноотстоящихъ плоскостей, параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ; ихъ уравненія будутъ: $x=0$, $x=a$, $x=2a$, $x=3a\ldots$, $y=0$, $y=b$, $y=2b$, $y=3b\ldots$, $z=0$, $z=c$, $z=2c$, $z=3c\ldots$ Онѣ раздѣляютъ пространство на параллелепипеды, въ вершинахъ которыхъ и расположены частицы кристалла. Назовемъ такой параллелепипедъ элементомъ $(OADBCA_1D_1B_1)$.

1. Элементъ есть кубъ; система правильная.

2. Элементъ есть ромбоэдръ; система гексагональная и связанная съ нею ромбоэдрическая.

3. Элементъ есть прямая призма съ квадратнымъ основаніемъ; система квадратная.

4. Элементъ есть прямая призма съ прямоугольнымъ или ромбическимъ основаніемъ; система ромбическая.

5. Элементъ есть прямая призма, основаніе которой параллелограммъ, или наклонная призма съ ромбическимъ основаніемъ, причемъ одна изъ діагоналей ромба перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ другую діагональ и черезъ ось призмы; система одноклиномѣрная.

6. Элементъ есть наклонный параллелепипедъ; система триклиномѣрная.

Sohnke (1867) видоизмѣнилъ теорію Bravais; исходя изъ единственнаго условія, что распредѣленіе частицъ вокругъ данной точки должно быть одинаковое для всѣхъ частицъ, онъ показалъ, что существуютъ 66 возможныхъ распредѣленій, удовлетворяющихъ этому условію. Этимъ вопросомъ занимался далѣе Moebius (1849) и другіе.

§ 7. Полиморфизмъ (или гетероморфизмъ). Кристаллы даннаго вещества, образуясь при опредѣленныхъ условіяхъ, обладаютъ всегда одною и тою же формою. Оказывается, однако, что съ измѣненіемъ условій образованія можетъ измѣняться и форма кристалла, иначе говоря, что одно и то же вещество можетъ принимать различныя кристаллическія формы. Такое явленіе называется полиморфизмомъ, а въ частномъ случаѣ двухъ или трехъ формъ — диморфизмомъ и триморфизмомъ. Число полиморфныхъ тѣлъ весьма велико; можетъ быть окажется, что полиморфизмъ обнаруживается во всѣхъ тѣлахъ, если съумѣть надлежащимъ образомъ измѣнять условія ихъ кристаллизаціи.

Кристаллы различной формы одного и того же вещества обладаютъ вообще и различными физическими свойствами, каковы цвѣтъ, крѣпость, плотность и т. д.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ полиморфизма.

S: въ природѣ образуетъ ромбическіе кристаллы. Изъ растворовъ въ CS_2 и въ углеводородахъ выдѣляется въ видѣ ромбическихъ кристалловъ; изъ расплавленной же массы — въ видѣ кристалловъ одноклиномѣрныхъ. Кристаллы послѣдней системы представляютъ форму неустойчивую, мало-по-малу переходящую въ форму ромбическую, причемъ выдѣляется теплота. $CaCO_3$: гексагональная (ромбоэдрическая) система въ видѣ известковаго шпата (плотность $\delta = 2{,}7$) и ромбическая въ видѣ арагонита ($\delta = 2{,}9$). C: правильная (алмазъ, $\delta = 3{,}55$) и одноклиномѣрная, прежде думали — гексагональная (графитъ, $\delta = 2{,}3$). SiO_2: гексагональная — кварцъ ($\delta = 2{,}66$), другая форма, тридимитъ ($\delta = 2{,}3$), низшей степени симметріи, можетъ быть — ромбической. TiO_2: двѣ различныя квадратныя формы (рутилъ, $\delta = 4{,}25$ и анатазъ, $\delta = 3{,}9$) и ромбическая (брукитъ, $\delta = 4{,}05$); триморфизмъ. FeS_2: правильная (пиритъ, $\delta = 5{,}1$) и ромбическая (марказитъ, $\delta = 4{,}86$). Силикатъ алюминія Al_2SiO_5 ромбическая (андалузитъ, $\delta = 3{,}16$) и триклиномѣрная (дистенъ, $\delta = 3{,}66$).

§ 8. Изоморфизмъ. Иногда тѣла, различныя по составу, кристаллизуются въ формахъ весьма близкихъ другъ къ другу; такія тѣла называются изоморфными. Оказывается, что эти тѣла похожи другъ на друга по химическому составу. Наиболѣе важное свойство ихъ заключается въ томъ, что они способны войти въ составъ одного и того же кристалла, когда они находились вмѣстѣ въ растворѣ. Въ настоящее время отличаютъ различныя степени изоморфизма, смотря по тому, могутъ ли вещества смѣшиваться въ одномъ кристаллѣ во всевозможныхъ отношеніяхъ или нѣтъ.

Изоморфизмъ былъ открытъ Mitscherlich'омъ (1820) на четырехъ ромбическихъ кристаллахъ H_2KPO_4, H_2KAsO_4, $H_2(NH_4)PO_4$ и $H_2(NH_4)AsO_4$. Примѣры изоморфныхъ тѣлъ суть $ZnSO_4 + 7H_2O$ и $MgSO_4 + 7H_2O$;

$BaCl_2 + 2H_2O$ и $SrCl_2 + 2H_2O$; $NaClO_3$ и $AgClO_3$. Въ этихъ примѣрахъ степень изоморфизма убываетъ отъ перваго до послѣдняго. Дальнѣйшими примѣрами могутъ служить $CaCO_3$, $MgCO_3$, $ZnCO_3$, $FeCO_3$ и $MnCO_3$ (ромбоэдры); *As*, *Sb*, *Te*, *Bi* (гексагональная система).

Квасцы также изоморфны. Кристаллъ хромовыхъ квасцовъ, помѣщенный въ растворъ аллюминіевыхъ квасцовъ, продолжаетъ въ немъ рости безъ измѣненія формы.

Интересный примѣръ изоморфизма въ триклиномѣрной системѣ представляютъ анортитъ $CaAl_2Si_2O_8$ и альбитъ $Na_2Al_2Si_6O_{16}$.

Иногда кристаллы химически совершенно различныхъ веществъ похожи другъ на друга. Такое явленіе замѣчаемъ напр. на натріевой селитрѣ и на известковомъ шпатѣ.

Вопросомъ о связи между кристаллическою формою и положеніемъ вещества или существенной его части (напр. металла соли) въ системѣ Д. И. Менделѣева занимались G. Linck и W. Ortloff.

§ 9. Аллотропія. Berzelius назвалъ аллотропіей появленіе простого вещества (элемента) въ нѣсколькихъ состояніяхъ, болѣе или менѣе существенно отличающихся другъ отъ друга по физическимъ свойствамъ. Алмазъ, графитъ и обыкновенный уголь представляютъ три аллотропическихъ видоизмѣненія углерода. Изученію различныхъ свойствъ и способовъ полученія аллотропическихъ состояній углерода посвящено обширное изслѣдованіе Moissan'а. Боръ получается въ видѣ бураго аморфнаго порошка и въ видѣ кристалловъ.

Фосфоръ извѣстенъ въ трехъ аллотропическихъ формахъ: бѣлый, красный (получается продолжительнымъ нагрѣваніемъ бѣлаго до 250°) и металлическій. Сѣра также въ трехъ состояніяхъ: ромбическая, моноклиномѣрная и тягучая. Серебро извѣстно въ цѣломъ рядѣ аллотропическихъ формъ, отличающихся и окраскою. Селенъ: красный и черный аморфные порошки, темнокрасные кристаллы, сѣрые кристаллы (электропроводность послѣднихъ увеличивается при освѣщеніи).

Аллотропическія видоизмѣненія одного и того же вещества вѣроятно происходятъ вслѣдствіе того, что атомы въ различномъ числѣ или въ различной группировкѣ входятъ въ составъ молекулы. Кислородъ (O_2) и озонъ (O_3) представляютъ примѣръ аллотропіи газообразнаго элемента.

ЛИТЕРАТУРА.

Къ § 1. *Θ. Θ. Петрушевскій.* Ж. Ф. Х. О. 16 стр. 410, 458, 1884.
Н. Е. Жуковскій. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 3, вып. 1 стр. 52, 1890.
Къ § 2. *O. Lehmann.* W. A. 40 p. 401; 41 p. 525, 1890.
Къ § 3 - § 9. *Кристаллы.* Учебники кристаллографіи:
Karsten. Krystallographie (Allgem. Encyclopaedie der Physik).
Rammelsberg. Krystallographische Chemie.
Mallard. Cours de cristallographie. Paris 1874—1884.
Liebisch. Geometrische Krystallographie. Leipzig 1881.
Liebisch. Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891.
Liebisch. Grundriss der physikalischen Krystallographie. Leipzig. 1896.

Schönfliess. Krystallsysteme und Krystallstructur. Leipzig. 1891.
V. von Lang. Lehrbuch der Krystallographie. Wien. 1869.
H. Kopp. Einleitung in die Krystallographie.
С. Θ. Глинка. Общій курсъ кристаллографіи. Спб. 1895.
С. Θ. Глинка. Общій курсъ Минералогіи. ч. I. Спб. 1896.
Arzruni. Physikalische Chemie der Krystalle. Braunschweig. 1892.
V. von Lang. Symmetrieverhaeltnisse der Krystalle. Z. phys. Chem. 21 p. 218, 1896.
Retgers. Z. phys. Ch. XIV p. 1.
Rinne. Z. phys. Ch. XVI p. 529.
Delafosse. Mémoires des sav. étrangers 8 p. 647, 1843.
Bravais. Etudes cristallographiques. Paris. 1851; Journ. de l'école polyt. 19, 1850.
Sohncke. Die unbegrenzten regelmaessigen Punctsysteme. Karlsruhe 1876.
Федоровъ. Статьи въ Записк. Минералогич. Общ. и въ Zeitschrift für Krystallographie.
Гадолинъ. Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes cristallographiques etc. Acta societ. scien. fenn. Helsingfors 1871; по русски въ Записк. Минералог. Общества, 1868.
Moissan. Ann. chim. et phys. (7) 8 p. 289, 306, 466, 1896.
G. Linck. Z. Phys. Chem. 19 p. 193, 1896.
W. Ortloff. Z. Phys. Chem. 19 p. 201, 1896.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Плотность твердыхъ тѣлъ.

§ 1. Предварительныя замѣчанія. Для опредѣленія численнаго значенія δ плотности твердаго тѣла мы, согласно формулѣ

$$\delta = \frac{P}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

должны опредѣлить вѣсъ P тѣла и вѣсъ Q воды, объемъ которой при 4° равенъ объему, занимаемому тѣломъ при той температурѣ, при которой мы желаемъ знать его плотность. Такъ назыв. «табличная плотность» есть плотность при 0°, и ее то обыкновенно и опредѣляютъ.

Существуетъ много различныхъ способовъ опредѣленія плотности твердыхъ тѣлъ; смотря по роду и количеству изслѣдуемаго вещества, а также по степени точности, которой желаютъ достигнуть, приходится предпочесть тотъ или другой способъ. Спеціальныя свойства тѣла вызываютъ употребленіе особыхъ пріемовъ; къ таковымъ приходится напр. прибѣгать, когда испытуемое вещество легче воды, или растворяется въ водѣ, или когда оно не можетъ быть взвѣшено въ воздухѣ (K, Na); далѣе, когда оно представляетъ изъ себя порошокъ или тѣло въ высокой степени скважистое (уголь, мѣлъ). Въ послѣднемъ случаѣ приходится покрывать тѣло по возможности тонкимъ слоемъ какого либо вещества, непроницаемаго для воды или для той жидкости, которою пользуются при опредѣленіи величины δ.

Погружая тѣло въ воду или другую жидкость, необходимо тщательно слѣдить за тѣмъ, чтобы не оставалось приставшихъ къ тѣлу пузырьковъ воз-

духа; ихъ можно снимать хотя бы кисточкою. Производя разнаго рода взвѣшиванія, слѣдуетъ вводить тѣ поправки на потерю вѣса тѣлъ въ воздухѣ и на температуру, о которыхъ уже было сказано на стр. 295 и 436. Укажемъ сперва на менѣе точные способы опредѣленія плотности.

§ 2. Измѣреніе вѣса и объема. Зная вѣсъ P и объемъ V тѣла, мы, согласно первоначальному опредѣленію понятія о плотности, находимъ по формулѣ

$$\delta = \frac{P}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

плотность δ тѣла. Въ исключительныхъ случаяхъ, напр. тѣлъ весьма правильной формы или весьма громоздкихъ, мы можемъ иногда вычислить объемъ, зная геометрическую форму тѣла (шаръ, цилиндръ, параллелепипедъ и т. д.). Въ другихъ случаяхъ мы можемъ опредѣлить объемъ V помощью волюмометра (стр. 283). Когда не требуется большой точности, можно такимъ путемъ опредѣлить плотность растворимыхъ въ водѣ или порошкообразныхъ тѣлъ.

§ 3. Опредѣленіе объема вытѣсненной воды. Если въ цилиндрическій калибрированный сосудъ, снабженный дѣленіями, налить воды до опредѣленной черты, и затѣмъ погрузить въ него испытуемое тѣло, вѣсъ P котораго былъ предварительно опредѣленъ, то величина подъема воды непосредственно дастъ намъ объемъ V. Если тѣло въ водѣ не тонетъ, то вмѣсто воды можно взять болѣе легкую жидкость, или присоединить къ нему, если это возможно, болѣе тяжелое тѣло, объемъ котораго уже опредѣленъ.

Можно также взять сосудъ съ боковою трубкою и наполнить его водою до уровня этой трубки. Взвѣшивая количество воды, вытекшей при погруженіи тѣла, опредѣлимъ объемъ V; это способъ арабскаго ученаго Al-Biruni, жившаго въ сѣверо-западной Индіи († 1039).

§ 4. Способъ отыскиванія жидкости одинаковой плотности. Плотность твердаго тѣла можетъ быть опредѣлена путемъ отыскиванія такой жидкости, въ которой изслѣдуемое тѣло не тонетъ и не всплываетъ. На стр. 507, говоря о диффузіи жидкостей, мы указали на аналогичный, но такъ сказать обратный способъ опредѣленія плотности жидкостей.

Жидкостями могутъ служить, какъ указалъ Retgers (Ztschr. phys. Chem. 3 p. 289, 1889; 4 p. 189, 1889; 11 p. 328, 1893), смѣсь метиленъіодида (CH_2J_2, $\delta = 3{,}3$) и бензола или ксилола; далѣе смѣсь растворовъ іодистаго серебра и іодистаго калія или барія и т. д. Для той же цѣли могутъ служить: бромалъ (CBr_3COH, $\delta = 3{,}34$), іодалъ (CJ_3COH, $\delta = 3{,}7 - 3{,}8$), кремнистый іодоформъ ($SiHJ_3$, $\delta = 3{,}4$), растворъ селена въ бромистомъ селенѣ ($SeBr$, $\delta = 3{,}7$) и друг. Плотность полученной смѣси опредѣляется затѣмъ хотя бы пикнометромъ (стр. 437). Болѣе тяжелыя тѣла можно помѣщать внутри куска параффина, или прикрѣплять къ нимъ крючекъ изъ стекла; вліяніе этихъ тѣлъ легко исключить.

§ 5. Способъ ареометра. Пользуясь ареометромъ съ постояннымъ объемомъ, изображеннымъ на рис. 255 стр. 440, можно опредѣлить плотность δ твердаго тѣла. Пусть p вѣсъ гирь на чашкѣ C, которыя заставляютъ арео-

метръ погрузиться до черты D; если положить изслѣдуемое тѣло на C, то необходимо прибавить гири p_1, чтобы получить такое же погруженіе ареометра, и гири p_2, когда тѣло переложено въ нижнюю чашечку B. Въ такомъ случаѣ вѣсъ тѣла $P = p - p_1$; его потеря вѣса въ водѣ $p_2 - p_1$ и слѣд.

$$\delta = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

§ 6. Способъ пружинныхъ вѣсовъ Jolly. На стр. 439 были описаны пружинные вѣсы Jolly, изображенные на рис. 254. Ими двояко можно пользоваться для опредѣленія δ.

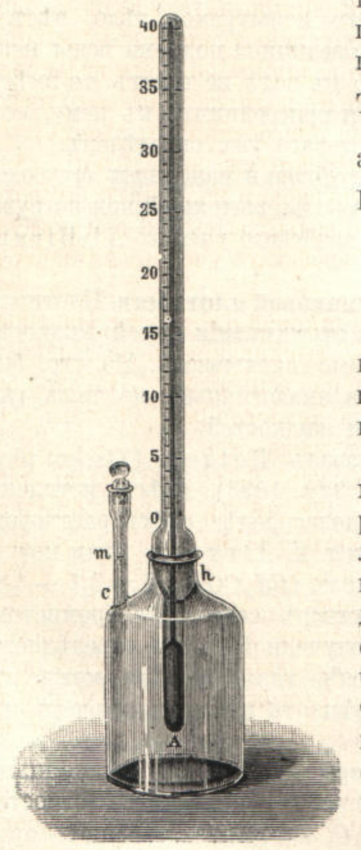
1) Способъ, аналогичный способу примѣненія ареометра. Сперва грузъ p, отдѣльно положенный на чашечку c, затѣмъ грузъ p_1 вмѣстѣ съ тѣломъ на чашечкѣ c, и наконецъ грузъ p_2 на чашечкѣ c, когда тѣло находится на нижней чашечкѣ d, приводятъ указатель m къ одному и тому же дѣленію шкалы. Тогда δ опредѣлится по формулѣ (3).

2. Положимъ, что 0,1 гр. въ c вызываетъ перемѣщеніе указателя m на n дѣленій. Кладемъ тѣло сперва въ c, а затѣмъ въ d, перемѣщая B каждый разъ такъ, чтобы чашечка находилась посреди жидкости, налитой въ стаканчикѣ; положимъ, что въ первомъ случаѣ указатель перемѣстился на n_1, во второмъ на n_2 дѣленій. Тогда вѣсъ тѣла въ воздухѣ $P = 0{,}1 \frac{n_1}{n}$ гр.; а въ водѣ $0{,}1 \frac{n_2}{n}$ гр.; потеря вѣса $Q = 0{,}1 \frac{n_1 - n_2}{n}$ гр. Искомая плотность

$$\delta = \frac{P}{Q} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Какъ видно, число n не входитъ въ это выраженіе, полученное въ предположеніи, что перемѣщеніе указателя пропорціонально нагрузкѣ вѣсовъ.

Рис. 352.



§ 7. Способъ пикнометра. Въ § 4 стр. 437 мы познакомились съ устройствомъ нѣкоторыхъ пикнометровъ, служащихъ для опредѣленія плотности жидкостей. Посредствомъ пикнометра можно опредѣлить и плотность твердаго тѣла, но для этого онъ долженъ быть снабженъ достаточно широкимъ горлышкомъ, чтобы можно было помѣстить въ него испытуемое вещество. На рис. 352 изображенъ пикнометръ, могущій служить для этой цѣли; онъ снабженъ пришлифованной стеклянной пробкой, черезъ которую проходитъ термометръ A. Сбоку находится узкая трубка c, снабженная

чертою m. до которой ее наполняютъ водою. Пусть p_1 вѣсъ пикнометра наполненнаго водою, p_2 вѣсъ испытуемаго вещества, и p_3 вѣсъ пикнометра, содержащаго это вещество и воду до черты m. Въ такомъ случаѣ вѣсъ вытѣсненной воды $p_1-(p_3-p_2)=p_1+p_2-p_3$, а потому

$$\delta=\frac{p_2}{p_1+p_2-p_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Когда тѣло не можетъ быть взвѣшено въ воздухѣ, какъ напр. Na, то вмѣсто воды берутъ керосинъ, плотность котораго δ' опредѣляется предварительно. Вѣсъ p_2 опредѣляется взвѣшиваніемъ пикнометра, сперва когда онъ на половину наполненъ керосиномъ, а затѣмъ когда Na въ него опущенъ.

Когда тѣло растворимо въ водѣ, то вмѣсто воды берутъ другую жидкость, въ которой тѣло не растворяется, и плотность δ' которой извѣстна. Въ обоихъ случаяхъ мы получаемъ искомое δ по формулѣ

$$\delta=\frac{p_2\delta'}{p_1+p_2-p_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

При точныхъ опредѣленіяхъ слѣдуетъ вводить поправки на расширеніе воды (отъ 4° до температуры опыта), на расширеніе стекла и самого испытуемаго тѣла.

§ 8. Способъ гидростатическій. Пусть P вѣсъ тѣла въ воздухѣ, P_1 его вѣсъ въ водѣ; тогда, на основаніи закона Архимеда, имѣемъ, не вводя поправокъ

$$\delta=\frac{P}{P-P_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Когда тѣло легче воды, то къ нему присоединяютъ кусокъ болѣе тяжелаго тѣла, напр. согнутую мѣдную проволоку. Пусть p_1 вѣсъ тѣла въ воздухѣ; p_2 вѣсъ нити, служащей для привѣса, вмѣстѣ съ проволокой, погруженной въ воду; p_3 вѣсъ нити вмѣстѣ съ испытуемымъ тѣломъ и проволокою, погруженными въ воду. Въ этомъ случаѣ вѣсъ тѣла въ водѣ равенъ отрицательной величинѣ p_3-p_2; потеря вѣса равна $p_1-(p_3-p_2)=$ $=p_1+p_2-p_3$, и наконецъ

$$\delta=\frac{p_1}{p_1+p_2-p_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Когда мы имѣемъ дѣло съ порошкообразнымъ тѣломъ, поступаемъ подобнымъ же образомъ, причемъ роль мѣдной проволоки играетъ стеклянный сосудикъ (напр. часовое стеклышко), содержащій вазелинъ, внутри котораго распредѣляютъ порошокъ, предварительно взвѣшенный въ воздухѣ. Формула (8) прилагается и здѣсь.

Не входимъ въ разсмотрѣніе поправокъ, которыя необходимо ввести въ этомъ случаѣ; мы достаточно подробно останавливались на одной изъ этихъ поправокъ на стр. 297.

Объ устройствѣ вѣсовъ, приспособленныхъ къ взвѣшиваніямъ тѣлъ въ водѣ или иныхъ жидкостяхъ, было также уже сказано на стр. 438.

Для менѣе точныхъ опредѣленій могутъ служить одноплечіе вѣсы, изображенные на рис. 172 стр. 301, и о которыхъ нѣкоторыя подробности изложены еще на стр. 439.

Вмѣсто того, чтобы привѣшивать тѣло къ коромыслу вѣсовъ и опредѣлять его кажущуюся потерю вѣса въ водѣ, что можетъ представиться неудобнымъ, когда вѣсы къ такого рода манипуляціямъ не приспособлены, можно, наоборотъ, помѣстить на чашкѣ вѣсовъ сосудъ съ водою, и опредѣлить то увеличеніе вѣса этого сосуда, которое замѣчается при погруженіи въ воду тѣла, привѣшеннаго на нити къ какой-либо стойкѣ, поставленной рядомъ съ вѣсами. Это увеличеніе вѣса равно искомой кажущейся потерѣ вѣса тѣла въ водѣ.

§ 9. Удѣльный, атомный и молекулярный объемы. Въ послѣднихъ параграфахъ, а также въ предыдущихъ двухъ отдѣлахъ мы познакомились со способами опредѣленія плотности δ газообразныхъ, жидкихъ и твердыхъ тѣлъ. Эта величина численно равна вѣсу единицы объема вещества. Обратная величина, численно равная объему, занимаемому одною вѣсовою единицей вещества, называется удѣльнымъ объемомъ этого вещества. Обозначивъ его черезъ v, имѣемъ

$$v = \frac{1}{\delta} = \frac{V}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

гдѣ P вѣсъ, V объемъ вещества, которые, какъ обыкновенно, условимся выражать въ граммахъ и куб. сантиметрахъ.

Если сравнивать между собою не равные вѣса различныхъ веществъ, но брать отъ каждаго по одной граммъ-молекулѣ, т.-е. столько граммовъ, сколько единицъ въ молекулярномъ вѣсѣ μ вещества, то объемы w, ими занимаемые, называются молекулярными объемами вещества, напр. число куб. сантим., занимаемыхъ $23 + 35.5 = 58.5$ гр. $NaCl$. Итакъ вообще

$$w = \mu v = \frac{\mu V}{P} = \frac{\mu}{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Послѣдняя дробь удобнѣе всего для вычисленія w, такъ какъ μ и δ для многихъ тѣлъ извѣстны.

Первый Корр (1842) изучалъ молекулярные объемы различныхъ жидкостей, и нашелъ для нихъ весьма простую закономѣрность при точкѣ кипѣнія вещества, а именно, что при этой температурѣ молекулярный объемъ w есть аддитивное свойство (стр. 497), т.-е. что онъ равенъ суммѣ атомныхъ объемовъ тѣхъ атомовъ, которые входятъ въ составъ молекулы. При этомъ атомный объемъ C — 11; H — 5,5; S — 22,6; Cl — 22,8; Br — 27,8; J — 37,5 и т. д. Для O слѣдуетъ отличать два случая: когда атомъ O обоими сродствами связанъ съ однимъ атомомъ углерода (карбониловая группа), то для него $w = 12{,}2$; если же O только однимъ сродствомъ связанъ съ однимъ атомомъ C, а другимъ съ другимъ атомомъ углерода или другого элемента (гидроксиловая группа), то $w = 7{,}8$. Напр. для уксусной кислоты $CH^3CO(OH)$ имѣемъ: $2C = 22$, $4H = 22$, O (карбонилъ) $= 12{,}2$, O (гидроксилъ) $= 7{,}8$, что въ суммѣ даетъ 64,0.

Измѣреніе даетъ $w = 63{,}7$. Существуетъ однако много отступленій отъ закона Корр'а. Весьма возможно, что получатся болѣе точные законы, если сравнивать молекулярные объемы не при температурахъ кипѣнія, но при температурахъ (абсолютныхъ), составляющихъ равныя дробныя части отъ температуръ критическихъ (стр. 358).

И для твердыхъ тѣлъ найдены различныя правильности, которыя однако нельзя назвать законами. Такъ Schroeder (1859) нашелъ, что молекулярные объемы галоидныхъ солей *K*, *Na* и *Ag* обнаруживаютъ простую правильность, какъ видно изъ слѣдующихъ чиселъ для w:

KCl — 37,4	$NaCl$ — 27,1	$AgCl$ — 25,6
KBr — 44,3	$NaBr$ — 33,8	$AgBr$ — 31,8
KJ — 54,0	NaJ — 43,5	AgJ — 42,0.

Для всѣхъ іодистыхъ соединеній w примѣрно на 16 больше, чѣмъ для хлорныхъ; и въ горизонтальныхъ рядахъ разности чиселъ довольно постоянны.

Для свободныхъ элементовъ оказывается, что ихъ атомный объемъ есть періодическая функція атомнаго вѣса.

Атомные объемы жидкихъ *Cl* и *Br* равны 22,7 и 26,9, т.-е. близко къ числамъ, найденнымъ Корр'омъ.

Замѣтимъ еще, что изоморфныя соединенія (стр. 546) имѣютъ близкіе другъ къ другу молекулярные объемы. Такъ для молекулярнаго объема хромовыхъ квасцовъ, $CrK(SO_4)_2 + 12H_2O$ имѣемъ $\mu = 499$, $\delta = 1{,}8$ и $w = 277$; для обыкновенныхъ квасцовъ, $AlK(SO_4)_2 + 12H_2O$ имѣемъ $\mu = 474$, $\delta = 1{,}7$ и $w = 279$.

§ 10. Плотность сплавовъ. Плотность сплава иногда представляется аддитивнымъ свойствомъ; такъ напр. объемы сплавовъ *Cu* и *Au* или *Sb* и *Bi* равны суммѣ объемовъ составныхъ частей. Зато объемъ сплавовъ *Cu — Sn*, *Ag — Au*, *Sn — Au*, *Pb — Bi* меньше, а объемъ сплавовъ *Sb — Sn*, *Sn — Cd*, *Pb — Cd* больше суммы объемовъ входящихъ въ нихъ металловъ. Нѣкоторые сплавы представляютъ особенности; укажемъ на одинъ изъ нихъ. Сплавъ изъ *Fe* и *Ni* (22% до 25%) представляетъ ту особенность, что онъ при одной и той же температурѣ можетъ находиться какъ бы въ двухъ различныхъ состояніяхъ, причемъ переходъ изъ одного состоянія въ другое совершается охлажденіемъ до -20° или -30°, и нагрѣваніемъ до 600°. Послѣ охлажденія сплавъ можетъ намагничиваться; эту способность онъ теряетъ при 600°, и для возстановленія ея необходимо вновь подвергнуть сплавъ сильному охлажденію. Плотность δ сплава различная, смотря по тому, была ли послѣдняя совершенная надъ нимъ манипуляція сильное нагрѣваніе или охлажденіе.

Получаются слѣдующія числа для δ:

	25% *Ni*	22% *Ni*
Послѣ нагрѣванія (немагнитенъ) .	8,15	8,13
» охлажденія (магнитенъ) . .	7,88	7,96

И другими свойствами отличаются другъ отъ друга эти два состоянія сплава.

Н. Бахметьевъ (Ж. Ф. Х. О. 25, стр. 219, 1893.) и др. изслѣдовали плотность амальгамъ. При этомъ оказалось, что объемъ амальгамъ магнія, висмута, олова, платины, цинка и серебра больше, а объемъ амальгамъ кадмія и мѣди меньше, чѣмъ получается вычисленіемъ, если предположить, что раствореніе металла въ ртути происходитъ безъ измѣненія объема. Особенно замѣчательна амальгама магнія, плотность которой, при содержаніи 5% *Mg*, Бахметьевъ находитъ равною 10,23, между тѣмъ какъ вычисленіе даетъ 13,03. Разность доходитъ до 21,5%. Въ послѣдней работѣ (тамъ же, стр. 265) Бахметьевъ изучилъ свойства кадміевыхъ амальгамъ. Laborde (J. de phys. (3) 5, p. 547, 1896 г.) нашелъ, что плотность почти всѣхъ сплавовъ *Fe* и *Al* превышаетъ плотность *Fe*.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Деформаціи твердаго тѣла.

§ 1. Общія замѣчанія о деформаціяхъ твердаго тѣла. Мы видѣли, что твердое тѣло сопротивляется всякому измѣненію расположенія его частицъ, которое мы условимся называть деформаціей; таковая можетъ быть вызвана только силами, дѣйствующими, вообще говоря, извнѣ на данное тѣло. По всей вѣроятности не существуетъ такой деформаціи твердаго тѣла, которая бы не была сопряжена съ измѣненіемъ формы тѣла, т.-е. вида его поверхности. Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ отличать случаи, въ которыхъ измѣненіе формы непосредственно бросается въ глаза, и съ внѣшней стороны представляется какъ бы сущностью деформаціи (напр. сгибаніе стержня), между тѣмъ какъ объ измѣненіи распредѣленія частицъ мы догадываемся на основаніи нѣкоторыхъ умозаключеній, — отъ тѣхъ случаевъ деформаціи, въ которыхъ, наоборотъ, измѣненіе формы, если оно существуетъ, для насъ незамѣтно, между тѣмъ какъ измѣненіе распредѣленія частицъ представляется первоначально даннымъ, и какъ бы сущностью самой деформаціи. Второй случай мы имѣемъ напр. при крученіи стержня или проволоки, при которомъ внѣшняя форма можетъ и не подвергаться замѣтнымъ измѣненіямъ.

Важнѣйшія формы деформаціи суть: растяженіе и обратное ему сжатіе, которое можетъ быть или только продольнымъ, т.-е. въ одномъ направленіи, или всестороннимъ; далѣе крученіе и сгибаніе. Болѣе сложныя деформаціи могутъ быть разсматриваемы, какъ комбинаціи этихъ трехъ простѣйшихъ.

Всякая деформація является слѣдствіемъ нѣкоторой внѣшней причины, которая можетъ быть или силою, или парою. Обозначимъ величину причины, вызывающей деформацію, черезъ P. Сама деформація представляется въ видѣ измѣненія нѣкоторой величины, которую мы пока вообще обозначимъ черезъ x, и которая можетъ быть линіей, поверхностью, объемомъ, угломъ и т. д. Величину ея измѣненія обозначимъ черезъ Δx.

Въ тѣсныхъ предѣлахъ, при малыхъ деформаціяхъ, имѣемъ слѣдующія три положенія, которыя послужатъ основаніемъ дальнѣйшихъ нашихъ разсужденій.

1. Величина деформаціи Δx пропорціональна величинѣ внѣшней, вызывающей ее причины P. Это положеніе было высказано Hooke'омъ (1675) въ формѣ «ut tensio, sic vis».

2. Перемѣна знака внѣшней причины P вызываетъ только перемѣну знака деформаціи Δx, безъ измѣненія ея абсолютной величины. Сжатіе и растяженіе, крученіе въ одну и крученіе въ другую сторону вызываютъ одинаковыя по абсолютной величинѣ деформаціи.

3. При дѣйствіи нѣсколькихъ внѣшнихъ причинъ получается деформація, которая опредѣляется суммой частныхъ деформацій, вызываемыхъ отдѣльными причинами.

Эти три положенія вѣрны лишь въ болѣе или менѣе ограниченной области для каждаго рода деформаціи. Въ дѣйствительности деформація Δx, даже въ самыхъ простыхъ случаяхъ, есть функція внѣшней дѣйствующей причины P или, иначе, внутреннія силы, развивающіяся при деформаціяхъ и уравновѣшивающія причину P, суть функціи деформацій. Когда мы выйдемъ изъ предѣловъ, внутри которыхъ подтверждается пропорціональность между P и Δx, то можемъ пользоваться эмпирическою формулою $P = a\,\Delta x + b(\Delta x)^2$, гдѣ a и b постоянныя. Впрочемъ существуетъ случай (крученіе тонкихъ проволокъ или нитей), когда деформація (уголъ поворота одного конца) въ весьма широкихъ предѣлахъ пропорціональна внѣшней дѣйствующей причинѣ (моменту приложенной пары).

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что тѣло, подвергаемое деформаціи, однородно и изотропно.

Относительно терминологіи въ явленіяхъ деформаціи, къ сожалѣнію, ничего не установилось, и однѣ и тѣ же величины обозначаются различными авторами неодинаковыми названіями. Условимся, во всѣхъ частныхъ случаяхъ деформацій, называть коеффиціентами такія, вообще весьма малыя величины, которыми опредѣляется величина деформаціи, вызванной внѣшней причиной, равной единицѣ, и модулями обратныя имъ, вообще большія величины, которыя служатъ мѣрою внѣшней причины, вызывающей деформацію, равную единицѣ, или, вѣрнѣе говоря, мѣрою внѣшней причины, которая вызвала бы деформацію, равную единицѣ, еслибы въ весьма широкихъ предѣлахъ оставалось вѣрнымъ первое положеніе о пропорціональности между Δx и P.

§ 2. Предѣлъ упругости и разрывъ. Деформаціи, вызванныя небольшими внѣшними причинами P, вообще говоря, исчезаютъ, когда эти причины перестаютъ дѣйствовать. Но съ увеличеніемъ P достигается наконецъ такая деформація, которая не вполнѣ исчезаетъ вмѣстѣ съ P: обнаруживается остаточная деформація, какъ бы остающійся навсегда слѣдъ произведеннаго на тѣло воздѣйствія. При дальнѣйшемъ возрастаніи величины P увеличиваются какъ временная деформація, такъ и остаточная.

Когда появляется первый слѣдъ остаточной деформаціи, то мы говоримъ, что достигнутъ предѣлъ упругости.

Тѣла, предѣлъ упругости которыхъ достигается только при большихъ деформаціяхъ, называются вообще тѣлами упругими; таковы напримѣръ сталь, стекло, каучукъ, слоновая кость и т. д. Наоборотъ, неупругими называются тѣла, предѣлъ упругости которыхъ легко достигается уже при слабыхъ P и малыхъ деформаціяхъ Δx; къ такимъ тѣламъ принадлежитъ напр. свинецъ. Понятно, что нельзя провести строгой границы между тѣлами упругими и неупругими, и что для даннаго вещества каждаго рода деформація имѣетъ особый предѣлъ упругости.

Съ увеличеніемъ P и Δx достигается наконецъ разрывъ между частицами тѣла, которое раздѣляется на части (разрывается, раздавливается, ломается и т. д.). Тѣла, для которыхъ наступаетъ разрывъ ранѣе, чѣмъ былъ достигнутъ предѣлъ упругости, называются хрупкими. Тѣла, которыя, наоборотъ, могутъ быть подвергнуты весьма значительнымъ остаточнымъ деформаціямъ и притомъ весьма быстро, называются тягучими.

Нѣкоторые авторы характеризуютъ упругость тѣла величиною той внѣшней причины, которая потребна, чтобы вызвать заданную деформацію. При такомъ опредѣленіи, каучукъ или резина, тѣла весьма упругія въ обыденномъ смыслѣ слова, слѣдуетъ причислить къ тѣламъ весьма мало упругимъ. Мы сохранимъ понятіе о степени упругости, характеризованной болѣе или менѣе быстро достигаемымъ предѣломъ упругости.

Время играетъ весьма важную роль въ явленіяхъ упругости: деформація, вызванная появленіемъ или измѣненіемъ внѣшней дѣйствующей причины, не устанавливается сразу въ окончательной своей величинѣ, но продолжаетъ измѣняться втеченіе иногда весьма продолжительнаго времени. Отсюда явствуетъ, что опыты и измѣренія въ области упругости должны имѣть на себѣ отпечатокъ нѣкотораго произвола, нѣкоторой неопредѣленности, если не будетъ обращено вниманіе на время, втеченіе котораго дѣйствовала внѣшняя причина, или которое прошло отъ момента ея измѣненія или исчезновенія. Въ статьѣ объ упругомъ послѣдѣйствіи мы возвратимся къ этому вопросу (§ 21).

§ 3. Твердость. Сопротивленіе вещества проникновенію въ него другого тѣла, вызывающему хотя бы лишь поврежденіе его поверхности (царапаніе, рѣзаніе), характеризуетъ его твердость. Изъ двухъ веществъ то считается болѣе твердымъ, которое можетъ повредить или исцарапать поверхность другого, или при достаточномъ давленіи войти въ него (долото, буравъ). Въ минералогіи отличаютъ десять степеней твердости, представителями которыхъ являются слѣдующія тѣла:

1) Талькъ	рѣжется ногтемъ.	6) Полевой шпатъ.	
2) Гипсъ		7) Кварцъ	Рѣжутъ стекло.
3) Известковый шпатъ.		8) Топазъ	
4) Плавиковый шпатъ.		9) Корундъ	
5) Апатитъ.		10) Алмазъ	

Такимъ образомъ твердость любого вещества характеризуется только номеромъ, но не представляется ясно опредѣленною величиною, которую можно было бы измѣрить, какъ измѣряются другія физическія величины.

Въ 1882 г. первый H. Hertz, великій, безвременно скончавшійся ученый, далъ строго научное опредѣленіе понятія о твердости. Представимъ себѣ, что на маленькую круглую часть поверхности тѣла производится постепенно возростающее давленіе, и пусть P давленіе, приходящееся при этомъ въ средней части круга на единицу поверхности. Для тѣлъ хрупкихъ настаетъ моментъ, когда внутри изслѣдуемаго тѣла происходитъ разрывъ и появляется трещина. Величина давленія P въ этотъ моментъ и служитъ мѣрою твердости для хрупкаго тѣла.

Auerbach (1891) построилъ приборъ, въ которомъ къ плоской поверхности испытуемаго вещества прижимается выпуклая поверхность другого чечевицеобразнаго тѣла; величина поверхности соприкосновенія наблюдается микроскопомъ.

Для не хрупкихъ тѣлъ Auerbach предложилъ за мѣру твердости принимать то наибольшее давленіе, которое можетъ дѣйствовать на единицу поверхности, и при которомъ происходитъ полное «приспособленіе» испытуемаго вещества къ формѣ давящей на него чечевицы. При увеличеніи давленія чечевица глубже входитъ въ это вещество, но давленіе на единицу поверхности соприкосновенія, которая при этомъ увеличивается, остается уже безъ измѣненія. Auerbach находитъ (1896) слѣдующія уже абсолютныя значенія для твердости различныхъ веществъ въ кгр. на кв. мм.:

Талькъ	5	Апатитъ	237
Гипсъ	14	Адуляръ	253
Каменная соль	20	Кронгласъ (боро-силикатъ) .	274
Известковый шпатъ	92	Кварцъ (⊥ къ оси)	308
Плавиковый шпатъ	110	Топазъ	525
Тяжелый флинтъ	170	Бериллъ	588
Легкій флинтъ	210	Корундъ	1150

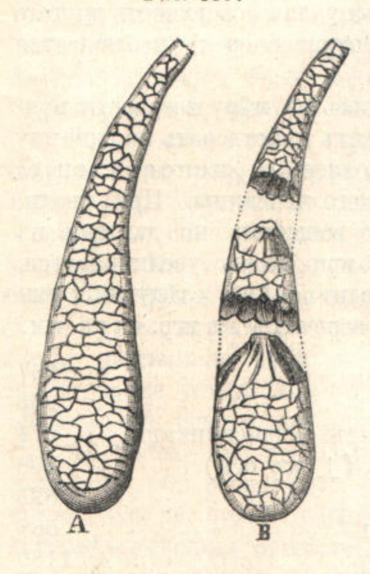
Твердость вещества зависитъ отъ способа его обработки; желѣзо, мѣдь и другіе металлы литые, кованные, прокатанные, протянутые и т. д. обладаютъ различною плотностью и неодинаковою степенью твердости.

Большое вліяніе на твердость имѣетъ закалка, состоящая въ быстромъ охлажденіи сильно нагрѣтаго вещества, напр. опусканіемъ его въ воду или иную жидкость. Всѣмъ извѣстно, какъ отличаются другъ отъ друга закаленная и отпущенная сталь по степени твердости. Интересныя явленія представляетъ въ этомъ отношеніи стекло. При быстромъ охлажденіи горячаго или расплавленнаго стекла происходитъ внезапное сокращеніе поверхностнаго слоя, сопровождаемое сильнымъ сдавливаніемъ внутренней массы, которая принимаетъ особую неустойчивую структуру. Состояніе поверхностнаго слоя напоминаетъ то поверхностное натяженіе, съ которымъ мы познакомились въ ученіи о жидкостяхъ. Такое стекло, повидимому весьма твердое, не ломается при довольно сильныхъ ударахъ, однако разсыпается на весьма мелкія части, когда нарушается цѣльность поверх-

ностнаго слоя, для чего бываетъ достаточно самой малой царапины. Изъ такого закаленнаго стекла состоятъ такъ наз. Болонскія склянки, небольшіе, толстостѣнные стаканчики, которые даже при довольно сильныхъ ударахъ остаются цѣлыми, но которые разсыпаются при малѣйшей царапинѣ. Во внутрь стаканчика можно помѣстить гвозди и производить встряхиваніе безъ вреда для него; но если малѣйшую крупинку кварца бросить въ стаканъ, то онъ разсыпается, такъ какъ кварцъ легко производитъ царапины на поверхности стекла.

Знаменитыя Батавскія слезки получаютъ, выливая расплавленное стекло по каплямъ въ воду; онѣ имѣютъ форму продолговатой капли съ отросткомъ, какъ видно на рис. 353 *A*; когда надломить шейку такой слезки, то она разсыпается на мелкіе кусочки. На рис. 353 изображена слезка вновь сложенная изъ этихъ кусочковъ, форму и расположеніе которыхъ можно видѣть на рис. 353 *B*. Если отростокъ постепенно растворять въ плавиковой кислотѣ, начиная отъ его конца, то разрывъ слезки происходитъ въ моментъ, когда кислота дойдетъ до начала болѣе толстой части. Повидимому, вся масса слезки удерживается въ состояніи неустойчиваго равновѣсія небольшою полоскою, находящеюся около ея шейки.

Рис. 353.



§ 4. Обзоръ величинъ, встрѣчающихся въ элементарномъ ученіи объ упругости. Разсматривая различные случаи деформаціи твердаго изотропнаго тѣла, мы имѣемъ дѣло съ большимъ числомъ различныхъ величинъ, для которыхъ, къ сожалѣнію, не установилось опредѣленныхъ обозначеній, что не мало затрудняетъ чтеніе различныхъ учебниковъ и трактатовъ. Между этими величинами имѣется столько соотношеній, сколько есть величинъ безъ двухъ, вслѣдствіе чего существуетъ возможность всѣ эти величины выразить черезъ двѣ изъ нихъ, которыя принимаются за основныя величины, характеризующія упругія свойства даннаго вещества. Опять-таки различные авторы останавливаются на различныхъ двухъ величинахъ, вслѣдствіе чего получается большое разнообразіе формулъ, въ которыхъ тѣмъ болѣе трудно разобраться, что буквенныя обозначенія у различныхъ авторовъ неодинаковыя.

Для облегченія читателей считаемъ не лишнимъ начать съ обзора тѣхъ величинъ и ихъ обозначеній, которыя въ дальнѣйшемъ будутъ встрѣчаться. Выводя постепенно уравненія, связывающія эти величины, мы, въ концѣ (§ 12) сопоставимъ всѣ эти связи, и напишемъ тѣ различныя формулы, которыя получаются при различномъ выборѣ двухъ основныхъ величинъ. Мы будемъ имѣть дѣло со слѣдующими величинами:

1) α — коэффиціентъ линейнаго растяженія или сжатія стержня или проволоки;

2) E — модуль растяженія или сжатія, модуль упругости, модуль Юнга; относится къ стержню или проволокѣ;

3) α' — коэффиціентъ односторонняго сжатія слоя;

4) E' — модуль односторонняго сжатія слоя;

5) β — коэффиціентъ поперечнаго сжатія, сопровождающаго продольное растяженіе;

6) $\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$ — отношеніе поперечнаго сжатія къ продольному растяженію, коэффиціентъ Пуассона (Poisson);

7) η — коэффиціентъ объемнаго расширенія при растяженіи;

8) γ — коэффиціентъ всесторонняго сжатія;

9) K — модуль всесторонняго сжатія;

10) N — модуль сдвига;

11) f — модуль крученія данной проволоки;

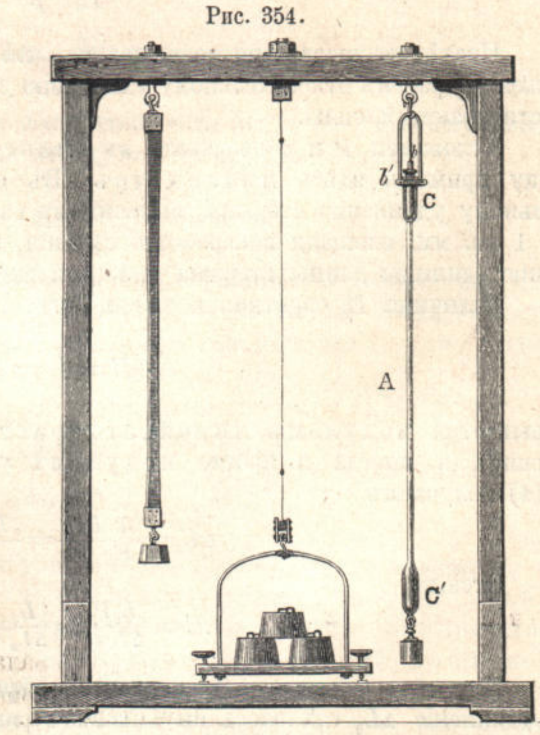
12) λ — вспомогательная величина, которая играетъ важную роль въ уравненіяхъ теоріи упругости, и которая связана съ остальными величинами уравненіемъ

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

§ 5. Растяженіе стержней, модуль Юнга. Закрѣпимъ стержень (или проволоку) однимъ верхнимъ концомъ такъ, какъ показано на рис. 354. Пусть L_0 первоначальная длина стержня, s его площадь поперечнаго сѣченія. Къ нижнему концу стержня привѣсимъ грузъ P, который назовемъ растягивающимъ грузомъ. Тотъ грузъ, который при этомъ приходится на единицу площади поперечнаго сѣченія, обозначимъ черезъ p, и назовемъ растягивающею силою, такъ что

$$p = \frac{P}{s} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Рис. 354.



Подъ вліяніемъ растягивающаго груза P произойдетъ удлиненіе, которое мы обозначимъ черезъ ΔL_0. Въ тѣсныхъ предѣлахъ (см. стр. 555, положеніе 1) удлиненіе ΔL_0 пропорціонально растягивающему грузу P; далѣе ΔL_0 очевидно должно быть пропорціонально

самой длинѣ L_0, и наконецъ ΔL_0 обратно пропорціонально площади s, ибо напр. при удвоеніи этой площади потребуется и вдвое бо̀льшій растягивающій грузъ, чтобы вызвать то же удлиненіе ΔL_0. Сказанное приводитъ къ формулѣ

$$\Delta L_0 = \alpha \frac{L_0 P}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

гдѣ α коеффиціентъ пропорціональности, который мы назовемъ коеффиціентомъ линейнаго растяженія.

При P отрицательномъ формула (3) даетъ намъ укороченіе стержня; поэтому α мы называемъ также коеффиціентомъ линейнаго сжатія. Вводя растягивающую силу p, см. (2), получаемъ

$$\Delta L_0 = \alpha L_0 p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Новая длина стержня L равна $L_0 + \Delta L_0$, т.-е.

$$L = L_0(1 + \alpha p) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Формула (4) даетъ

$$\alpha = \frac{\Delta L_0}{L_0} \cdot \frac{1}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Послѣднее выраженіе показываетъ, что коеффиціентъ линейнаго растяженія α равенъ относительному удлиненію стержня, вызванному единицею растягивающей силы.

Условимся P и p выражать въ килограммахъ; за линейную единицу примемъ здѣсь миллиметръ. Въ этомъ случаѣ α равно относительному удлиненію стержня, вызванному растягивающей силой въ 1 клгр. на 1 кв. мм. площади поперечнаго сѣченія, или еще проще, α равно удлиненію единицы длины стержня при этой растягивающей силѣ.

Величина E, обратная коеффиціенту α, т.-е.

$$E = \frac{1}{\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

называется модулемъ линейнаго растяженія, модулемъ Юнга (Young), а иногда и просто модулемъ упругости. Вводя ее въ (3) и (4) получаемъ

$$\Delta L_0 = \frac{1}{E} \frac{L_0 P}{s} = \frac{L_0 p}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Отсюда

$$E = \frac{L_0 P}{\Delta L_0 s} = \frac{L_0}{\Delta L_0} p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Еслибы формула (8) оставалась вѣрною при всѣхъ значеніяхъ p, то удлиненіе ΔL_0 сдѣлалось бы наконецъ равнымъ L_0, и слѣд. мы получили бы новую длину стержня $L = 2L_0$. Въ дѣйствительности такое удлиненіе возможно лишь для небольшого числа веществъ; вообще же говоря,

гораздо раньше, т.-е. при гораздо меньшей растягивающей силѣ произойдетъ разрывъ стержня; еще раньше будетъ достигнутъ предѣлъ упругости и, наконецъ, еще раньше прекратится та пропорціональность между деформаціей ΔL_0 и внѣшнею причиною P или p, на которой основаны наши формулы. Тѣмъ не менѣе мы можемъ мысленно допустить, что удлиненіе, замѣчаемое при небольшомъ P, растетъ и дальше пропорціонально этому P, пока оно не сдѣлается равнымъ L_0. При $\Delta L_0 = L_0$ мы имѣемъ, на основаніи (9), $E = p$. Это показываетъ, что модуль Юнга равенъ растягивающей силѣ, при которой удвоилась бы длина стержня, или, въ выбранныхъ нами единицахъ, модуль Юнга равенъ числу килограммовъ, которые должны были бы дѣйствовать на кв. мм. площади поперечнаго сѣченія стержня, чтобы его длина удвоилась (еслибы онъ гораздо раньше не разорвался).

Опредѣлимъ работу R, которую необходимо затратить, чтобы увеличить первоначальную длину L_0 проволоки на величину ΔL_0. Пусть L длина проволоки, вызванная нагрузкою Q. Если прибавимъ нагрузку dQ, то L увеличится на dL, причемъ будетъ произведена работа $dR = QdL$. Но удлиненіе dL получится изъ (3), если положить dQ вмѣсто P, т.-е.

$$dL = \frac{\alpha L_0}{s} dQ,$$

и слѣд.

$$dR = \frac{\alpha L_0}{s} QdQ.$$

Вся работа R растяженія получится, если мы возьмемъ сумму такихъ выраженій для Q мѣняющагося отъ $Q = 0$ до $Q = P$. Отсюда

$$R = \frac{\alpha L_0 P^2}{2s}.$$

Эта работа R равна потенціальной энергіи J растянутой проволоки. Если принять во вниманіе формулу (3) для ΔL_0, или ввести растягивающую силу $p = P:s$, то получаются слѣдующія выраженія для потенціальной энергіи J растянутой проволоки:

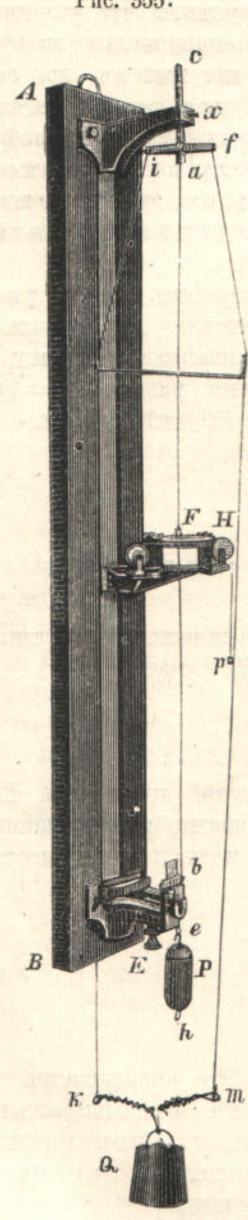
$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{\alpha L_0}{2s} P^2 = \frac{1}{2} P \Delta L_0 \\ J &= \frac{1}{2} \alpha L_0 s p^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

При $L_0 = 1$, $s = 1$ и $p = \sqrt{2}$ имѣемъ $J = \alpha$. Это показываетъ, что коэффиціентъ растяженія численно равенъ потенціальной энергіи единицы длины проволоки, площадь поперечнаго сѣченія которой равна единицѣ, и къ которой приложена растягивающая сила, равная $\sqrt{2}$ единицъ силы.

Для опытнаго опредѣленія модуля Юнга, одной изъ важнѣйшихъ физическихъ величинъ, характеризующихъ свойства даннаго вещества, закрѣпляютъ стержень или проволоку изъ испытуемаго вещества такъ, какъ

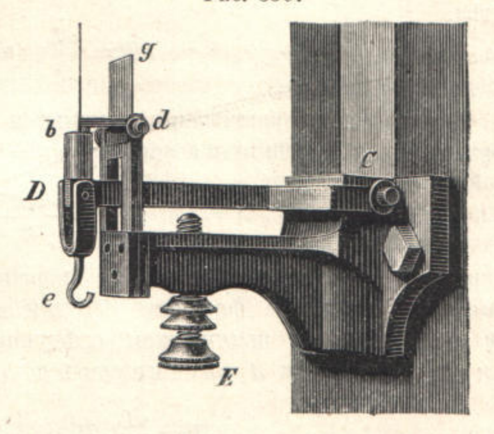
показано на рис. 354. Къ проволокѣ прикрѣпляютъ наверху и внизу два знака въ видѣ черточекъ или весьма тонкихъ проволочныхъ колечекъ, на которыхъ видна горизонтальная свѣтлая линія при боковомъ ихъ освѣщеніи. На эти знаки устанавливаютъ горизонтальныя нити окулярныхъ микрометровъ двухъ зрительныхъ трубъ катетометра (стр. 270) до и послѣ нагрузки. Разность перемѣщеній двухъ значковъ, которыя опредѣляются по способу, изложенному на стр. 267, даетъ намъ увеличеніе ΔL_0 длины L_0 проволоки, заключающейся между двумя знаками. Измѣривъ еще діаметръ проволоки (стр. 266), мы получимъ s и наконецъ по формулѣ (9) величину модуля E.

Рис. 355.



На рис. 355 изображенъ весьма удобный приборъ В. В. Лермантова, служащій для опредѣленія модуля Юнга. Къ доскѣ AB придѣланы два выступа, поддерживающіе верхній и нижній концы проволоки ab, растяженіе которой изслѣдуется. Устройство нижней части прибора пред-

Рис. 356.



ставлено въ увеличенномъ видѣ на рис 356, но съ противоположной стороны, такъ что доска AB приходится справа, а нижній конецъ b проволоки слѣва. Средняя часть проволоки снабжена особымъ приспособленіемъ FH, которое служитъ для опредѣленія такъ наз. модуля сдвига; мы его отдѣльно изобразимъ и опишемъ въ § 15. Верхній конецъ a проволоки прикрѣпленъ къ стержню ac, который проходитъ черезъ вертикальный каналъ и можетъ быть закрѣпленъ при помощи винта x. Нижній конецъ b проволоки прикрѣпленъ къ цилиндру, находящемуся на концѣ выступа CD,

свободно вращающагося около конца C. Грузъ, привѣшенный къ крючку e, вызываетъ удлиненіе проволоки, т.-е. пониженіе конца D выступа CD и находящагося на немъ цилиндра Db. Другой выступъ, расположенный ниже CD, снабженъ вертикальною рамою, обхватывающей выступъ CD. Около верхняго края этой рамы вращаются свободно неизмѣнно связанныя между собою вертикальное зеркальце g и горизонтальная треугольная пластинка, къ нижней сторонѣ которой припаянъ маленькій шарикъ, которымъ она свободно опирается на верхнее основаніе цилиндрика Db. Когда при нагрузкѣ проволоки нижній конецъ bD опускается на величину ΔL_0, то шарикъ опускается на такую же величину; вслѣдствіе этого треугольная пластинка поворачивается на нѣкоторый уголъ α около оси d и на такой же уголъ поворачивается зеркальце g. Оно при этомъ наклоняется влѣво. Если разстояніе отъ точки касанія шарика до оси d обозначить черезъ r, то $tg\alpha = \frac{\Delta L_0}{r}$. Цилиндръ P (рис. 355) служитъ постоянною нагрузкою (на рис. 366 онъ не изображенъ). Грузъ Q, служащій для растяженія проволоки, привѣшивается къ крючку h на нижнемъ концѣ цилиндра P. Чтобы это привѣшиваніе груза Q не вызывало опусканія верхняго конца a проволоки, его сперва привѣшиваютъ, какъ показано на рис. 355 къ стержню km, прикрѣпленному къ двумъ шнурамъ fm и ik, верхніе концы которыхъ присоединены къ горизонтальному стержню if. Такимъ образомъ нагрузка верхней части прибора, а слѣд. и положеніе точки a не мѣняется при перенесеніи груза Q изъ положенія, изображеннаго на рис. 355, на крючекъ h и обратно. Чтобы привѣшиваніе груза Q къ крючку h не вызывало внезапныхъ толчковъ, повертываютъ головку E винта настолько, чтобы выступъ CD опирался на винтъ; въ этомъ случаѣ растяженіе проволоки невозможно. Привѣсивъ Q къ крючку h, повертываютъ E въ обратную сторону, вслѣдствіе чего винтъ опускается, выступъ CD перестаетъ на него опираться и грузъ Q постепенно и безъ толчковъ вызываетъ искомое удлиненіе ΔL_0 проволоки.

Для измѣренія ΔL_0 пользуются способомъ трубы и шкалы (стр. 275). Зрительная труба устанавливается на нѣкоторомъ разстояніи отъ прибора такъ, чтобы ось трубы приблизительно совпадала съ нормалью къ зеркальцу g. Рядомъ съ трубою устанавливаютъ вертикальную шкалу, дѣленія которой видны черезъ трубу въ зеркалѣ g. Если l разстояніе отъ шкалы до зеркальца и n число дѣленій шкалы, прошедшихъ мимо горизонтальной нити окуляра при растяженіи проволоки, то уголъ α наклона зеркальца опредѣляется изъ равенства, см. (2) стр. 275,

$$tg\,2\alpha = \frac{n}{l}\cdot$$

Опредѣливъ отсюда α, мы найдемъ искомое удлиненіе ΔL_0 изъ указанной выше формулы

$$tg\alpha = \frac{\Delta L_0}{r}\,.$$

При малыхъ углахъ α можно тангенсы замѣнить углами и тогда имѣемъ равенство

$$\frac{\Delta L_0}{r} = \frac{n}{2l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

въ которомъ n, l и r извѣстны; разстояніе r приблизительно равно 15 мм. Опредѣливъ ΔL_0, мы найдемъ, какъ было показано выше, модуль Юнга E по формулѣ (9).

Съ совершенно другими способами опредѣленія E мы познакомимся впослѣдствіи въ ученіи о звукѣ.

§ 6. Разрывъ, абсолютное сопротивленіе, числовыя величины. Увеличивая растягивающую силу p, мы доводимъ стержень или проволоку до разрыва. То значеніе p_2 величины $p = \frac{P}{s}$, при которомъ происходитъ разрывъ, служитъ мѣрою такъ наз. абсолютнаго сопротивленія вещества. Числовыя величины показываютъ, что абсолютное сопротивленіе почти всегда несравненно меньше величины E, которая соотвѣтствуетъ теоретическому удвоенію длины стержня.

Мы приведемъ ниже значенія для E, p_1 (растягивающая сила при достиженіи предѣла упругости) и p_2 (разрывъ) въ килогр. на кв. мм. поперечнаго сѣченія. Тѣ-же величины получатся въ $C. G. S.$ единицахъ, т.-е. въ динахъ на кв. см., при умноженіи ихъ на $981 . 10^5$, ибо килогр. $= 1000$ гр. $= 981 . 10^3$ динамъ (стр. 78); далѣе кв. см. $= 100$ кв. мм., и потому численное значеніе въ $C. G. S.$ единицахъ увеличится еще въ 10^2 разъ. Во многихъ формулахъ удобнѣе принимать метръ за единицу длины; въ этомъ случаѣ E должно быть отнесено къ кв. метру площади поперечнаго сѣченія, и потому численное его значеніе увеличивается въ 10^6 разъ. Такія значенія для E приходится вводить въ формулы, встрѣчающіяся въ ученіи о распространеніи колебаній въ упругой твердой средѣ, а слѣд. напр. въ формулахъ акустики.

Приводимъ прежде всего рядъ чиселъ E, p_1 и p_2, чтобы показать огромную, существующую между ними разницу.

	E $\frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$ Модуль упругости.	p_1 $\frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$ Предѣлъ упругости.	p_2 $\frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$ Разрывъ. (Абсол. сопротивл.).	t^0 Темпер.
Свинецъ	1800	0,25	2,2	15°
»	1630	—	—	100
Желѣзо жесткое .	20870	32	63	15
» мягкое .	20790	5	48	15
» » .	1770	—	—	100
Мѣдь жесткая . .	12450	12	40	15
» мягкая . .	10520	3	31	15
» » . .	9830	—	—	100
» » . .	7860	—	—	200

Платина жесткая .	17040	26	34	15°
» мягкая .	15518	14	25	15
» » .	14180	—	—	100
» » .	12960	—	—	200
Сталь	22000	33	70	15
Серебро жесткое .	7270	11	29	15
» мягкое .	7140	3	16	15

Большинство этихъ чиселъ взято изъ опредѣленій Wertheim'а.

Auerbach опредѣлилъ (1896) модуль E для нѣкоторыхъ весьма твердыхъ веществъ и получилъ при этомъ огромныя числа, доходящія напр. для корунда до 52000, т.-е. до числа, превосходящаго въ 2,5 раза модуль упругости стали. Приводимъ нѣкоторыя изъ полученныхъ имъ чиселъ:

	$E \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$		$E \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$
Корундъ	52000	Апатитъ ‖ оси	13800
Браз. топазъ	30200	Кварцъ ‖ оси	10300
Саксонск. топазъ . . .	28100	Плавиков. шпатъ . . .	9110
Бериллъ ⊥ къ оси . . .	23200	Известков. шпатъ . . .	8440
Бериллъ ‖ оси	21100	Адуларъ	8120
		Стекла	отъ 4700 до 7950

Модуль Юнга сплавовъ приблизительно равенъ среднему изъ модулей его составныхъ частей.

Для дерева получаются весьма различныя числа, смотря по тому будетъ ли стержень вырѣзанъ параллельно волокнамъ, или перпендикулярно къ нимъ; во второмъ случаѣ получаются опять разныя числа въ зависимости отъ того, вырѣзанъ ли стержень по направленію радіуса ствола или на нѣкоторомъ разстояніи отъ оси, перпендикулярно къ радіусу. Вотъ нѣкоторыя числа:

$$E \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$$

	‖ волокнамъ.	⊥ волокнамъ, по радіусу.	⊥ волокнамъ, ⊥ къ радіусу.
Тополь	517	73	39
Сосна	564	98	29
Дубъ	921	189	130
Букъ	980	270	159
Береза	997	81	155
Кленъ	1021	157	73
Ель	1113	95	31

Villari изслѣдовалъ каучукъ и нашелъ, что отъ $\Delta L_0 = 0$ до $\Delta L_0 = L_0$ модуль E довольно постояненъ и равенъ 0,07 — 0,10; когда ΔL_0 растетъ

отъ L_0 до $3L_0$ ($L=4L_0$) модуль E растетъ отъ 0,1 до 300; когда $\Delta L_0 > 3L_0$, то модуль опять довольно постояненъ, а именно $E=300$ до 350.

Съ возростаніемъ температуры модуль E вообще уменьшается, напр. для мѣди отъ 10520 при 15° до 7860 при 200°.

Для желѣза и стали Wertheim замѣтилъ увеличеніе модуля на 5,2% при нагрѣваніи отъ 0° до 100°, и уменьшеніе на 19,1% при нагрѣваніи отъ 100° до 200°. Kupfer нашелъ для Fe, Cu и латуни уменьшеніе E на 5,5%, 8,2% и 3,9% при нагрѣваніи отъ 0° до 100°. Подобные же результаты нашли Kohlrausch и Loomis, Tomlinson, Noyes и, наконецъ, A. M. Mayer. Приводимъ численные результаты послѣдняго изъ названныхъ ученыхъ; при нагрѣваніи отъ 0° до 100° уменьшается E на p%.

	p		p
Стекло St Gobain . .	1,16	Алюминій .	5,5
Разные сорта стали .	2,24 – 3,09	Серебро . .	2,47 (отъ 0° до 60°)
Латунь	3,73	Цинкъ . . .	6,04 (отъ 0° до 62°).

Н. А. Гезехусъ нашелъ, что водородъ, поглощенный палладіемъ и его сплавами (75% Pd и 25% Pt, Au или Ag) уменьшаетъ ихъ коэффиціентъ упругости.

Изъ новѣйшихъ изслѣдованій упомянемъ работы Winkelmann'а и Schott'а, которые для различныхъ сортовъ стекла нашли числа E отъ 4699 до 7592 кгр. на кв. мм., а для абсолютнаго сопротивленія p_2 числа отъ 3,5 до 8,5 клгр.

Въ 1891 г. появилась работа J. O. Thomson'а, изслѣдовавшаго зависимость удлиненія ΔL_0 отъ растягивающаго груза P. Оказалось, что пропорціональность между этими величинами можетъ быть допущена лишь въ самыхъ тѣсныхъ предѣлахъ, и что болѣе точная зависимость выражается эмпирическою формулою вида $\Delta L_0 = aP + bP^2 + cP^3$, гдѣ a, b и c постоянныя числа для данной проволоки.

Georg S. Meyer нашелъ для проволоки изъ Al необыкновенно большое отклоненіе отъ положенія Hooke'а (стр. 555). Для удлиненія ΔL_0 проволоки ($L_0 = 18315$ мм.) онъ нашелъ формулу

$$\Delta L_0 = 62{,}863\,p + 14{,}312\,p^2$$

для p возростающаго отъ 0 до 0,3 клгр. Коеффиціентъ при p^2 оказывается необыкновенно большимъ.

Обратимся къ абсолютному сопротивленію p_2, для котораго нѣкоторыя числовыя величины уже были приведены на стр. 564 – 565. Изъ этихъ чиселъ ясно видно, что сопротивленіе разрыву жесткой (тянутой) проволоки значительно больше сопротивленія проволоки мягкой (отпущенной).

Слѣдуетъ отличать абсолютное сопротивленіе при кратковременномъ и при весьма продолжительномъ дѣйствіи растягивающей силы p_2; во второмъ случаѣ абсолютное сопротивленіе значительно меньше, какъ видно изъ слѣдующихъ чиселъ Wertheim'а:

	$p_2 \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$	
	I. Медленный разрывъ.	II. Быстрый разрывъ.
Свинецъ литой	1,25	2,21
Олово литое	3,40	4,16
Олово отпущенное . . .	1,70	3,60
Цинкъ тянутый	12,80	15,77
Мѣдь тянутая	40,30	41,00
Желѣзо тянутое	61,10	62,5—65,1
Сталь тянутая	70,00	85,9—99,1
Сталь отпущенная . . .	40,00	53,90.

При достаточной длинѣ всякій стержень, висящій вертикально внизъ, долженъ подвергнуться разрыву отъ собственнаго вѣса. Это случится при слѣдующей длинѣ стержней: *Pb* — 5 метровъ, *Zn* — 11 м., *Sn* — 50 м., *Ag* — 263 м., *Fe* — 550 м.

Абсолютное сопротивленіе металловъ въ значительной степени мѣняется отъ иногда весьма небольшихъ примѣсей. Вотъ примѣръ:

Чистое золото	$p_2 = 10 \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$
99,8% *Au* + 0,2% *K* или *Bi*	0,8
» » + 0,2% *Te* или *Pb*	6
» » + 0,2% *Th*, *Sn*, *Sb*	10
» » + 0,2% всѣхъ другихъ металловъ. . .	11—14.

Съ повышеніемъ температуры уменьшается абсолютное сопротивленіе мѣди по формулѣ $p_2 = 29,40 - 0,037\,t$. Неправильно мѣняется p_2 съ температурой для желѣза и стали, обнаруживая нѣсколько максимумовъ и минимумовъ.

Dewar изслѣдовалъ абсолютное сопротивленіе проволокъ при весьма низкой температурѣ въ —182°, помѣщая ихъ въ жидкій воздухъ. Приводимъ его числа:

Діаметръ проволокъ 2,49 мм.

	p_2 +15°	p_2 —182°
Мягкая сталь.	191 кгр.	318 кгр.
Желѣзо . . .	145	304
Мѣдь. . . .	91	136
Латунь . . .	141	200
Нейзильберъ .	213	272
Золото . . .	116	154
Серебро . . .	150	191

Діаметръ проволокъ 5,1 мм.

	p_2 +15°	p_2 —182°
Олово . . .	91 кгр.	177 кгр.
Свинецъ . .	35	77
Цинкъ . . .	16	12
Ртуть . . .	0	14
Висмутъ . .	27	14
Сурьма . . .	28	14
Паяльн сплавъ	136	293
Сплавъ Wood'а	64	204.

Сопротивленіе разрыву палладіевой проволоки уменьшается, когда она поглотила водородъ.

Для дерева получаются три различныхъ значенія абсолютнаго сопротивленія p_2, соотвѣтственно тремъ значеніямъ модуля E (стр. 565).

$$p_2 \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$$

	‖ волокнамъ.	⊥ волокнамъ, по радіусу.	⊥ волокнамъ, ⊥ къ радіусу.
Тополь. . . .	1,97	0,15	0,21
Сосна	2,48	0,26	0,20
Кленъ	3,58	0,72	0,37
Ель.	4,18	0,22	0,30
Береза. . . .	4,30	0,82	1,06
Дубъ	6,49	0,58	0,41

Весьма большой интересъ представляетъ вопросъ о зависимости абсолютнаго сопротивленія стержня или проволоки отъ площади поперечнаго сѣченія s. Обозначая черезъ P_2 растягивающій грузъ, при которомъ происходитъ разрывъ, мы считали величину $p_2 = \frac{P_2}{s}$ за величину, уже не зависящую отъ s. Однако Quincke показалъ, что для тонкихъ проволокъ сила P_2 выражается формулою

$$P_2 = as + b\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ σ периметръ проволоки, a и b двѣ постоянныя. Оказывается, что сила P_2 состоитъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ первая пропорціональна площади поперечнаго сѣченія, а вторая пропорціональна периметру. Объясняется это тѣмъ, что поверхностный слой проволоки, особенно тянутой, обладаетъ особымъ натяженіемъ; онъ вѣроятно плотнѣе остальной массы и противоставляетъ особое сопротивленіе разрыву. Чѣмъ тоньше проволока, тѣмъ бóльшую роль играетъ второй членъ въ формулѣ (10), ибо s уменьшается пропорціонально квадрату, а σ — первой степени радіуса проволоки. Этимъ объясняется, почему весьма тонкіе проволоки или листочки обладаютъ сравнительно весьма большимъ абсолютнымъ сопротивленіемъ. Таковымъ обладаютъ тонкія стеклянныя нити, которыя однако для привѣса къ нимъ тѣлъ въ физическихъ приборахъ (гальванометрахъ, электрометрахъ и др.) служить не могутъ, вслѣдствіе большого въ нихъ упругаго послѣдѣйствія (§ 21).

Въ 1889 г. Boys изобрѣлъ способъ приготовленія кварцевыхъ нитей: стрѣла сильнаго лука скрѣпляется съ кускомъ кварца, который размягчается въ пламени гремучаго газа; при отпусканіи тетивы получается тончайшая кварцевая нить. Толщина этихъ нитей доходитъ до 0,0003 мм.; онѣ обладаютъ замѣчательнымъ абсолютнымъ сопротивленіемъ. Такъ нить, толщина которой 0,0018 мм. легко выдерживаетъ грузъ въ 2 гр., что дало бы 820 клгр. на кв. мм., между тѣмъ какъ при $p = \frac{80 \text{ клгр.}}{\text{кв. мм.}}$ почти всѣ сорта стали подвергаются разрыву.

Quincke опредѣлилъ значеніе величины b въ (12) и притомъ въ граммахъ на 1 мм. периметра; онъ нашелъ такія числа:

	Zn	*Au*	*Cu*	*Ag*	*Pt*	*Fe*	Сталь
$b=$	557	1592	2388	2388	3023	5731	6685 $\frac{\text{гр.}}{\text{мм.}}$

§ 7. Абсолютное сопротивленіе одностороннему сдавливанію. На основаніи положенія 2 стр. 555 мы допускаемъ, что формулы (3) до (9) остаются вѣрными и при отрицательныхъ P и p, т.-е. когда стержень (цилиндръ, призма) подвергается продольному сжатію; ихъ примѣнимость ограничена однако крайне малыми значеніями величины ΔL_0. Понятно, почему мы модуль Юнга назвали также модулемъ сжатія.

При увеличеніи сжимающей силы p настаетъ моментъ, когда преодолѣвается связь между частицами тѣла и оно раздавливается, иногда при этомъ со взрывомъ превращаясь въ мелкій порошокъ (стекло). Значеніе при этомъ величины p можно назвать абсолютнымъ сопротивленіемъ одностороннему сдавливанію. Для всѣхъ тѣлъ эта величина больше разсмотрѣннаго выше p_2; исключеніе представляетъ дерево.

На стр. 566 были приведены числа E и p_2, найденныя Winckelmann'омъ и Schott'омъ для различныхъ сортовъ стекла. Для сопротивленія сдавливанію они нашли отъ 60,6 — 120,8 килогр. на кв. мм. Приводимъ еще нѣкоторыя числа для сопротивленія одностороннему сжатію: чугунъ 57 — 102, мѣдь 30 — 45, гранитъ 12 — 22, мраморъ 6 — 12, известнякъ твердый 14, мягкій 1, кирпичъ 0,5 — 2, дубъ 7, сосна 4,8, береза 4,5, тополь 3,6; всѣ числа выражаютъ килогр. на кв. мм. поверхности.

§ 8. Поперечное сжатіе, коеффиціентъ Пуассона. Продольное растяженіе стержня или проволоки всегда сопровождается поперечнымъ сжатіемъ; растягиваемый стержень утончается, его первоначальный діаметръ d_0 уменьшается на нѣкоторую величину Δd_0, для которой можно положить

$$\Delta d_0 = \beta d_0 p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

аналогично (4) стр. 560. Множитель β назовемъ коеффиціентомъ поперечнаго сжатія; онъ численно равенъ относительному уменьшенію толщины $\left(\frac{\Delta d_0}{d_0}\right)$ при единицѣ растягивающей силы. Для новой толщины $d = d_0 - \Delta d_0$ имѣемъ

$$d = d_0(1 - \beta p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Въ теоріи упругости играетъ весьма важную роль отношеніе σ коеффиціентовъ β и α, т.-е. величина

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta d_0}{d_0} : \frac{\Delta L_0}{L_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Это отношеніе поперечнаго сжатія къ продольному растяженію носитъ еще названіе коеффиціента Пуассона (Poisson). Мы увидимъ, что не только всегда $\beta < \alpha$, т.-е. $\sigma < 1$, но что для всѣхъ тѣлъ

$$\sigma < \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Вычислимъ измѣненіе Δv_0 первоначальнаго объема v_0 стержня подъ вліяніемъ растягивающей силы p. Мы имѣемъ $v_0 = \frac{\pi}{4} L_0 d_0^2$; новый объемъ равенъ $v = \frac{\pi}{4} L d^2$, или см. (5) стр. 560 и (14), $v = \frac{\pi}{4} L_0 d_0^2 (1-\beta p)^2 (1+\alpha p)$, или наконецъ

$$v = v_0(1-\beta p)^2(1+\alpha p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Для весьма малыхъ αp и βp можно написать

$$v = v_0\{1+(\alpha-2\beta)p\},$$

или

$$v = v_0\{1+\alpha(1-2\sigma)p\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Написавъ, аналогично (4) и (13)

$$\Delta v_0 = \eta v_0 p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

имѣемъ

$$\eta = \alpha(1-2\sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Величину η можно назвать **коеффиціентомъ объемнаго расширенія при растяженіи**. Этою же величиною опредѣляется объемное сжатіе при одностороннемъ продольномъ сжиманіи, которое всегда сопровождается продольнымъ расширеніемъ. Призма, подверженная нормальному давленію на основанія, утолщается: происходитъ **боковое выпучиваніе**.

Такъ какъ объемъ стержня при его растяженіи всегда ростетъ, то мы должны имѣть $\eta > 0$, откуда слѣдуетъ неравенство $\sigma < \frac{1}{2}$, см. (16). Это относится къ малымъ значеніямъ αp; при значительныхъ растяженіяхъ мы должны обратиться къ формулѣ (17), которая даетъ (вставляемъ $\beta = \alpha\sigma$)

$$\Delta v_0 = v_0\{(1+\alpha p)(1-2\sigma\alpha p)-1\}.$$

$\Delta v_0 = 0$ при $\alpha p = 0{,}001$, когда $\sigma = 0{,}4996$; при $\alpha p = 0{,}03$ объемъ не мѣняется, если $\sigma = 0{,}489$ и т. д. Poisson вывелъ теоретически, что для всѣхъ однородныхъ и изотропныхъ тѣлъ должно быть

$$\sigma = \frac{1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Существуетъ цѣлый рядъ различныхъ способовъ опредѣленія коеффиціента σ и мы далѣе съ ними познакомимся (§ 15 и § 17). Теперь укажемъ на числовые результаты, полученные различными учеными.

	σ
Сталь закаленная	0,294 (Kirchhoff)
»	0,294 (Окатовъ)
»	0,296 (Schneebeli)
Сталь отварная	0,304 (Окатовъ)
»	0,253 — 0.333 (другіе наблюдатели)

Желѣзо	0,243 — 0,310
Латунь.	0,226 — 0,469
Мѣдь	0,348
» (гальванопластич.) . .	0,250 (Voigt)
Свинецъ	0,375
Цинкъ.	0,205
Стекло	0,210 — 0,255
Эбонитъ	0,389
Параффинъ	0,50
Каучукъ (малыя силы) . . .	0,37 — 0,64 (Roentgen)
» » . . .	0,50 (Amagat)
» (большія силы) . .	0,31 — 0,41
Пробка.	0,0

Smoluchowsky находитъ для воска, параффина и спермацета σ между 0,4 и 0,44.

Съ повышеніемъ температуры отъ 0° до 100° величина σ ростетъ для *Pt* на 5,5%, *Fe* — 3,7%, *Au* — 2,5%, *Ag* — 12,2%, *Al* — 15,7% по изслѣдованіямъ Katzenelsohn'a, который для этихъ металловъ находитъ слѣдующія значенія σ: *Pt* — 0,16, *Fe* — 0,27, *Au* — 0,17, *Ag* - 0,37, *Al* — 0,13.

Bock находитъ для σ и для измѣненія q (въ процентахъ) этой величины при нагрѣваніи отъ 0° до 100°:

	σ	q%		σ	q%
Fe	0,256	2	*Ni*	0,329	2,4
Cu	0,346	4	*Ag*	0,346	10

Всѣ приведенныя числа показываютъ, что σ не равно $\frac{1}{4}$, какъ того требуетъ теорія Poisson'a, но колеблется въ весьма широкихъ предѣлахъ. Нельзя допустить, чтобы это происходило только вслѣдствіе неоднородности или анизотропности изслѣдованныхъ образцовъ различныхъ матеріаловъ. Гораздо естественнѣе допустить, что начиная отъ жидкостей, для которыхъ теоретически говоря $\sigma = \frac{1}{2}$, эта величина принимаетъ всевозможныя значенія для различныхъ твердыхъ веществъ.

Интересныя крайности представляютъ пробка и каучукъ; для первой $\sigma = 0$, она сжимается безъ бокового выпучиванія; для каучука $\sigma = \frac{1}{2}$, онъ сжимается и растягивается безъ измѣненія объема. Мы къ этому еще возвратимся.

Непосредственные опыты Cagniard-Latour'a доказываютъ, что $\eta > 0$, что объемъ проволоки при ея растяженіи увеличивается. Его приборъ изображенъ на рис. 357. Испытуемая проволока находилась внутри трубки съ водою; по измѣненію уровня воды можно было судить объ увеличеніи объема проволоки, остающейся при натяженіи внутри трубки.

Wertheim опредѣлялъ измѣненіе внутренней емкости трубокъ при ихъ растяженіи. Дѣло въ томъ, что емкость трубки уменьшается при ея растяженіи настолько, на сколько соотвѣтствующее пространство уменьшилось бы, еслибы вмѣсто трубки мы имѣли сплошной стержень. Это легко понять, если разсмотрѣть разрѣзъ трубки на рис. 358. Проведемъ двѣ параллельныя касательныя плоскости *ab* и *cd*, и раздѣлимъ мысленно пространство между ними на слои *afoh*, *ohik*, *ikmn* и т. д. Всѣ эти слои сожмутся при растяженіи трубки на столько же, на сколько они сжались бы, входя въ составъ сплошного стержня; вслѣдствіе этого сближеніе плоскостей *ab* и *cd*, а слѣд.

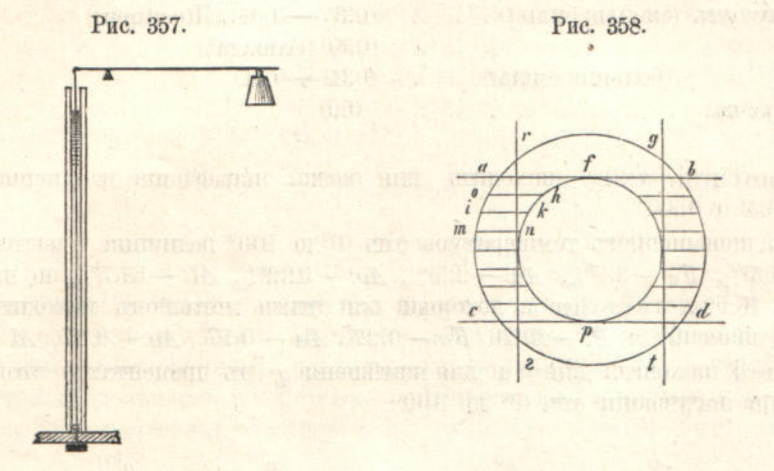


Рис. 357. Рис. 358.

и точекъ *f* и *p* другъ къ другу въ обоихъ случаяхъ будетъ одно и то-же. Сказанное относится ко всѣмъ подобнымъ параллельнымъ плоскостямъ, напр. *gt* и *rs*, откуда и слѣдуетъ вышесказанное. Wertheim нашелъ для стекла и латуни $\sigma = \frac{1}{3}$, пользуясь формулою (20), которая даетъ $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{\eta}{2\alpha}$, и измѣряя относительныя измѣненія η и α емкости и длины.

Особенною тщательностью отличаются изслѣдованія Окатова, результаты которыхъ были приведены выше; они были произведены по методу Kirchhoff'а, основанному на комбинаціи результатовъ гнутія и крученія. Мы не можемъ здѣсь входить въ подробности, касающіяся этого способа.

§ 9. Коеффиціентъ и модуль односторонняго сжатія для неограниченнаго слоя. Проведемъ въ безграничной средѣ двѣ параллельныя плоскости *AB* и *CD* (рис. 359) на разстояніи $mr = ns = L_0$ другъ отъ друга, и предположимъ, что слой, заключающійся между этими плоскостями, подверженъ давленію p на единицу площади какъ съ одной, такъ и съ другой стороны. Вырѣжемъ мысленно призму или цилиндръ *mnsr*; еслибы эта призма не была со всѣхъ сторонъ окружена веществомъ среды, такъ что она могла бы свободно раздаваться въ стороны, то длина L_0 превратилась бы въ

$$L = L_0(1 - \alpha p) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

и модуль сжатія (модуль Юнга) равнялся бы

$$E = \frac{1}{\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

Однако въ данномъ случаѣ призма *mnsr* не можетъ раздаться. Давленіе p на плоскостяхъ *mn* и *rs* вызоветъ стремленіе боковой поверхности къ выпучиванію, вслѣдствіе чего въ этой поверхности явится давленіе q на единицу поверхности окружающей массы, которая, обратно, будетъ производить такое же давленіе q на боковую поверхность призмы, вполнѣ уничтожающее ея стремленіе къ выпучиванію. Это боковое давленіе вызоветъ увеличеніе размѣровъ призмы по направленію, перпендикулярному къ q, т.-е. увеличеніе длины призмы, которая слѣд. окажется больше величины L, опредѣляемой уравненіемъ (22). Сжатіе слоя будетъ меньше сжатія призмы, вслѣдствіе невозможности раздаться по сторонамъ. Первоначальная толщина L_0 слоя превратится въ

$$L' = L_0(1 - \alpha' p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

гдѣ $\alpha' < \alpha$. Обратную величину обозначимъ черезъ E'

$$E' = \frac{1}{\alpha'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Рис. 359.

Рис. 360.

Очевидно $E' > E$. Величины α' и E' назовемъ коэффиціентомъ и модулемъ односторонняго сжатія слоя. Чтобы найти связь между α и α' съ одной — E и E' съ другой стороны, обратимся къ рис. 360. Допустимъ, что изъ разсматриваемаго слоя вырѣзанъ прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаніемъ, и съ ребрами $HD = L_0$ (толщина слоя) и $HF = HG = l_0$. На единицу поверхности основаній дѣйствуетъ сила p, на единицу боковыхъ поверхностей сила q. По условію величина l_0 должна оставаться неизмѣнною. Посмотримъ, во что обратится L_0 подъ вліяніемъ всѣхъ давленій, дѣйствующихъ на параллелепипедъ. Вслѣдствіе давленій p длина L_0 превращается въ $L_0(1 - \alpha p)$. Два давленія q справа и слѣва (на *DBFH* и *CAEG*) производятъ сами по себѣ относительное укороченіе линіи GH, равное αq, а потому относительное удлиненіе ребра $HD = L_0$, равное $\sigma\alpha q$, такъ что $L_0(1 - \alpha p)$, на основаніи положенія 3 стр. 555, превра-

тится въ $L_0(1-\alpha p)(1+\alpha\sigma q)$. Два давленія q на переднюю и заднюю стороны $CDHG$ и $ABEF$ вызываютъ еще такое же относительное удлиненіе ребра DH. окончательная длина L' котораго равна

$$L' = L_0(1-\alpha p)(1+\alpha\sigma q)^2,$$

или при малыхъ αp

$$L' = L_0\left\{1 - \alpha p\left(1 - 2\frac{q}{p}\sigma\right)\right\} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Сравнивая это съ (24), мы видимъ, что

$$\alpha' = \alpha\left(1 - 2\frac{q}{p}\sigma\right) \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

Отношеніе $\frac{q}{p}$ найдемъ изъ условія, что ребро $GH = l_0$ должно сохранить неизмѣнную длину. Его измѣненіе троякое: давленія q на $DBFH$ и $AEGC$ вызовутъ относительное уменьшеніе длины l_0, равное αq; давленія q на $CDHG$ и $ABFE$ будутъ имѣть слѣдствіемъ относительное увеличеніе ребра $GH = l_0$, равное $\sigma\alpha q$, и наконецъ давленія p — относительное его увеличеніе, равное $\sigma\alpha p$. Отсюда слѣдуетъ, что l_0 превратится въ

$$l = l_0(1-\alpha q)(1+\sigma\alpha q)(1+\sigma\alpha p),$$

или

$$l = l_0(1 - \alpha q + \sigma\alpha q + \sigma\alpha p).$$

Условіе $l = l_0$ даетъ, если сократить на α,

$$-q + \sigma q + \sigma p = 0,$$

т.-е.

$$\frac{q}{p} = \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Эта интересная формула опредѣляетъ отношеніе между внѣшнимъ давленіемъ p на стороны слоя и тѣмъ боковымъ давленіемъ q, которое возникаетъ внутри слоя. Подставляя (28) въ (27), получаемъ

$$\alpha' = \alpha\left(1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right) = \alpha\frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma},$$

или, окончательно

$$\alpha' = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma}\alpha \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

Для модуля E' односторонняго сжатія среды имѣемъ

$$E' = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}E \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Формулами (28), (29) и (30) вполнѣ рѣшается весьма важный вопросъ о сжатіи неопредѣленно большого слоя.

Сопоставимъ нѣкоторыя числовыя величины отношеній $q:p$, $\alpha':\alpha$ и $E':E$ въ зависимости отъ значенія σ:

σ	q	α'	E'
0 (Для пробки)	0	α	E
$\frac{1}{4}$ (По Poisson'у)	$\frac{1}{3}p$	$\frac{5}{6}\alpha$	$\frac{6}{5}E$
$\frac{1}{3}$ (По Wertheim'у) . . .	$\frac{1}{2}p$	$\frac{2}{3}\alpha$	$\frac{3}{2}E$
0,4	$\frac{2}{3}p$	$\frac{7}{15}\alpha$	$\frac{15}{7}E$
$\frac{1}{2}$ (Жидкости, каучукъ). .	p	0	∞

Итакъ боковое давленіе q, которое въ жидкостяхъ и въ каучукѣ равно дѣйствующему давленію p, въ другихъ твердыхъ тѣлахъ по Poisson'у должно равняться $\frac{1}{3}p$, по Вертгейму $\frac{1}{2}p$; для пробки оно равно нулю, по крайней мѣрѣ въ нѣкоторыхъ предѣлахъ. Изъ таблицы видно, во сколько разъ усиліе, необходимое, чтобы сжать слой на нѣкоторую долю, напр. на 0,0001 его толщины, больше усилія, при которомъ призма изъ того же матеріала укорачивается на такую же долю; первое измѣряется величиной E', второе—величиной E.

§ 10. Коеффиціентъ всесторонняго сжатія. Объемъ v_0 тѣла уменьшается подъ вліяніемъ давленія p, равномѣрно дѣйствующаго на всю его поверхность, на нѣкоторую величину, абсолютное значеніе которой обозначимъ черезъ Δv_0. Для малыхъ деформацій мы, согласно положенію 1 стр. 555, можемъ принять выраженіе вида

$$\Delta v_0 = \gamma v_0 p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

гдѣ γ коеффиціентъ объемнаго всесторонняго сжатія; онъ равенъ

$$\gamma = \frac{\Delta v_0}{v_0}\frac{1}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Новый объемъ $v = v_0 - \Delta v_0$, т.-е.

$$v = v_0(1 - \gamma p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Чтобы найти связь между γ и α обратимся опять къ рис. 360, полагая въ немъ $q = p$ и, для простоты, $l_0 = L_0$, т.-е. предположимъ, что сжимаемый объемъ есть кубъ; очевидно $v_0 = L_0^3$. Каждое ребро претерпѣваетъ одно уменьшеніе αp и два удлиненія $\alpha\sigma p$, вслѣдствіе чего L_0 превратится въ

$$L = L_0(1 - \alpha p)(1 + \alpha\sigma p)^2,$$

или, при малыхъ αp

$$L = L_0\{1 - \alpha(1 - 2\sigma)p\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

что получается и прямо изъ (26), полагая $q=p$. Новый объемъ куба $v=L^3$, слѣд. мы имѣемъ, полагая $L_0{}^3=v_0$

$$v=v_0\{1-\alpha(1-2\sigma)p\}^3.$$

При малыхъ αp это даетъ

$$v=v_0\{1-3\alpha(1-2\sigma)p\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Сравнивая эту формулу съ (33), мы получаемъ окончательно для коэффиціента всесторонняго сжатія выраженіе

$$\gamma=3\alpha(1-2\sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

$\sigma=\frac{1}{4}$ даетъ $\gamma=\frac{3}{2}\alpha$; при $\sigma=\frac{1}{3}$ (Wertheim) имѣемъ $\gamma=\alpha$.

Величину, обратную γ, назовемъ модулемъ всесторонняго сжатія и обозначимъ ее черезъ K. Имѣемъ

$$K=\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{3\alpha(1-2\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

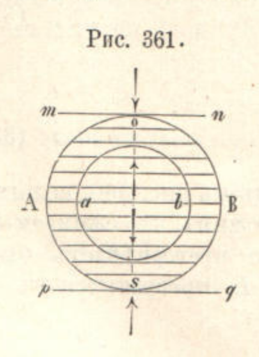
или, такъ какъ $E=\frac{1}{\alpha}$,

$$K=\frac{E}{3(1-2\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

При $\sigma=\frac{1}{4}$ имѣемъ $K=\frac{2}{3}E$; при $\sigma=\frac{1}{3}$ получаемъ $K=E$, т.-е. равенство модулей всесторонняго и односторонняго сжатія (призмы, а не слоя, для котораго E замѣняется величиною $E'=\frac{3}{2}E$, см. табл. стр. 575). Величину K называютъ иногда модулемъ объемной упругости.

Обращаясь къ вопросу объ опредѣленіи коэффиціента γ, укажемъ сперва на важное обстоятельство: если стѣнки сосуда подвергнуть одинаковому давленію снаружи и извнутри, то емкость сосуда уменьшится настолько, насколько уменьшилось бы соотвѣтствующее ей пространство въ случаѣ тѣла сплошного. Для доказательства предположимъ, что мы имѣемъ сплошной шаръ (рис. 361), подверженный равномѣрному давленію p. Проведемъ двѣ параллельныя касательныя mn и pq, и разсмотримъ тонкій слой шара, опредѣляемаго большимъ кругомъ, проходящимъ черезъ точки касанія s и o. Раздѣлимъ шаровой слой на полоски, параллельныя mn. Подъ вліяніемъ внѣшняго давленія p всѣ эти полоски, между прочимъ, сожмутся, сдѣлаются ýже. Это относится и къ среднимъ частямъ полосокъ, лежащимъ внутри круга ab. Отсюда слѣдуетъ, что внутренній шаръ, который мы мысленно выдѣляемъ изъ массы даннаго шара, подвергается такому-же да-

Рис. 361.



вленію p со всѣхъ сторонъ, какъ и весь шаръ, а отсюда, обратно, что этотъ внутренній шаръ производитъ давленіе p на внутреннюю поверхность шаровой оболочки, окружающей его со всѣхъ сторонъ. Если мы, поэтому, внутренній шаръ уничтожимъ, но зато къ внутренней поверхности остающейся оболочки приложимъ давленіе p, то для самой оболочки ничего не измѣнится; ея внѣшній объемъ и внутренняя емкость уменьшатся настолько же, насколько они уменьшились, когда эта оболочка составляла часть сплошного шара.

Для опредѣленія коэффиціента γ всесторонняго сжатія Regnault пользовался піезометромъ, изображеннымъ на рис. 261 стр. 447. Тамъ же было объяснено, какимъ образомъ можно произвести на внутренній сосудъ V давленіе только снаружи или только извнутри или одновременно снаружи и извнутри. По высотѣ жидкости въ капилярной трубкѣ, соединенной съ V, можно судить объ измѣненіи емкости сосуда, а изъ комбинаціи трехъ указанныхъ наблюденій можно, пользуясь формулами, выводимыми въ теоріи упругости, опредѣлить искомый коэффиціентъ сжатія того вещества, изъ котораго сдѣланъ внутренній сосудъ. Приведемъ эти формулы безъ выводовъ, обозначая вездѣ черезъ ΔV_0 приращеніе первоначальнаго объема V_0.

I. Полый шаръ; внутренній радіусъ R_0, внѣшній R.

1. Давленіе только снаружи

$$\frac{\Delta_1 V_0}{V_0} = -\frac{9(1-\sigma)}{2E}\frac{R^3}{R^3-R_0^3}p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39,a)$$

2. Давленіе только извнутри

$$\frac{\Delta_2 V_0}{V_0} = \frac{3(1-2\sigma)R_0^3 + \frac{3}{2}(1+\sigma)R^3}{E(R^3-R_0^3)}p \quad . \; . \; . \quad (39,b)$$

3. Давленіе снаружи и извнутри

$$\frac{\Delta_3 V_0}{V_0} = -\frac{3(1-2\sigma)}{E}p = -\gamma p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39,c)$$

Понятно, что

$$\Delta_3 V_0 = \Delta_1 V_0 + \Delta_2 V_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39,d)$$

II. Полый цилиндръ; внутренній радіусъ R_0, внѣшній R.

1. Давленіе только снаружи

$$\frac{\Delta_1 V_0}{V_0} = \frac{5-4\sigma}{E}\frac{R^2}{R^2-R_0^2}p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40,a)$$

2. Давленіе только извнутри

$$\frac{\Delta_2 V_0}{V_0} = \frac{3(1-2\sigma)R_0^2 + 2(1+\sigma)R^2}{E(R^2-R_0^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40,b)$$

3. Давленіе снаружи и извнутри

$$\frac{\Delta_3 V_0}{V_0} = -\frac{3(1-2\sigma)}{E}p = -\gamma p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40,c)$$

И здѣсь

$$\Delta_3 V_0 = \Delta_1 V_0 + \Delta_2 V_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40,d)$$

Непосредственныя наблюденія уровня жидкости въ капилярной трубкѣ прибора Regnault не даютъ истинныхъ значеній измѣненія емкости сосуда, такъ какъ жидкость подъ вліяніемъ давленія претерпѣваетъ нѣкоторое измѣненіе ΔV_0 объема, опредѣляемое формулою

$$\Delta V_0 = -\gamma_1 V_0 p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

гдѣ γ_1 коэффиціентъ объемнаго сжатія жидкости. Это измѣненіе объема прибавляется къ $\Delta_2 V_0$ и $\Delta_3 V_0$ во второмъ и третьемъ измѣреніяхъ Regnault. Видимыя или кажущіяся измѣненія объема суть

$$\left.\begin{aligned} \Delta' V_0 &= \Delta_1 V_0 \\ \Delta'' V_0 &= \Delta_2 V_0 - \Delta V_0 \\ \Delta''' V_0 &= \Delta_3 V_0 + \Delta V_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Подставляя сюда (39) или (40) и (41), получаемъ три уравненія, которыя даютъ намъ γ_1, т.-е. коэффиціентъ сжатія жидкости (см. стр. 448 опыты Grassi) и величины E и σ, а затѣмъ и искомое γ на основаніи формулы (36), въ которой $\alpha = \frac{1}{E}$.

Численныя значенія γ получаются различныя, смотря по тому, принимать ли за единицу давленія p атмосферу или килогр. на кв. мм. или динъ на кв. сантим. (*C. G. S.* единицы). Воспользуемся первымъ способомъ измѣренія p, такъ что нижеслѣдующія числа показываютъ, на какую долю уменьшается объемъ тѣла при увеличеніи внѣшняго давленія на одну атмосферу = 10333 килогр. на кв. метръ = 0,010333 килогр. на кв. мм. = $1{,}0013 . 10^6$ диновъ на кв. сантим.

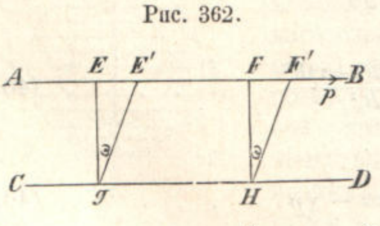
Наиболѣе точныя изслѣдованія сжимаемости твердыхъ тѣлъ производили Regnault, Voigt и Amagat (1889, 1891).

$\gamma . 10^6$.

Свинецъ . . .	2,761	(Amagat)	Стекло. . . .	1,67	(Regnault)
Мѣдь	1,23	(Regnault)	»	2,197	(Amagat)
»	0,857	(Amagat)	Сталь	0,68	(Amagat)
Латунь . . .	1,07	(Regnault)	Каменная соль .	4,2—5,0	
» . . .	0,953	(Amagat)	Топазъ. . . .	0,61	(Voigt)
Горный хрусталь	2,675	(Voigt)	Турмалинъ . .	0,1128	(Voigt)

§ 11. Модуль сдвига. Представимъ себѣ внутри твердаго тѣла двѣ параллельныя плоскости AB и CD (рис. 362), перпендикулярныя къ плоскости рисунка. Положимъ, что плоскость CD удерживается неподвижно, и что по поверхности AB равномѣрно распредѣлены силы, параллельныя между собою и расположенныя въ самой плоскости, причемъ на единицу площади приходится сила p. Подъ вліяніемъ этой силы произойдетъ «сдвигъ» плоскости AB и всѣхъ промежуточныхъ плоскостей между CD и AB въ сторону самой силы, вслѣдствіе чего физическая прямая GE, перпендикулярная ко всѣмъ этимъ плос-

Рис. 362.



костямъ, приметъ положенiе GE', образуя нѣкоторый уголъ сдвига ω съ геометрическою нормалью GE къ CD и AB. Произвольная часть EF плоскости AB передвинется въ $E'F'$ и прямоугольный параллелепипедъ $GEFH$ превратится въ косоугольный $GE'F'H$.

Причиною деформацiи является здѣсь сила, дѣйствующая на единицу площади, или тяга p; за мѣру деформацiи, въ данномъ случаѣ сдвига, мы можемъ принять уголъ ω, на который повернулась первоначальная нормаль къ сдвигаемымъ параллельнымъ плоскостямъ. На основанiи положенiя 1 стр. 555 мы можемъ положить

$$\omega = np \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

гдѣ n постоянный для даннаго вещества множитель, который мы можемъ назвать **коэффицiентомъ сдвига**. Обратную величину $N = \frac{1}{n}$ назовемъ **модулемъ сдвига**; это величина, играющая весьма важную роль. Вводя ее, имѣемъ

$$\omega = \frac{1}{N} p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

При $\omega = 1$ получаемъ $N = p$, т.-е. модуль сдвига равенъ той тягѣ, подъ влiянiемъ которой получился бы уголъ сдвига ω, равный единицѣ ($\omega = 57^\circ 17' 44,'' 8$), еслибы формулы (43) и (44) оказались приложимыми къ столь огромнымъ сдвигамъ и еслибы гораздо раньше не были достигнуты сперва предѣлъ упругости, а затѣмъ и разрывъ самого тѣла.

Между модулями E и N и величиною σ существуетъ простое соотношенiе, которое мы теперь и выведемъ. Представимъ себѣ кубъ $ABDC$ (рис. 363), всѣ ребра котораго для простоты принимаемъ равными единицѣ длины, и положимъ, что къ двумъ противоположнымъ сторонамъ AB и CD приложены нормальныя растягивающiя силы p, подъ влiянiемъ которыхъ кубъ переходитъ въ прямоугольный параллелепипедъ $A_1 B_1 D_1 C_1$ со сторонами $B_1 D_1 = 1 + \alpha p$ и $A_1 B_1 = 1 - \sigma \alpha p$. Дiагональныя плоскости CB и AD перейдутъ въ $C_1 B_1$ и $A_1 D_1$. Физическая прямая (рядъ частицъ) OA, перпендикулярная къ плоскости CB, составитъ съ новымъ положенiемъ $C_1 B_1$ этой плоскости уголъ $A_1 O B_1$, отличающiйся отъ прямого на $\angle 2\varphi$, гдѣ $\angle \varphi = \angle A_1 O A = \angle B_1 O B$. Отсюда слѣдуетъ, что плоскости, параллельныя дiагональной плоскости CB, претерпѣли сдвигъ, причемъ уголъ сдвига ω равенъ

Рис. 363.

$$\omega = 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Величину силы (тяги), дѣйствующей параллельно этимъ плоскостямъ, и производящей сдвигъ, обозначимъ теперь черезъ p_1, такъ что (44) даетъ для модуля N сдвига

$$N = \frac{p_1}{\omega} = \frac{p_1}{2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Для опредѣленія p_1 разсмотримъ одну изъ сдвинутыхъ плоскостей mn, параллельную C_1B_1. На нее передается сила, дѣйствующая на часть A_1n основанія A_1B_1, а потому ясно, что на единицу площади mn приходится сила

$$\frac{A_1n}{mn}p = p\cos(A_1nm).$$

Эта сила параллельна ребру C_1A_1; искомая сила p_1, производящая сдвигъ, равна проекціи этой силы на сдвинутую плоскость mn, т.-е.

$$p_1 = p\cos(A_1nm)\sin(A_1nm).$$

Но при весьма малой деформаціи уголъ A_1nm весьма мало отличается отъ 45°, и потому можно положить $\cos(A_1nm) = \sin(A_1nm) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $p_1 = \frac{1}{2}p$. Вставляя это въ (46), получаемъ

$$N = \frac{p}{2\omega} = \frac{p}{4\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Остается опредѣлить уголъ φ.

Обозначимъ $\angle A_1OE = \angle A_1D_1B_1$ черезъ ψ. Тогда

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{A_1B_1}{B_1D_1} = \frac{1-\alpha\sigma p}{1+\alpha p}.$$

При весьма маломъ αp имѣемъ

$$\operatorname{tg}\psi = (1-\alpha\sigma p)(1-\alpha p) = 1 - \alpha(1+\sigma)p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Съ другой стороны

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi},$$

или, при маломъ φ,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1-\varphi}{1+\varphi} = 1 - 2\varphi.$$

Сравнивая это съ (48), получаемъ

$$\varphi = \frac{\alpha(1+\sigma)}{2}p.$$

Вставляя это въ (47), и вводя $\frac{1}{\alpha} = E$, находимъ окончательно

$$N = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Эта важная формула связываетъ модуль Юнга E и модуль сдвига N съ коеффиціентомъ Пуассона σ.

§ 12. Обзоръ формулъ. Въ § 4 стр. 558 мы уже упоминали о томъ, что различные авторы останавливаются на различномъ выборѣ двухъ основныхъ величинъ, характеризующихъ упругія свойства изотропныхъ тѣлъ, вслѣдствіе чего у нихъ встрѣчаются крайне разнообразныя формулы, въ которыхъ начинающимъ весьма трудно разобраться. Поэтому мы сопоставимъ въ этомъ параграфѣ тѣ формулы, которыя получаются, смотря по выбору упомянутыхъ двухъ величинъ.

Главнѣйшихъ величинъ у насъ четыре:

	E	K	N	σ
Модули:	растяженія,	всесторонняго сжатія,	сдвига.	Коефф. Пуассона.

Затѣмъ имѣемъ коеффиціенты:

$$\alpha = \frac{1}{E} \qquad \gamma = \frac{1}{K} \qquad n = \frac{1}{N} \qquad \beta = \alpha\sigma \qquad \eta\left(= \frac{1}{3}\gamma\right)$$

поперечнаго сжатія (β), объемнаго расширенія (η) — при растяженіи.

Далѣе двѣ величины

$$E' \text{ и } \alpha' = \frac{1}{E'},$$

относящіяся къ одностороннему сжатію безграничнаго слоя; наконецъ добавочную величину

$$\lambda,$$

которую мы опредѣлили уравненіемъ (1) стр. 559, и значеніе которой выяснится изъ послѣдующаго. Изъ многихъ возможныхъ и дѣйствительно встрѣчающихся группъ формулъ мы выберемъ три.

I. За основныя величины принимаемъ модуль Юнга E и коеффиціентъ Пуассона σ. Это тѣ двѣ величины, черезъ которыя мы при нашихъ выводахъ постоянно и выражали всѣ остальныя величины. Приводимъ полученныя нами формулы:

(30) стр. 574 . . . $E' = \frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ . . . . . (50,*a*)

(38) стр. 576 . . . $K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$ . . . . . . (50,*b*)

(49) стр. 580 . . . $N = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ . . . . . . (50,*c*)

(15) стр. 569 . . . $\beta = \alpha\sigma = \frac{\sigma}{E}$ . . . . . . (50,*d*)

(20) стр. 570 . . . $\eta = \alpha(1-2\sigma) = \frac{1-2\sigma}{E}$ . . . (50,*e*)

(1) стр. 559 . . . $\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ . . . . (50,*f*)

Сравненіе (50,*e*) съ (50,*b*) даетъ

$$\eta = \frac{1}{3K} = \frac{1}{3}\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

II. **За основныя величины принимаемъ модули всесторонняго сжатія** K **и сдвига** N. Уравненія $(50, b)$ и $(50, c)$ даютъ сперва σ и E, а затѣмъ легко получаются и остальныя величины:

$$\sigma = \frac{3K - 2N}{2(3K + N)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51,a)$$

$$E = \frac{9NK}{3K + N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51,b)$$

$$E' = K + \frac{4}{3}N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51,c)$$

$$\lambda = K - \frac{2}{3}N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51,d)$$

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{1}{3N} + \frac{1}{9K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51,e)$$

$$\beta = \alpha\sigma = \frac{1}{6N} - \frac{1}{9K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51,f)$$

Мимоходомъ замѣтимъ, что послѣднія двѣ формулы даютъ любопытное выраженіе для коэффиціента сдвига $n = \frac{1}{N}$, а именно

$$n = 2(\alpha + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Въ формулѣ $(40, a)$ стр. 577 встрѣтился множитель, который теперь принимаетъ простую форму, а именно

$$\frac{5 - 4\sigma}{E} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

III. **Коэффиціенты Lamé** λ **и** $2N$. **Lamé и Cauchy** ввели въ теорію упругости два коэффиціента, которые и суть, во-первыхъ, величина λ, включенная нами въ предыдущіе списки формулъ и, во-вторыхъ, величина, равная $2N$, т.-е. удвоенному модулю сдвига. Эти коэффиціенты вводятся слѣдующимъ образомъ: вообразимъ кубъ (рис. 363), на двѣ стороны котораго дѣйствуетъ растягивающая сила p; ребра куба равны единицѣ длины. Подъ вліяніемъ силы p произойдетъ удлиненіе, равное αp и увеличеніе объема, равное ηp. Можно себѣ представить, что одна часть дѣйствующей силы p вызываетъ деформацію αp, другая деформацію ηp, и что, согласно положенію 1 стр. 555, эти части пропорціональны вызваннымъ ими деформаціямъ. Обозначая коэффиціенты пропорціональности черезъ $2N$ и λ, имѣемъ

$$p = 2N\alpha p + \lambda\eta p,$$

или

$$2N\alpha + \lambda\eta = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Исходя изъ такого представленія можно построить всю теорію упругости изотропнаго тѣла и выразить модули Юнга, сжатія и сдвига, коэффиціентъ Пуассона и т. д. черезъ $2N$ и λ. При этомъ и оказывается, что коэффиціентъ $2N$ равенъ удвоенному модулю сдвига, и что λ выражается

формулой (50, f) или (51, d). Здѣсь мы ограничиваемся указаніемъ на провѣрку формулы (54), которая при подстановкѣ (50, c), (50, f), (50, e) и $\alpha=\frac{1}{E}$ дѣйствительно превращается въ тождество.

Рѣшая уравненія (50) и (51), находимъ

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+N)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55,a)$$

$$E=\frac{N(3\lambda+2N)}{\lambda+N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55,b)$$

$$K=\lambda+\frac{2}{3}N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55,c)$$

$$\eta=\frac{1}{3\lambda+2N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55,d)$$

$$E'=\lambda+2N. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55,e)$$

Когда пользуются постоянными Lamé, то обыкновенно обозначаютъ $2N$ одною буквою, напр. $2N=\mu$.

IV. Другія постоянныя. Для полноты замѣтимъ, что Kirchhoff вводитъ двѣ постоянныя (K) и L, которыя связаны съ нашими коэффиціентами равенствами

$$(K)=N$$

$$L=\frac{\lambda}{2N}=\frac{\sigma}{1-2\sigma}.$$

Нѣкоторые авторы вводятъ величины

$$A=\lambda+2N=E'$$

$$B=N.$$

Иногда вводятъ еще отношеніе

$$\varkappa=\frac{N}{K};$$

тогда (51, a) даетъ

$$\sigma=\frac{3-2\varkappa}{2(3+\varkappa)}.$$

Интересно опредѣлить, къ чему приводитъ теорія Poisson'а, т.-е. допущеніе

$$\sigma=\frac{1}{4}.$$

Изъ вышеприведенныхъ уравненій получается при $\sigma=\frac{1}{4}$:

$$N=\lambda;\ L=\frac{1}{2};\ A=3B;\ K=\frac{5}{3}\lambda=\frac{5}{3}N;\ E=\frac{5}{2}\lambda=\frac{5}{2}N;\ \varkappa=\frac{3}{5}.$$

§ 13. Крученіе. Первыя точныя изслѣдованія законовъ крученія принадлежатъ Coulomb'у, который пришелъ къ слѣдующимъ результатамъ,

относящимся къ крученію проволокъ. Если одинъ конецъ проволоки закрѣпить неподвижно, то для повертыванія или закручиванія другого конца на нѣкоторый уголъ φ, необходимо приложить къ этому концу пару силъ, моментъ которой обозначимъ черезъ P. Это величина, играющая въ разсматриваемомъ случаѣ роль внѣшней причины, вызывающей деформацію. Какъ принято (хотя это весьма неточно) мы будемъ моментъ P дѣйствующей пары называть закручивающею силою. Пусть l длина проволоки и r радіусъ сѣченія въ томъ частномъ случаѣ, когда это сѣченіе кругъ.

Coulomb нашелъ, что уголъ крученія φ пропорціоналенъ закручивающей силѣ P, прямо пропорціоналенъ длинѣ l проволоки, и обратно пропорціоналенъ четвертой степени радіуса r. Уголъ φ не зависитъ отъ степени натяженія проволоки. Законы Coulomb'а приводятъ къ формулѣ

$$\varphi = C\frac{Pl}{r^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

гдѣ C множитель, зависящій отъ вещества проволоки. Обозначая $\frac{1}{C}$ черезъ F, получаемъ для закручивающаго момента P выраженіе

$$P = \frac{F\varphi r^4}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Если положить

$$\frac{Fr^4}{l} = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

то

$$P = f\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Эта послѣдняя формула справедлива для проволоки съ произвольной формы поперечнымъ сѣченіемъ.

Величину f можно назвать модулемъ крученія данной проволоки. Эта величина численно равна моменту пары силъ или закручивающей силѣ, подъ вліяніемъ которой конецъ проволоки поворачивается на единицу угла, т.-е. на уголъ $\varphi = 57^\circ 17' 44'',8$.

Опредѣлимъ работу R, которую нужно затратить, чтобы конецъ проволоки закрутить на уголъ φ. Пусть Q моментъ пары, закручивающей проволоку на уголъ ψ; тогда работа dR, произведенная при увеличеніи момента Q на величину dQ и угла ψ на $d\psi$, равна

$$dR = Qd\psi.$$

Но $Q = f\psi$, см. (59), слѣд.

$$dR = f\psi d\psi.$$

Отсюда вся работа

$$R = f\int_0^\varphi \psi d\psi = \frac{1}{2} f\varphi^2 = \frac{1}{2} P\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59,a)$$

Слѣд. потенціальная энергія J закрученной проволоки также равна

$$J=\frac{1}{2}f\varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59,b)$$

Когда $\varphi=\sqrt{2}$, т.-е. $\varphi=81^0 1' 42''$, имѣемъ

$$J=f.$$

Модуль крученія f данной проволоки численно равенъ потенціальной энергіи, которою проволока обладаетъ, когда уголъ крученія $\varphi=\sqrt{2}$. т.-е. $81^0 1' 42''$.

Пропорціональность между P и φ оказывается удовлетворенною для тонкихъ проволокъ до весьма большихъ угловъ φ, вслѣдствіе чего вращательныя качанія произвольнаго тѣла, привѣшеннаго къ нижнему концу проволоки, повернутаго на нѣкоторый уголъ φ, и затѣмъ предоставленнаго самому себѣ, оказываются въ высокой степени изохронными, т.-е. время качанія независитъ отъ амплитуды. Этотъ вопросъ уже былъ разсмотрѣнъ на стр. 306. Время качанія T опредѣляется формулою

$$T=\pi\sqrt{\frac{Q}{f}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

гдѣ Q моментъ инерціи (стр. 85) тѣла, прикрѣпленнаго къ нижнему концу проволоки, выражающійся, какъ мы видѣли, въ частныхъ случаяхъ формулами (36)—(39) стр. 87—89; см. (23) стр. 306, гдѣ взяты буквы K и C вмѣсто Q и f.

Формулой (60) можно воспользоваться для провѣрки законовъ Coulomb'а, ибо мѣняя длину и діаметръ проволоки изъ даннаго матеріала мы должны имѣть

$$\frac{f}{f_1}=\frac{T_1^2}{T^2},$$

гдѣ отношеніе $\frac{f}{f_1}$ опредѣлится изъ (58) въ зависимости отъ того, какъ мы мѣняли длину и толщину проволоки.

Величина F характерна для даннаго рода матеріала, и мы увидимъ въ какой связи она находится съ другими величинами, которыя были разсмотрѣны въ послѣднихъ параграфахъ.

Coulomb производилъ свои изслѣдованія только надъ проволоками; Savart (1829) и Wertheim (1857) изучали крученіе стержней. Приборъ, которымъ пользовался Wertheim, изображенъ на рис. 364. Испытуемый стержень былъ закрѣпленъ въ зажимахъ D и E надъ чугуннымъ станкомъ AB. Близъ неподвижнаго конца D стержня прикрѣплена къ нему стрѣлка, отъ которой считалась длина l стержня до муфты E. Перемѣщеніе стрѣлки вдоль маленькой дуги, прикрѣпленной къ муфтѣ D, давало возможность опредѣлить весьма малое крученіе лѣваго конца отрѣзка l стержня; это крученіе вычиталось изъ угла поворота другого конца D для полученія угла крученія φ. Двѣ равныя гири P и P', дѣйствовали по касательной

къ кругу R, уголъ поворота котораго опредѣлялся указателемъ L съ ноніусомъ и градусными дѣленіями на самомъ кругѣ R. Если ρ радіусъ этого круга и p вѣсъ каждой изъ гирь, то произведеніе $2p\rho$ равнялось закручивающей силѣ. Wertheim нашелъ, что законы Coulomb'а вполнѣ приложимы и къ стержнямъ: уголъ φ пропорціоналенъ Pl и, для круглыхъ стержней, обратно пропорціоналенъ r^4.

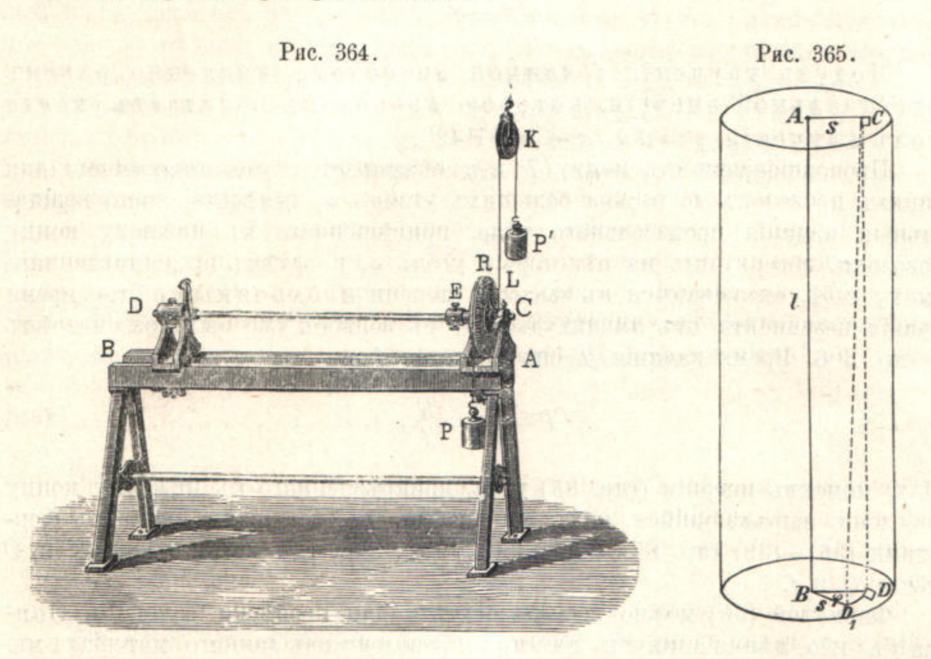


Рис. 364. Рис. 365.

§ 14. Связь между модулемъ крученія f и модулемъ сдвига N. Найдемъ связь между модулемъ крученія f проволоки съ произвольнымъ сѣченіемъ и модулемъ сдвига N матеріала проволоки. Пусть AB (рис. 365) ось проволоки, около которой нижнее основаніе повернулось на уголъ φ; пусть ds элементъ основанія, находящійся около D на разстояніи $DB = AC = \rho$ отъ оси вращенія, и перешедшій въ D_1, гдѣ $\angle DBD_1 = \varphi$. Проводя $DC \parallel BA$, находимъ въ C элементъ ds другого основанія, причемъ до крученія элементы въ D и C были параллельны и расположены на общей нормали. Послѣ крученія эта нормаль перешла въ винтовую линію CD_1, которая, какъ извѣстно, при развертываніи поверхности цилиндра (съ радіусомъ основанія ρ) обращается въ прямую. Уголъ сдвига ω опредѣляется угломъ C треугольника, такъ что

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\smile DD_1}{DC} = \frac{\rho\varphi}{l}.$$

Въ виду малости угла ω, даже при большомъ φ, можно положить

$$\omega = \frac{\rho}{l}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Чтобы вызвать уголъ сдвига ω, мы должны къ единицѣ плоскости приложить силу $p = N\omega$, см. (44) стр. 579, а слѣд. къ элементу ds плоскости силу $N\omega ds$. Моментъ этой силы относительно оси вращенія равенъ $N\rho\omega ds$ или, вставляя (61),

$$N\frac{\rho^2}{l}\varphi ds.$$

Отсюда слѣдуетъ, что закручивающая сила P, т.-е. моментъ пары, вращающей всѣ элементы ds основанія на уголъ φ, равна

$$P = \frac{N\varphi}{l}\int\int \rho^2 ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

гдѣ интегрированіе распространено на всѣ элементы ds основанія проволоки или стержня. Такъ какъ ds размѣра $[L^2]$, то ясно, что весь интегралъ представляется величиною размѣра $[L^4]$, т.-е., что P величина четвертой степени относительно линейныхъ размѣровъ площади поперечнаго сѣченія проволоки или стержня. Обозначивъ ее символически черезъ B^4, имѣемъ

$$P = \frac{N\varphi B^4}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Но по опредѣленію коеффиціента крученія $P = f\varphi$, слѣд.

$$\left.\begin{aligned} f &= N\frac{B^4}{l} \\ B^4 &= \int\int \rho^2 ds \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Эта формула даетъ самую общую связь между модулемъ крученія f проволоки и модулемъ сдвига N ея матеріала.

Для обыкновенной цилиндрической проволоки съ радіусомъ r введемъ полярныя координаты ρ и α; тогда $ds = \rho d\rho d\alpha$ и

$$B^4 = \int_{\rho=0}^{r}\int_{\alpha=0}^{2\pi} \rho^3 d\rho d\alpha = 2\pi\int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Вычисляя B^4 и для другихъ сѣченій, находимъ:

Сѣченіе сплошной кругъ . . . . $B^4 = \frac{\pi}{2} r^4$;

Трубка съ радіусами r_1 и r_2 . . . . $B^4 = \frac{\pi}{2}(r_1^4 - r_2^4)$.

Сѣченіе прямоугольное со сторонами a и b . $B^4 = \frac{ab(a^2+b^2)}{12}$.

Обращаемся къ случаю обыкновенной круглой проволоки. Вставивъ (65) въ (63) и (64), находимъ

$$P = \frac{N\pi r^4}{2l}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66,a)$$

$$f = \frac{N\pi r^4}{2l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66,b)$$

Сравнивая это выраженіе съ формулою (57), выражающей законы, найденные Coulomb'омъ, мы видимъ между ними полное согласіе. Коэффиціентъ F формулы Coulomb'а оказывается равнымъ $\frac{\pi}{2}N$, гдѣ N модуль сдвига.

§ 15. Опытное опредѣленіе модуля сдвига N и коэффиціента Пуассона σ. Выведенныя формулы даютъ намъ возможность двумя способами опредѣлить модуль сдвига N, а затѣмъ коэффиціентъ Пуассона σ того матеріала, изъ котораго приготовлена проволока.

I. Способъ качанія (способъ динамическій). Къ нижнему концу проволоки прикрѣпляютъ тѣло, моментъ инерціи (стр. 85) котораго Q. Допускаемъ, что Q можетъ быть опредѣлено по плотности, формѣ и размѣрамъ тѣла, или что оно косвенно опредѣляется способомъ, изложеннымъ на стр. 320. Опредѣляютъ время качанія T тѣла, совершающаго вращательныя движенія около оси проволоки. Формула (60) даетъ, если подставить (66,b),

$$T=\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{2\pi lQ}{N}},$$

откуда

$$N=\frac{2\pi lQ}{T^2r^4} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (67)$$

Въ частномъ случаѣ, когда привѣшенное тѣло есть шаръ, вѣсъ котораго Π, имѣемъ $Q=\frac{2}{5}\frac{\Pi R^2}{g}$, гдѣ R радіусъ шара и g ускореніе силы тяжести, см. (39) стр. 89. Въ этомъ случаѣ

$$N=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{l\Pi}{g}\left(\frac{2R}{r^2T}\right)^2 \quad \dots \dots \dots \quad (67,a)$$

Зная Q, l и r, и измѣривъ T, мы по формулѣ (67) найдемъ модуль сдвига N. Вычисляя N въ принятыхъ единицахъ, т.-е. въ килограммахъ на кв. мм. поверхности, мы должны Π въ (67,a) или въ другой частной формулѣ выразить въ килограммахъ; l, r и другія линейныя величины, напр. R въ (67,a), въ миллиметрахъ; выражая T въ секундахъ, мы должны положить $g=9810\,\frac{\text{мм}}{(\text{сек.})^2}$. Размѣръ модуля N есть

$$[N]=\frac{\text{сила}}{\text{поверхн.}}=\frac{ML}{T^2}:L^2=\frac{M}{LT^2} \quad \dots \dots \dots \quad (68)$$

Такого же размѣра модули E и K.

II. Способъ крученія (способъ статическій). Измѣряя моментъ P пары силъ, которую нужно приложить къ нижнему концу проволоки, чтобы повернуть ее на уголъ φ, мы находимъ модуль сдвига N изъ формулы (66,a):

$$N=\frac{2lP}{\pi r^4\varphi} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (69)$$

въ которой l длина, r радіусъ сѣченія проволоки. Уголъ φ долженъ быть выраженъ въ единицахъ, разсмотрѣнныхъ на стр. 36; l и r въ миллиметрахъ, моментъ P въ килограммъ-миллиметрахъ.

Можно также закрѣпить оба конца проволоки, приложить пару силъ къ ея серединѣ и измѣрять уголъ вращенія φ. Въ этомъ случаѣ потребуется для закручиванія каждой половины проволоки пара, моментъ которой получится, если въ (66, a) положить $\frac{1}{2}l$ вмѣсто l. Искомый моментъ P_1, дѣйствующій на проволоку, долженъ быть вдвое больше, слѣд.

$$P_1 = \frac{2N\pi r^4}{l}\varphi,$$

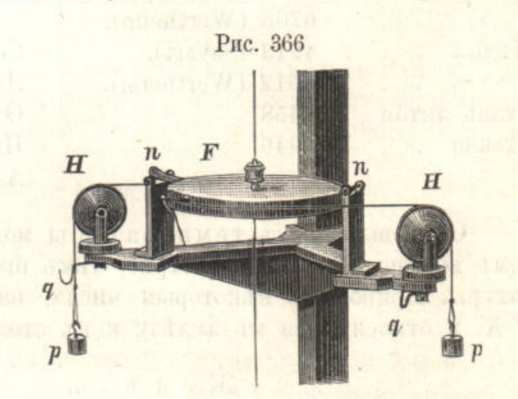
откуда

$$N = \frac{lP_1}{2\pi r^4\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69, a)$$

Мы видимъ, что $P_1 = 4P$.

Для опредѣленія модуля сдвига можетъ служить приборъ В. В. Лермонтова, описанный на стр. 562 (рис. 355 и 356), а именно его средняя часть FHp (рис. 355), изображенная въ увеличенномъ видѣ на рис. 366, и устроенная слѣдующимъ образомъ. На середину проволоки наглухо надѣтъ горизонтальный дискъ F съ нанесенными на немъ градусными дѣленіями (незамѣтными на рисункѣ), противъ которыхъ расположены неподвижные указатели nn, служащіе для измѣренія угла φ поворота диска F. Двѣ нити, концы которыхъ прикрѣплены къ боковой поверхности диска, перекинуты черезъ неподвижные блоки HH; онѣ параллельны и имѣютъ направленія горизонтальныхъ касательныхъ къ боковой поверхности диска. Къ ихъ концамъ прикрѣпляются гири pp, которыя привѣшиваются къ крючкамъ qq, когда наблюдается положеніе диска F безъ крученія проволоки. Если p обозначаетъ вѣсъ въ килогр. каждой гири, и d діаметръ диска въ миллиметрахъ, то моментъ $P_1 = pd$, такъ что модуль сдвига N получается по формулѣ

Рис. 366



$$N = \frac{lpd}{2\pi r^4\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69, b)$$

гдѣ l длина всей проволоки, r радіусъ ея поперечнаго сѣченія.

Коэффиціентъ Пуассона. Опредѣливъ однимъ изъ двухъ способовъ модуль сдвига N и далѣе модуль Юнга E по способу, изложенному на стр. 563, мы получаемъ коэффиціентъ Пуассона на основаніи формулы (49) стр. 580;

$$N = \frac{E}{2(1+\sigma)},$$

откуда

$$\sigma = \frac{E}{2N} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Въ этомъ и заключается одинъ изъ способовъ опредѣленія σ, на который было указано на стр. 570.

§ 16. Численныя значенія модуля сдвига N. Такъ какъ σ заключается между нулемъ и половиною, то ясно, что

$$\frac{1}{3}E < N < \frac{1}{2}E.$$

По теоріи Пуассона $\left(\sigma = \frac{1}{4}\right)$ должно быть $N = \frac{2}{5}E$. Для пробки $\sigma = 0$ и слѣд. $N = \frac{1}{2}E$; для каучука наоборотъ $\sigma = \frac{1}{2}$ и $N = \frac{1}{3}E$.

Опытныя измѣренія по динамическому способу даютъ вообще нѣсколько бо́льшія числа, чѣмъ измѣренія по способу статическому. Приводимъ нѣкоторыя числа

$N \frac{\text{килогр.}}{\text{кв. мм.}}$

Желѣзо	7651	(Coulomb).	Желѣзо мягкое	8100	(Baumeister).
»	6706	(Wertheim).	» жесткое	7850	»
Мѣдь	4213	(Savart).	Серебро	2650	»
»	3612	(Wertheim).	Латунь	3500	»
Сталь литая	7458	»	Олово	1543	»
Стекло	2346	»	Цинкъ	3820	»
			Алюминій	3350	»

Съ повышеніемъ температуры модуль сдвига уменьшается и притомъ вообще нѣсколько быстрѣе, чѣмъ пропорціонально возростанію температуры. Приводимъ нѣкоторыя числа, найденныя Pisati для модулей E и K, и относящіяся къ желѣзу и къ стали:

	Желѣзо.		Сталь.	
t^0	$E \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$	$N \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$	$E \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$	$N \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$
0^0	21483	8108	18518	8290
100^0	21212	7934	18232	8094
200^0	20458	7784	17820	7846
300^0	19175	7706	17372	7585

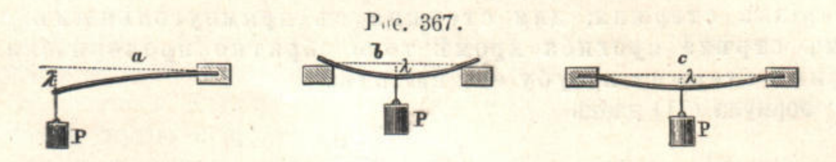
Для стекла $N = N_0(1 - 0{,}00151\,t)$, между тѣмъ какъ для желѣза приблизительно $N = N_0(1 - 0{,}000206\,t)$. При нагрѣваніи отъ 0^0 до 100^0 уменьшается N для Pt на $1{,}64\%$, Cu — $3{,}65\%$, Ag — $7{,}10\%$, Al — $21{,}3\%$, Zn — 40% и Pb — 80%.

Модуль сдвига каучука при 20^0 равенъ $0{,}163 \frac{\text{клгр.}}{\text{кв. мм.}}$; онъ ростетъ съ повышеніемъ температуры.

§ 17. Гнутіе. Приведемъ прежде всего формулы, относящіяся къ деформаціи гнутія и выражающія тѣ законы, которые выводятся теоретически и подтверждаются путемъ опыта. Обыкновенно отличаютъ три случая

гнутія прямого стержня; сущность ихъ понятна изъ рис. 367. Въ первомъ случаѣ (a) стержень закрѣпленъ однимъ концомъ; во второмъ (b) стержень обоими концами свободно опирается на двѣ подставки; въ третьемъ (c) стержень обоими концами закрѣпленъ неподвижно. Во всѣхъ трехъ случаяхъ

Рис. 367.



сила P дѣйствуетъ, какъ показано на рисункахъ, перпендикулярно къ длинѣ стержня. Перемѣщеніе (пониженіе) точки приложенія силы, т.-е. конца (a) или середины (b и c) стержня, называется стрѣлою прогиба; обозначимъ ее черезъ λ. Для этой величины получается слѣдующая общая формула:

$$\lambda = \frac{k}{12q}\frac{Pl^3}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

Здѣсь P дѣйствующая сила, l длина стержня, E модуль Юнга, k постоянное число, зависящее отъ того, который изъ трехъ случаевъ гнутія мы имѣемъ, и q выраженіе, зависящее отъ размѣровъ и формы площади поперечнаго сѣченія стержня.

Множитель k имѣетъ слѣдующія значенія:

случай:	a	b	c
$k=$	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Отсюда слѣдуетъ, что если мы λ въ трехъ случаяхъ a, b и c (рис. 367) обозначимъ черезъ λ_a, λ_b и λ_c, то для одного и того же стержня имѣемъ:

$$\lambda_a : \lambda_b : \lambda_c = 64 : 4 : 1.$$

Величина q имѣетъ для различныхъ поперечныхъ сѣченій различное значеніе, а именно:

Сѣченіе круглое, радіусъ R . . . . $q = \frac{\pi R^4}{4}$

Сѣченіе прямоугольное со сторонами a ($\perp$ къ P, горизонтально) и b ($\parallel P$). . . . . $q = \frac{a'^3}{12}$

Сѣченіе квадратное (a^2). . . . . $q = \frac{a^4}{12}$

Трубка съ радіусами R и r . . . . $q = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4}$.

Вставляя q, относящееся къ прямоугольному сѣченію, въ (71), получаемъ

$$\lambda = k\frac{Pl^3}{a'^3 E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (71\,a)$$

гдѣ $k = 4, \frac{1}{4}$ или $\frac{1}{16}$, смотря по случаю гнутія. Приведенныя формулы выражаютъ слѣдующіе законы гнутія:

Стрѣла прогиба пропорціональна дѣйствующей силѣ и кубу длины стержня, и обратно пропорціональна модулю Юнга матеріала стержня; для стержня съ прямоугольнымъ сѣченіемъ стрѣла прогиба кромѣ того обратно пропорціональна ширинѣ стержня и кубу его высоты.

Формула (71) даетъ

$$E = \frac{k}{12q} \frac{Pl^3}{\lambda} \quad \text{. . . . .} \quad (72)$$

и въ частномъ случаѣ прямоугольнаго сѣченія

$$E = k \frac{Pl^3}{ab^3\lambda} \quad \text{. . . . .} \quad (72,a)$$

Этими формулами можно воспользоваться для опредѣленія модуля Юнга E, измѣряя стрѣлу прогиба λ. Для этого можно помощью катетометра измѣрить пониженіе конца или средины стержня; можно также воспользоваться способомъ трубы и шкалы (стр. 275), расположивъ зеркальце такъ, чтобы его вращеніе служило мѣрою стрѣлы прогиба λ.

Гораздо точнѣе, чѣмъ λ, можно измѣрить уголъ θ между касательной къ оси согнутаго стержня у его конца и первоначальнымъ направленіемъ этой оси. Теорія даетъ для случая (a), когда $k = 4$,

$$\lambda = \frac{2}{3} l \operatorname{tg}\theta \quad \text{. . . . .} \quad (73)$$

откуда для прямоугольнаго стержня

$$E = \frac{6Pl^2}{ab^3 \operatorname{tg}\theta} \quad \text{. . . . .} \quad (73,a)$$

Прикрѣпляя зеркало къ концу стержня легко измѣрить θ.

Еще чувствительнѣе способъ, предложенный A. Koenig'омъ (1886), приборъ котораго изображенъ на рис. 368. Къ двумъ концамъ стержня AB, на середину котораго дѣйствуетъ грузъ, прикрѣплены зеркальца p_1 и p_2. Лучи отъ шкалы S падаютъ сперва на зеркальце p_2, отражаются къ p_1, и затѣмъ въ трубу F. Въ этомъ случаѣ $k = \frac{1}{4}$, и въ (73) слѣдуетъ вставить $\frac{l}{2}$ вмѣсто l; такимъ образомъ

$$E = \frac{3Pl^2}{4ab^3 \operatorname{tg}\theta}.$$

Но легко вывести, что въ приборѣ Koenig'a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{n}{4D + 2d},$$

гдѣ n число дѣленій шкалы, которыя во время прогиба проходятъ черезъ

поле зрѣнія трубы, D разстояніе отъ S до p_2, и наконецъ d разстояніе зеркалъ p_1 и p_2 другъ отъ друга. Такимъ образомъ окончательно

$$E = \frac{3Pl^2(2D+d)}{2nab^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (74)$$

Комбинируя наблюденія надъ гнутіемъ и надъ крученіемъ, можно опредѣлить E и N, и отсюда σ по формулѣ (70).

Въ опытахъ Kirchhoff'а и Окатова стержень подвергался одновременному гнутію и крученію.

Покажемъ теперь, какъ вывести формулы (71) и (73). Ограничиваемся

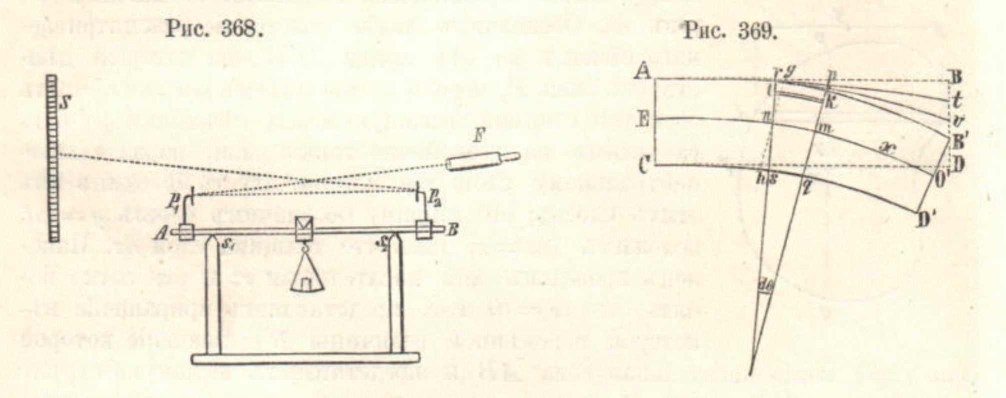


Рис. 368. Рис. 369.

первымъ случаемъ гнутія (рис. 367, a), когда $k = 4$. Итакъ, мы желаемъ доказать, что

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3q}\frac{Pl^3}{E} \\ \lambda &= \frac{2}{3}l\operatorname{tg}\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

Общее значеніе величины q, зависящей отъ площади поперечнаго сѣченія стержня, выяснится при этомъ выводѣ; частныя ея значенія были приведены на стр. 591.

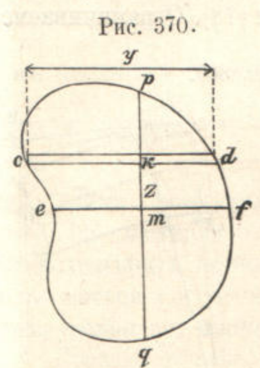
Положимъ, что площадь поперечнаго сѣченія стержня имѣетъ произвольную форму, показанную на рис. 370. Проведемъ черезъ стержень какую либо вертикальную плоскость, параллельную его боковой поверхности. Эта плоскость пересѣчетъ несогнутый стержень по прямоугольнику $ABDC$ (пунктиръ на рис. 369), который при гнутіи превратится въ фигуру $AB'D'C$. Допустимъ, что сѣченіе, изображенное на рис. 370, находится въ pq (рис. 369), и что прямыя $pktq$ на обоихъ рисункахъ изображаютъ одну и ту же линію пересѣченія двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей.

Если мысленно раздѣлить несогнутый стержень на тонкіе горизонтальные слои, то оказывается, что при гнутіи стержня верхніе слои удлиняются, растягиваются (напр. $AB' > AB$), между тѣмъ какъ нижніе укора-

чиваются, сжимаются ($CD' < CD$). Между ними находится **нейтральный** слой, длина котораго остается безъ измѣненія. Пусть EO' этотъ слой; онъ пересѣкаетъ разсматриваемое сѣченіе по прямой emf. Это сѣченіе подвергается парѣ силъ, стремящейся повернуть его около прямой ef, ибо упругія силы дѣйствуютъ на верхнюю часть $ecpdf$ по направленію къ неподвижному концу стержня, а на нижнюю часть eqf по направленію обратному; часть $mpAE$ (рис. 369) стремится сократиться, а часть $mqCE$ — удлиниться.

Вычислимъ моментъ M этой пары силъ, дѣйствующей на сѣченіе pq рисунка 369, изображенное отдѣльно на рис. 370. Для этого проведемъ безконечно близко къ этому сѣченію другое rs; уголъ между этими нормальными сѣченіями обозначимъ черезъ $d\vartheta$. Обозначивъ далѣе разстояніе разсматриваемаго сѣченія pq отъ конца $D'B'$, на который дѣйствуетъ сила P, черезъ x, мы имѣемъ $mn = dx$. Часть согнутаго стержня, лежащую между сѣченіями pq и rs раздѣлимъ на безконечно тонкіе слои, параллельные нейтральному слою mn или ef. Пусть lk одинъ изъ этихъ слоевъ; его ширину обозначимъ черезъ $y = cd$; положимъ $km = z$, такъ что толщина слоя dz. Наконецъ проведемъ двѣ касательныя rt и pv; легко понять, что $tv = d\lambda$ т.-е. представляетъ приращеніе нѣкоторой перемѣнной величины $B'v$, значеніе которой для $x = l$, когда касательная есть AB и представляетъ искомую стрѣлу прогиба $\lambda = B'B$. Слой lk имѣлъ первоначально длину $mn = dx$; проводя $hg \parallel pq$, мы видимъ, что его удлиненіе равно $nl \times d\vartheta = zd\vartheta$; чтобы увеличить длину dx на величину $zd\vartheta$, мы должны употребить силу, выраженіе которой легко получается изъ (8) стр. 560. Вставляя $L_0 = dx$, $\Delta L_0 = zd\vartheta$ и $s = ydz$ ($s =$ полоскѣ cd на рис. 370), получаемъ для искомой силы

Рис. 370.



$$E\frac{yzdzd\vartheta}{dx}.$$

Эта же сила дѣйствуетъ на полоску cd по направленію kl, стараясь повернуть сѣченіе pq около нейтральной линіи ef. Моментъ этой силы получимъ, умножая ее на z; онъ равенъ

$$E\frac{yz^2dzd\vartheta}{dx}.$$

Мы получимъ весь моментъ вращенія M, дѣйствующій на сѣченіе pq, взявъ сумму такихъ выраженій для всѣхъ слоевъ, отчасти растянутыхъ, отчасти сжатыхъ, касающихся сѣченія pq. Такъ какъ при произвольной формѣ сѣченія $y = cd$ зависитъ отъ $z = km$, то этотъ моментъ M равенъ

$$M = E\frac{d\vartheta}{dx}\int_{-z_1}^{z_2} yz^2dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

гдѣ z_1 и z_2 крайнія абсолютныя значенія величины z. Введемъ обозначеніе

$$\int_{-z_1}^{z_2} yz^2dz = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Очевидно q не что иное, какъ моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія стержня относительно прямой ef пересѣченія этой площади съ нейтральной поверхностью. Моментъ M уравновѣшивается моментомъ Px сгибающей силы, слѣд. (76) и (77) даютъ

$$E\frac{d\theta}{dx}q = Px,$$

или

$$Eqd\theta = Pxdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Уголъ между касательными rt и pv равенъ $d\theta$, длина ихъ равна x; такъ какъ $tv = d\lambda$, то получаемъ

$$d\lambda = xd\theta.$$

Далѣе (78) даетъ

$$Eqd\lambda = Px^2dx.$$

Взявъ сумму такихъ равенствъ для всѣхъ dx отъ $x = 0$ до $x = l$, получаемъ

$$Eq\lambda = \frac{Pl^3}{3},$$

или

$$\lambda = \frac{Pl^3}{3Eq} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

а это и есть первая формула (75). Для прямоугольнаго сѣченія $y = a$, $z_1 = z_2 = \frac{b}{2}$ и

$$q = a\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} z^2dz = \frac{ab^3}{12},$$

согласно соотвѣтствующему значенію q, приведенному на стр. 591.

Интегрируя формулу (78), получаемъ

$$Eq\theta = \frac{1}{2}Pl^2,$$

откуда θ или, при малыхъ деформаціяхъ, $tg\theta$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{Pl^2}{2Eq} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79,a)$$

Сравнивая это съ (79), находимъ

$$\lambda=\frac{2}{3}l\operatorname{tg}\theta,$$

т.-е. вторую изъ формулъ (75).

Формула (79,*a*) даетъ

$$E=\frac{Pl^2}{2q\operatorname{tg}\theta},$$

т.-е. обобщеніе формулы (73,*a*).

§ 18. Относительное сопротивленіе; разломъ и разрывъ при крученіи. Въ §§ 6 и 7 мы познакомились съ явленіемъ разрыва тѣла на части, происходящимъ при его растяженіи или одностороннемъ сжатіи. Такой же разрывъ можетъ произойти и при сгибаніи и крученіи тѣла. Въ первомъ случаѣ мы говоримъ о разломѣ; величина деформирующей силы въ этомъ случаѣ характеризуетъ т. наз. относительное сопротивленіе матеріала, изъ котораго состоитъ сгибаемый стержень.

Положимъ, что стержень подпертъ въ серединѣ и что къ концамъ приложены двѣ сгибающія его силы P; пусть L длина половины стержня; тогда

$$P=q'\frac{p'}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

выражаетъ величину силы, потребной для разлома. Здѣсь p' мало отличается отъ абсолютнаго сопротивленія p_2, о которомъ было сказано въ § 6; q' зависитъ отъ вида и размѣровъ площади поперечнаго сѣченія, а именно:

Сѣченіе прямоугольное (a ширина, $b \parallel P$) . . . . $q'=\frac{1}{6}ab^2$

Сѣченіе квадратное . . . . $q'=\frac{1}{6}a^3$

Сѣченіе круглое . . . . $q'=\frac{\pi}{4}r^3$.

Когда стержень свободно опирается концами (рис. 367,*b* стр. 591), то сопротивленіе разлому (P въ серединѣ) въ 4 раза больше, а когда оба конца закрѣплены неподвижно (рис. 367,*c*), то оно въ 8 разъ больше.

Для прямоугольнаго сѣченія мы имѣемъ

$$P=\frac{ab^2}{6L}p'.$$

Изъ круглаго ствола даннаго діаметра D получается прямоугольный стержень (балка), наиболѣе сопротивляющійся разлому, если взять $a=\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{D}{\sqrt{3}}$.

Разрывъ при крученіи происходитъ подъ дѣйствіемъ пары силъ, моментъ которой зависитъ отъ матеріала, и пропорціоналенъ нѣкоторой величинѣ q'', зависящей отъ поперечнаго сѣченія стержня:

Сѣченіе круглое . . . . $q'' = \frac{\pi}{2} r^3$

Сѣченіе прямоугольное . . . . $q'' = \frac{2}{3} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$

Сѣченіе квадратное . . . . $q'' = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

Эти формулы указываютъ на зависимость сопротивленія стержня разрыву при крученіи отъ вида его поперечнаго сѣченія.

Деформаціи могутъ вызываться не только внѣшними силами, но и тепловыми дѣйствіями, сопровождающимися неравномѣрными измѣненіями температуры въ различныхъ точкахъ тѣла. Winckelmann и Schott ввели понятіе о термическомъ коеффиціентѣ сопротивленія, характеризующемъ то внезапное измѣненіе температуры части тѣла, при которомъ происходитъ разрывъ. Эта величина зависитъ отъ модуля Юнга E, абсолютнаго сопротивленія, коеффиціента теплового расширенія, теплопроводности, теплоемкости и плотности вещества. Интересно, что стекло легче переноситъ внезапное повышеніе, чѣмъ внезапное пониженіе температуры.

§ 19. Тягучесть и текучесть. На стр. 556 мы назвали тягучими такія тѣла, которыя способны быстро подвергаться весьма значительнымъ остающимся деформаціямъ подъ вліяніемъ достаточно сильныхъ внѣшнихъ воздѣйствій, безъ прекращенія цѣльности тѣла, т.-е. разрыва, разлома и т. д. Для того, чтобы тѣло было тягуче, необходимо, чтобы предѣлъ упругости (стр. 556) достигался гораздо раньше разрыва, чтобы p_1 было значительно меньше p_2 (стр. 564). Тѣла хрупкія не могутъ обладать тягучестью въ указанномъ смыслѣ; остаточныя деформаціи въ нихъ не вызываются кратковременно дѣйствующими силами, которыя даютъ или временную деформацію или производятъ разрывъ, разломъ и т. д.

Отъ тягучести мы отличаемъ текучесть: способность тѣлъ при нѣкоторыхъ условіяхъ мѣнять свою форму приблизительно такъ, какъ мѣняется форма жидкости, обладающей значительною степенью вязкости (стр. 516). Текучесть проявляется въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, подъ вліяніемъ слабыхъ, но весьма долго дѣйствующихъ силъ; во-вторыхъ, при дѣйствіи весьма громадныхъ давленій почти на всю поверхность тѣлъ.

Тягучесть можетъ выражаться способностью вещества безъ разрыва вытягиваться въ весьма тонкія нити подъ вліяніемъ односторонне дѣйствующей тяги, или безъ разрыва принимать форму тонкихъ пластинокъ подъ вліяніемъ послѣдовательныхъ ударовъ, или при т. наз. прокаткѣ или вальцовкѣ. Порядокъ, въ которомъ располагаются металлы относительно способности вытягиваться въ нити или сплющиваться въ тонкія пластинки не одинъ и тотъ же. Это понятно, ибо при протягиваніи проволоки она подвергается сильному натяженію, и потому должна обладать, кромѣ тягучести, еще и достаточно большимъ сопротивленіемъ разрыву. Порядокъ металловъ относительно ихъ способности вытягиваться въ тонкія проволоки слѣдующій: *Pt*, *Ag*, *Fe*, *Cu*, *Au*, *Zn*, *Sn*, *Pb*. Косвенымъ способомъ удавалось получать проволоку изъ *Pt*, толщиною въ 0,00005 мм. Относительно способности

сплющиваться въ тончайшіе листки металлы располагаются въ такомъ порядкѣ: *Au*, *Ag*, *Cu*, *Pt*, *Sn*, *Zn*, *Fe*. Толщина золотого листочка можетъ быть доведена до 0,00001 мм.

Съ повышеніемъ температуры тягучесть увеличивается; особенно это замѣтно для нѣкоторыхъ тѣлъ, хрупкихъ при обыкновенной температурѣ, каковы стекло шеллакъ (сургучъ).

Обращаемся къ явленіямъ текучести, происходящимъ подъ вліяніемъ слабыхъ силъ, весьма продолжительное время дѣйствующихъ въ одномъ направленіи. Такія силы могутъ вызвать непрерывныя измѣненія формы даже у хрупкихъ тѣлъ. Такъ хрупкая палочка сургуча, подпертая съ двухъ концовъ, мало-по-малу изгибается подъ вліяніемъ собственнаго вѣса, и то же самое замѣчается, хотя и въ гораздо меньшей степени, съ палочками стеклянными. Bottomley предпринялъ въ 1881 г. въ Глазговѣ «вѣковыя» наблюденія надъ проволоками изъ *Au*, *Pt*, *Ag* и другихъ металловъ, постепенныя измѣненія которыхъ предполагается наблюдать въ теченіе многихъ лѣтъ. Замѣчательною текучестью обладаетъ ледъ, вполнѣ хрупкая масса котораго, подъ вліяніемъ непрерывнаго давленія, течетъ, чрезвычайно напоминая законы теченія жидкостей. Это наилучшимъ образомъ наблюдается на ледникахъ, медленно спускающихся въ долины. Массы твердаго льда принаравливаются къ мѣняющейся ширинѣ русла; онѣ съуживаются и расширяются подобно вязкой жидкости При этомъ средина ледяного потока течетъ быстрѣе, чѣмъ его края, что легко обнаруживается измѣненіемъ расположенія вѣхъ, разставленныхъ поперекъ ледника.

Замѣчательною текучестью обладаетъ т. наз сапожный варъ, черное, смолистое и весьма хрупкое тѣло. Тонкая палочка вара легко изгибается, если производить гнутіе медленно и съ небольшою силою; при быстромъ же сгибаніи она ломается какъ стекло, причемъ и поверхность разлома получается гладкая, блестящая, совершенно напоминающая поверхность разлома стекла. Куски вара медленно текутъ подъ вліяніемъ собственнаго вѣса. Если куски твердаго вара положить въ воронку, то они мало-по-малу соединяются, образуя сплошную массу съ горизонтальной поверхностью, медленно вытекающую черезъ трубку воронки. Небольшой грузъ (монета), положенный на кусокъ вара, тонетъ въ немъ; кусокъ вара, положенный на наклонную плоскость, стекаетъ по ней. Если изъ дерева построить модель горы со спускающейся долиной, которая то съуживается, то расширяется, и расположить около ея вершины куски вара, то наблюдаются всѣ явленія, сопровождающія теченіе ледниковъ.

Другой случай текучести обнаруживается при весьма сильныхъ давленіяхъ на бо̀льшую часть поверхности тѣлъ, напр. металловъ. Опыты, сюда относящіеся, производилъ въ особенности Tresca. Онъ накладывалъ другъ на друга рядъ пластинокъ изъ испытуемаго металла на крѣпкую плитку, снабженную посерединѣ круглымъ отверстіемъ, и подвергалъ ихъ весьма сильному давленію. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ пластинки свободно лежали на плиткѣ, имѣя возможность раздаться въ стороны. Въ другихъ опытахъ онъ помѣщалъ испытуемыя пластинки во внутрь толстостѣннаго цилиндра, дно котораго имѣло отверстіе. Во всѣхъ случаяхъ металлъ какъ

бы вытекалъ изъ отверстія, образуя выступающій наружу стержень. Полученное послѣ сжатія тѣло Tresca распиливалъ продольно, и подвергалъ поверхность разрѣза шлифовкѣ. Тогда ясными линіями обозначались границы отдѣльныхъ слоевъ, соотвѣтствовавшихъ первоначально наложеннымъ другъ на друга пластинкамъ, что̀ дало возможность прослѣдить тѣ измѣненія формы, которымъ подверглась каждая изъ пластинокъ. На рис. 371 показанъ разрѣзъ черезъ тѣло, полученное при такомъ сдавливаніи нагрѣтыхъ желѣзныхъ пластинокъ, а на рис. 372 то же самое для ряда свинцовыхъ пластинокъ. Форма слоевъ чрезвычайно напоминаетъ контуры вязкой жидкости, вытекающей изъ отверстія.

На текучести металловъ основаны многіе пріемы обработки металловъ, примѣняемые въ техникѣ, напр. приготовленіе баночекъ для масля-

Рис. 371.

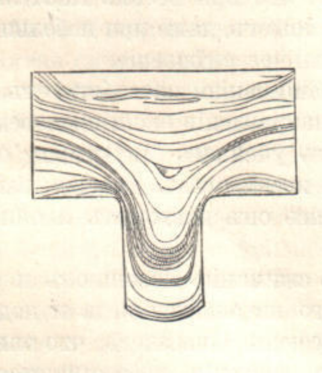
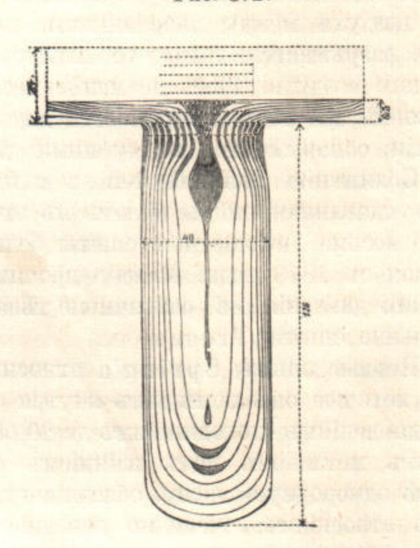


Рис. 372.



ныхъ красокъ: на дно цилиндра кладется кусокъ олова, который сжимается длиннымъ поршнемъ; діаметръ поршня нѣсколько меньше діаметра полости цилиндра. Подъ вліяніемъ давленія олово втекаетъ въ свободное пространство между поршнемъ и цилиндромъ, образуя баночку желаемой формы. Чеканка монетъ и медалей также основана на текучести металловъ.

Текучесть проявляется и въ неметаллическихъ тѣлахъ, какъ показали опыты Spring'a, которые мы, вмѣстѣ съ другими его опытами, разсмотримъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 20. Вліяніе давленія на тѣла соприкасающіяся; опыты Spring'a. Молекулярныя силы дѣйствуютъ между частицами твердаго тѣла только на весьма малыхъ разстояніяхъ, чѣмъ и объясняется, что сложенныя части раздробленнаго тѣла не сращиваются вновь въ одно цѣлое, такъ какъ неровности поверхности препятствуютъ достаточно полному сближенію частицъ. Въ тѣхъ, однако, случаяхъ, когда достигается достаточное сближеніе по-

верхностей двухъ тѣлъ, возможно и возникновеніе частичныхъ силъ, а слѣд. и сращиваніе тѣлъ какъ бы въ одно тѣло. Такое сближеніе возможно, во-первыхъ, когда одно изъ тѣлъ приведено въ жидкое состояніе—на этомъ основаны спайка, склеиваніе и т. под. Во-вторыхъ, сближеніе до радіуса сферы частичныхъ дѣйствій легко достигается для тѣлъ мягкихъ: куски разрѣзаннаго воска, каучука и даже свинца легко сращиваются при небольшомъ нажатіи ихъ другъ къ другу при условіи свѣжести поверхности разрѣза; пыль, окисленіе и т. д. препятствують сращиванію (свариваніе раскаленнаго желѣза).

Молекулярныя силы проявляются и между кусками другихъ тѣлъ при нажатіи, если поверхности были тщательно отполированы. Необходимо однако замѣтить, что кажущееся сцѣпленіе двухъ стеклянныхъ пластинокъ, сложенныхъ вмѣстѣ, описываемое обыкновенно во всѣхъ элементарныхъ курсахъ физики, объясняется не дѣйствительнымъ появленіемъ молекулярныхъ силъ между частицами двухъ стеколъ, но, какъ показалъ Stefan, тѣмъ, что слой воздуха между пластинками, послѣ нажатія пластинокъ другъ къ другу, разрѣжается, такъ что пластинка поддерживается давленіемъ окружающаго воздуха. Тѣмъ не менѣе несомнѣнно, что при весьма тщательной полировкѣ плоскихъ поверхностей двухъ тѣлъ можетъ, даже при небольшомъ нажатіи, обнаружиться между ними дѣйствительное сцѣпленіе.

Сближенію поверхностей, а слѣд. и сращиванію, способствуетъ, понятно, сдавливаніе тѣлъ, и вотъ въ этомъ-то направленіи были произведены многіе весьма любопытные опыты бельгійскимъ ученымъ M. Spring'омъ, начиная съ 1878 года. Между прочимъ онъ изслѣдовалъ вообще вліяніе сильнаго давленія на различныя тѣла, причемъ онъ повторилъ и описанные выше опыты Tresca.

Первые опыты Spring'а относились къ сжиманію порошковъ и опилокъ, которые онъ помѣщалъ внутри стального параллелепипеда и подвергалъ давленіямъ, доходившимъ до 20,000 атмосферъ. Оказалось, что опилки многихъ металловъ подъ вліяніемъ сильнаго давленія превращаются въ вполнѣ однородную массу, обладающую во многихъ случаяхъ кристаллическимъ строеніемъ; очевидно давленіе производитъ одинаковое съ плавленіемъ дѣйствіе. Spring изслѣдовалъ всего 83 тѣла, причемъ обнаружилось, что давленіе вызываетъ не только сращиваніе разрозненныхъ частей, но и такія измѣненія структуры, которыя сопряжены съ уплотненіемъ вещества и, наконецъ, химическія реакціи и образованіе сплавовъ, которыя обыкновенно происходятъ только при плавленіи веществъ. Приведемъ примѣры. Свинцовые опилки обращаются въ однородную компактную массу при давленіи въ 2000 атм.; опилки цинка — при 5000 атм.; порошокъ графита при 5000 атм. обращается въ твердую массу, а перекись марганца въ тѣло, тожественное съ натуральнымъ пиролузитомъ. Порошокъ селитры превратился въ однородную, полупрозрачную массу. Деревянные опилки дали твердую массу (плотность 1.328) съ раковистымъ изломомъ. Куски призматической сѣры, а также сѣра мягкая превращались въ сплошную массу сѣры октаэдрической, болѣе плотной. Красный аморфный P превращался въ фосфоръ металлическій. Почти бѣлый порошокъ $CuSO_4 + 5H_2O$ переходилъ при 6000 атм. въ голубую прозрачную массу. Камфора превращается

въ массу замѣчательно прозрачную. Торфъ переходитъ при 6000 атм. въ блестящую черную массу, вполнѣ напоминающую каменный уголь; кромѣ того онъ при этомъ давленіи становится вполнѣ текучимъ. Воскъ при 700 атм. и параффинъ при 2000 атм. текутъ, какъ вода. Крахмалъ даетъ при 6000 атм. компактную массу, просвѣчивающую около краевъ. Прибавка нѣсколькихъ капель воды препятствуетъ сращиванію металловъ, но способствуетъ сращиванію кусковъ мрамора, окиси ртути и т. д.

Изъ своихъ наблюденій надъ 83 веществами Spring вывелъ, что кристаллическія вещества всѣ спаиваются при сильномъ давленіи; если они были взяты въ аморфномъ состояніи, то они подъ вліяніемъ давленія принимаютъ кристаллическую структуру. Многія аморфныя тѣла не спаиваются.

Далѣе Spring сдавливалъ смѣси опилокъ нѣсколькихъ металловъ и получалъ вполнѣ однородные сплавы, напр. сплавъ Wood'а (*Bi, Pb, Sn, Cd*) съ точкою плавленія при 70°, и даже латунь изъ опилокъ *Cu* и *Zn*.

Особенный интересъ представляетъ возникновеніе химическихъ реакцій при сдавливаніи смѣсей нѣсколькихъ тѣлъ.

Такъ Spring получилъ соединенія металловъ съ мышьякомъ и сѣрою, сдавливая смѣси опилокъ съ порошкообразнымъ *As* или *S*. Смѣсь хлористой ртути и мѣдныхъ опилокъ дала Cu_2Cl_2 и *Hg*; смѣсь іодистаго калія и хлористой ртути дала іодистую ртуть и хлористый калій. Смѣсь Na_2CO_3 и $BaSO_4$ переходитъ въ $BaCO_3$ и Na_2SO_4.

Во всѣхъ разсмотрѣнныхъ опытахъ сильное давленіе какъ бы замѣняетъ собою плавленіе; сближая частицы, оно способствуетъ проявленію между ними силъ сцѣпленія, а также химическаго сродства. Spring распространяетъ такое объясненіе и на сращиваніе двухъ кусковъ льда, происходящее даже при слабомъ давленіи, отвергая объясненіе Thomson'а, основанное на пониженіи точки плавленія льда при давленіи (см. Отдѣлъ девятый, Ученіе о теплотѣ).

Въ 1894 г. Spring опубликовалъ новые весьма любопытные опыты сращиванія металловъ и образованія сплавовъ при весьма слабомъ давленіи и повышенной температурѣ (отъ 200° — 400°), дѣйствующими продолжительное время.

Укажемъ сперва на объясненіе этихъ явленій, данное Spring'омъ. По его мнѣнію и въ твердыхъ тѣлахъ, какъ въ газахъ (стр. 401), частицы обладаютъ различными скоростями; между ними находятся такія скорости, которыя равны скоростямъ частицъ при температурѣ плавленія, если только тѣла не слишкомъ тугоплавки. Такія «жидкія» частицы должны особенно обильно встрѣчаться у поверхности тѣла, гдѣ движеніе частицъ вообще происходитъ свободнѣе. Эти-то частицы и вызываютъ постепенное сращиваніе соприкасающихся тѣлъ.

Spring ставилъ сперва два цилиндра изъ одинаковаго металла весьма тщательно отшлифованными основаніями одинъ на другой, слабо сжималъ ихъ и держалъ нѣкоторое время при повышенной температурѣ. Оказалось, что они сращивались, образуя одинъ сплошной цилиндръ. Такое сращиваніе происходило для цилиндровъ

изъ *Sb*	при	395°	въ	12	часовъ
» *Al*	»	418	»	8	»
» *Bi*	»	240	»	7	»
» *Cu*	»	403	»	8	»
» *Sn*	»	190	»	8	»
» *Au*	»	400	»	4	»
» *Pt*	»	400	»	4	»
» *Pb*	»	300	»	6	»
» *Zn*	»	385	»	3	»

Только для сурьмы, тѣла весьма хрупкаго, сращиваніе оказалось слабымъ. Второй рядъ опытовъ былъ произведенъ съ цилиндрами изъ различныхъ металловъ. При этомъ металлы не только вполнѣ сращивались, но и образовывали толстый слой сплава. Такъ *Cu* и *Zn* дали въ 6—8 часовъ при 400° сплавъ толщиною въ 18 мм., оба металла какъ бы диффундировали одинъ въ другой. Взаимную диффузію соприкасающихся металловъ, а именно золота и свинца, изслѣдовалъ также Roberts-Austen.

§ 21. Упругое послѣдѣйствіе. W. Weber замѣтилъ въ 1835 г. такое явленіе: если подвергнуть шелковую нить дѣйствію растягивающаго груза, то она мгновенно получаетъ нѣкоторое удлиненіе, которое затѣмъ медленно продолжаетъ увеличиваться въ теченіе 36 часовъ. Если снять грузъ, то нить мгновенно укорачивается, но не до первоначальной длины; длина ея въ тетеченіе 20 сутокъ продолжаетъ замѣтно уменьшаться. Это явленіе Weber назвалъ упругимъ послѣдѣйствіемъ (elastische Nachwirkung). Къ изслѣдованію этого важнаго явленія, полная разгадка котораго могла бы пролить яркій свѣтъ на законы дѣйствія молекулярныхъ силъ и способствовать разъясненію вопроса о строеніи твердыхъ тѣлъ, обратился въ 1863 г. F. Kohlrausch. Онъ изслѣдовалъ упругое послѣдѣйствіе при крученіи стеклянныхъ нитей, металлическихъ проволокъ и каучука. Онъ нашелъ, что послѣдѣйствіе приблизительно пропорціонально величинѣ деформаціи и быстро возростаетъ съ повышеніемъ температуры. Если обозначить послѣдѣйствіе, т.-е. ту деформацію, которая наблюдается послѣ прекращенія дѣйствія закручивающей пары, черезъ x, то эта величина есть функція времени t, безконечно убывающая съ возростаніемъ t. Для всѣхъ изслѣдованныхъ тѣлъ x можетъ быть представлено въ видѣ

$$x = Ce^{-at^m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

Во многихъ случаяхъ достаточна и болѣе простая форма

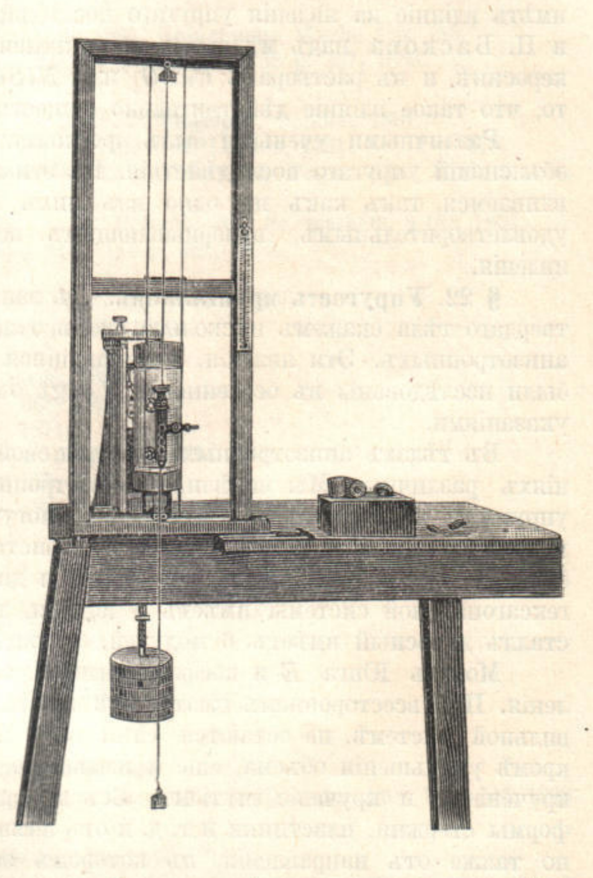
$$x = \frac{C}{t^a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

гдѣ C, a и m постоянныя.

Весьма замѣчательно также явленіе, замѣченное Kohlrausch'емъ: онъ сперва сильно и на долгое время закрутилъ проволоку въ одномъ направленіи, предоставилъ ее затѣмъ самой себѣ, и наблюдалъ постепенно умень-

шающійся уголъ крученія, соотвѣтствовавшій упругому послѣдѣйствію. Когда этотъ уголъ имѣлъ еще довольно большое значеніе, Kohlrausch на мгновеніе закрутилъ проволоку на небольшой уголъ въ противоположную сторону и вновь предоставилъ ее самой себѣ. Оказалось, что этотъ уголъ быстро дошелъ до нуля, затѣмъ вновь получилось крученіе въ сторону первой деформаціи, которое, дойдя до нѣкоторой величины, опять стало постепенно уменьшаться. Такимъ образомъ первое послѣдѣйствіе, еще не успѣвшее исчезнуть, какъ бы вновь обнаружилось, несмотря на происшедшую деформацію въ противоположную сторону.

Рис. 373.



Далѣе Streintz, O. E. Meier, Boltzmann, Maxwell, Neesen, G. Wiedemann, Braun, Nissen, Austin и въ особенности Н. А. Гезехусъ занимались опытнымъ и теоретическимъ изслѣдованіемъ упругаго послѣдѣйствія. Оказалось, что это явленіе особенно рѣзко обнаруживается въ каучукѣ, гуттаперчѣ, стеклѣ и свинцѣ; въ другихъ металлахъ оно почти незамѣтно, хотя впрочемъ въ серебрѣ, мѣди и латуни оно было измѣрено Austen'омъ. При повышеніи температуры на 1° Austen нашелъ увеличеніе послѣдѣйствія при крученіи названныхъ трехъ металловъ на 3%.

Н. А. Гезехусъ изслѣдовалъ въ особенности упругое послѣдѣйствіе въ каучукѣ. Чтобы слѣдить за постепенными измѣненіями длины каучуковаго шнурка, онъ пользовался приборомъ, изображеннымъ на рис. 373. Вертикальный металлическій цилиндръ, поверхность котораго передъ каждымъ опытомъ покрывалась листомъ бумаги, приводился въ равномѣрное вращательное движеніе помощью часового механизма. Нижній конецъ каучуковаго шнурка прикрѣплялся къ пишущему снаряду, снабженному тремя колесиками, двигавшимися при измѣненіи длины шнурка по двумъ металлическимъ проволокамъ, туго натянутымъ внутри большой деревянной рамки. Къ этому снаряду былъ присоединенъ карандашъ, который чертилъ линію по поверхности цилиндра. Изслѣдованіе этой линіи и давало возмож-

ность изучить законы постепеннаго измѣненія длины шнурка въ различныхъ случаяхъ.

Главнѣйшіе результаты, къ которымъ пришелъ Н. А. Гезехусъ, суть слѣдующіе. Когда деформація продолжается весьма короткое время, то упругое послѣдѣйствіе незамѣтно. Деформированный невытянутый каучукъ скорѣе приходитъ въ состояніе равновѣсія, чѣмъ вытянутый. Чѣмъ больше поверхность при данной массѣ, тѣмъ меньше упругое послѣдѣйствіе. Съ повышеніемъ температуры уменьшается упругое послѣдѣйствіе каучука. Далѣе Н. А. Гезехусъ высказалъ мысль, что окружающая среда должна имѣть вліяніе на явленія упругаго послѣдѣйстія. Опыты П. Бахметьева и П. Баскова надъ мѣдными и никкелевыми проволоками въ воздухѣ, керосинѣ и въ растворахъ $CuSO_4$ или $NiSO_4$ повидимому указываютъ на то, что такое вліяніе дѣйствительно существуетъ.

Различными учеными былъ предложенъ цѣлый рядъ разнообразныхъ объясненій упругаго послѣдѣйствія. На этихъ объясненіяхъ мы не останавливаемся, такъ какъ ни одно изъ нихъ не можетъ считаться вполнѣ удовлетворительнымъ, исчерпывающимъ всѣ стороны этого интереснаго явленія.

§ 22. Упругость кристалловъ. Въ заключеніе главы о деформаціяхъ твердаго тѣла скажемъ нѣсколько словъ о явленіяхъ упругости въ тѣлахъ анизотропныхъ. Эти явленія, отличающіяся весьма большою сложностью, были изслѣдованы въ особенности Voigt'омъ. Ограничиваемся немногими указаніями.

Въ тѣлахъ анизотропныхъ упругія свойства въ различныхъ направленіяхъ различны. Мы видѣли, что изотропныя тѣла имѣютъ два модуля упругости, черезъ которые всѣ остальные могутъ быть выражены, напр. черезъ модуль сжатія K и модуль сдвига N. Кристаллъ правильной системы имѣетъ уже три модуля, одинъ для сжатія и два для сдвига; кристаллъ напр. гексагональной системы имѣетъ 4 модуля, два разныхъ K и два N; кристаллъ двуосный имѣетъ 6 модулей, 3 модуля сжатія и 3 модуля сдвига.

Модуль Юнга E и коеффиціентъ Пуассона σ зависятъ отъ направленія. При всестороннемъ сжатіи всѣ кристаллы, не принадлежащіе къ правильной системѣ, не остаются сами себѣ подобными, но претерпѣваютъ, кромѣ уменьшенія объема, еще и измѣненіе формы. Гнутіе сопровождается крученіемъ и крученіе гнутіемъ. Всѣ деформаціи зависятъ не только отъ формы стержня, пластинки и т. д. и отъ внѣшнихъ дѣйствующихъ причинъ, но также отъ направленія, въ которомъ эти тѣла были вырѣзаны изъ кристалла.

ЛИТЕРАТУРА.

УЧЕБНИКИ ТЕОРІИ УПРУГОСТИ:

A. Clebsch. Theorie der Elasticitaet. Leipzig, 1862.

F. Grashof. Theorie der Elasticitaet und Festigkeit. Berlin, 1878.

Д. Бобылевъ. Гидростатика и теорія упругости. Спб. 1886.

A. Beer. Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticitaet und Capillaritaet. Leipzig, 1869.

G. Lamé. Leçons sur la théorie mathematique de l'élasticité. Paris, 1866.
F. Neumann. Vorlesungen ueber die Theorie der Elasticitaet. Leipzig, 1883.
Weyrauch. Theorie elastischer Koerper. Leipzig, 1884.
Mathieu. Théorie de l'élasticité. Paris, 1890.

Къ § 1.

Hooke. A description of helioscopes. London, 1675; Lectures de potentia restitutiva. London, 1678; Philosophical tracts and collections. London, 1679.
Poisson. Mémoire sur le mouvement des corps élastiques. Mém. de l'Acad. des Sc. 8, 1829; Journ. de l'école polytechn. 20 cahier, 1831.
Kirchhoff. Crelle's Journal 40 и 56.

Къ § 3.

H. Hertz. Crelle's Journal 92 p. 156, 1882. Gesammelte Werke I p. 155.
F. Auerbach. W. A. 43 p. 61, 1891; 45 p. 262, 1892; 58 p. 357, 1896.

Къ § 5.

Th. Young. Course of lectures on natural Philosophy. London, 1807.
S'Gravesande. Physicae Elementa mathematica. Leyden, 1721. Vol. I p. 375.
Wertheim. Ann. chim. et phys. (3) 12 p. 385, 1844; Pogg. Ann. Ergb. 2 p. 1, p. 73, 1848.
Kupffer. Mém. de l'Acad. d. Sc. de St. Pétersb. (6), Sc. mathém. 6 (8), 1856.
Kohlrausch und Loomis. Pogg. Ann. 141 p. 481, 1870.
Tomlinson. Phil. Mag. 23, 1887.
Noyes. Physical Review II p. 277, 1895; III p. 432, 1896.
A. M. Mayer. Phil. Mag. (5) 41 p. 168, 1896.
Auerbach. W. A. 58 p. 381, 1896.
Н. Гезехусъ. Ж. Ф. Х. О. 11 p. 98, 1879.
Georg S. Meyer. W. A. 59 p. 668, 1896.
Villari. Pogg. Ann. 143 p. 88, 1871.
Winkelmann und Schott. W. A. 51 p. 698, 1894.
J. O. Thompson. W. A. 44 p. 555, 1891.
Dewar. Chemical News. 71 p. 192, 199, 1895; Instr. 15 p. 375, 1895.

Къ § 8.

Окатовъ Теорія равновѣсія и движенія упругой проволоки. Спб. 1867. Pogg. Ann. 119 p. 11, 1863.
Schneebeli. Pogg. Ann. 140, p. 589, 1870.
Kirchhoff. Pogg. Ann. 108 p. 369, 1859.
Voigt. Berl. Ber. 1883 p. 961; 1884 p. 1004.
Roentgen. Pogg. Ann. 159 p. 601, 1876.
Katzenelsohn. Diss. Berlin, 1887.
Bock. W. A. 52 p. 609, 1894.
Smoluchowsky. Wien. Ber. 103 p. 739, 1894.
Cagnard Latour. Ann. chim. et phys. 36 p. 384, 1827; Pogg. Ann. 12 p. 516, 1828.

Къ § 10.

Regnault. Mém. de l'Acad. des Sc. 21, 1847.
Amagat. C. R. 99 p. 130, 1884; 106 p. 479, 1888. Ann. chim. et phys. (6), 22 p. 95, 1891.
Voigt. W. A. 31 p. 479, 1887; 34 p. 981, 1888; 35 p. 642, 1888; 41 p. 712, 1890.

Къ § 13.

Coulomb. Mém. de l'Acad. des Sc. Paris, 1784.
Savart. Ann. chim. et phys. (2) 41 p. 373, 1829; Pogg. Ann. 16 p. 206, 1829.
Wertheim. Ann. chim. et phys. (3) 12 p. 385, 1844; 23 p. 52, 1849; 50 p. 202, 1857; Pogg. Ann. 78 p. 381, 1829.
Saint-Venant. Torsion des prismes. Paris, 1855.

Къ § 16.

Baumeister. W. A. 18 p. 578, 1882.

Pisati. Nuovo Cimento. (3) 4 p. 152, 1878; 5 p. 34 p. 135, 1878.

Къ § 17.

A. Koenig. W. A. 28 p. 108, 1886.

Къ § 19.

Bottomley. Reports of the Brit. Assoc. 1881—1887.
Tresca. C. R. 59 p. 754, 1864; 60 p. 398, 1865; 64 p. 809, 1867.
W. Spring. Ann. chim. et phys. (5) 22 p. 170, 1881.

Къ § 20.

Spring. Bull. de l'Ac. R. d. Belg. (2) 45 p. 746, 1878; 49 p. 323, 1880; (3) 14 p. 595, 1887; Chem. Ber. 15 p. 595, 1881; 16 p. 324, p. 999, 1883; Bull. Soc. Chim. (Paris) 40 p. 520, 1883; 41 p. 488, 1884; 44 p. 166, 1885; 46 p. 299, 1886; 50 p. 218, 1888; Sill. J. (3) 35 p. 78, 1888; 36 p. 286, 1888; Ann. Soc. géol. Belg. 15 p. 156, 1888.
Roberts-Austen. Proc. Royal Soc. of London. 49 p. 281, 1896.

Къ § 21.

W. Weber. Pogg. Ann. 34 p. 247, 1835; 54 p. 1, 1841.
F. Kohlrausch. Pogg. Ann. 119 p. 337, 1863; 128 p. 1, 1866; 158 p. 337, 1876; 160 p. 225, 1877.
Streintz. Pogg. Ann. 153 p. 387, 1874; Wien. Ber. 79, 1874; 80 p. 397; Carl's Repert. 16 p. 476, 1880.
Maxwell. Encyclop. Br. 9 изд. T. VI p. 313.
Neesen. Pogg. Ann. 157 p. 579, 1876.
Braun. Pogg. Ann. 159 p. 337, 1876; Carl's Repert. 17 p. 253, 1881.
G. Wiedemann. Pogg. Ann. 103 p. 563, 1858; 106 p. 161; 107 p. 139, 1859; 117 p. 183, 1862; Wied. Ann. 6 p. 502, 1879.
Boltzmann. Crelle's Journal 81 p. 96; W. A. 5 p. 430, 1878.
O. E. Meyer. Crelle's Journ. 78 p. 130; Pogg. Ann. 151 p. 108, 1874; 154 p. 358, 1875; W. A. 4 p. 249, 1878.
Н. А. Гезехусъ. Ж. Р. Ф. Х. О. 14 стр. 287, 1882; Beibl. 7 p. 654, 1883.
П. Бахметьевъ и *П. Басковъ.* Ж. Ф. Х. О. 28 стр. 217, 1896.

Къ § 22.

Voigt. См. выше къ § 10.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

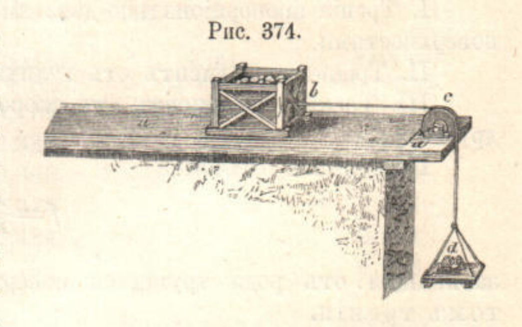
Треніе и ударъ твердыхъ тѣлъ.

§ 1. Внутреннее треніе въ твердыхъ тѣлахъ. На стр. 406 и 516 мы познакомились съ явленіями внутренняго тренія въ тѣлахъ газообразныхъ и жидкихъ. Такъ какъ точныхъ границъ между тремя состояніями матеріи не существуетъ и слѣды свойствъ, рѣзко выраженныхъ въ одномъ состояніи, почти всегда находятся и въ другихъ, то можно ожидать, что слѣды внутренняго тренія или вязкости найдутся и въ тѣлахъ твердыхъ; коеффиціентъ тренія (стр. 407 и 516), если о таковомъ можетъ быть рѣчь, долженъ быть весьма великъ. Работы многихъ ученыхъ дѣйствительно указываютъ на то, что и для твердыхъ тѣлъ можно ввести представленіе о внутреннемъ треніи. Такъ нѣкоторые ученые объясняютъ явленія упругаго послѣдѣйствія внутреннимъ треніемъ въ деформированномъ тѣлѣ. Но въ

особенности тѣсную связь съ внутреннимъ треніемъ имѣетъ явленіе затуханія (стр. 135), замѣчаемое при колебаніяхъ упругихъ тѣлъ. Если тѣло прикрѣпить къ нижнему концу проволоки, повернуть его на нѣкоторый уголъ и затѣмъ предоставить самому себѣ, то оно будетъ производить вращательныя колебательныя движенія въ ту и другую сторону. Однако амплитуда колебаній будетъ постепенно уменьшаться, что лишь отчасти можетъ быть объяснено треніемъ воздуха и передачей энергіи движенія окружающимъ тѣламъ черезъ точку закрѣпленія проволоки. Остается часть затуханія, которую только и можно объяснить внутреннимъ треніемъ, сопровождающимъ сдвигъ слоевъ проволоки.

§ 2. Треніе между твердыми тѣлами при скольженіи Когда поверхность одного твердаго тѣла скользитъ по поверхности другого, положимъ неподвижнаго, причемъ оба тѣла прижимаются другъ къ другу нѣкоторою силою P, то развивается новая сила F, касательная къ поверхности соприкосновенія, и дѣйствующая на движущееся тѣло по направленію, обратному направленію его движенія. Эта сила F, замедляющая относительное движеніе соприкасающихся тѣлъ, называется силою тренія. Причина тренія можетъ быть различная; прежде всего шероховатости поверхностей, представляя какъ бы малые выступы, должны являться непрерывнымъ рядомъ препятствій скольженію одной поверхности по другой. Въ то же время можетъ играть нѣкоторую роль и непосредственное сцѣпленіе между частицами двухъ трущихся тѣлъ. Изслѣдованія Warburg'а и Babo (1877) привели къ заключенію, что треніе происходитъ вслѣдствіе гнутій, которымъ подвергаются малые выступы, обусловливающіе не-абсолютную гладкость даже хорошо шлифованной поверхности; такимъ образомъ первоначальнымъ источникомъ тренія служатъ упругія силы, развивающіяся въ шероховатыхъ поверхностныхъ слояхъ.

Рис. 374.



Треніе твердыхъ тѣлъ сопровождается отдѣленіемъ мельчайшихъ частицъ отъ поверхности обоихъ трущихся тѣлъ. Иногда частицы одного тѣла пристаютъ къ поверхности другого; на этомъ основано писаніе карандашомъ (графитомъ) или мѣломъ по бумагѣ, дереву и т. под. Сюда относится странное явленіе прилипанія частицъ алюминія къ стеклу, которое, въ меньшей мѣрѣ, замѣчается и для магнія, цинка и кадмія, и которое изслѣдовалъ Margot.

Законы тренія впервые изслѣдовалъ Coulomb (1781). Приборъ, которымъ онъ пользовался, изображенъ на рис. 374; онъ понятенъ самъ собою. Плитка *aa* положенная на столъ, и дно ящика *b* представляли трущіяся поверхности. Ящикъ приводился въ движеніе гирями, положенными на доску *d* и затѣмъ изслѣдовался законъ его движенія. Оказалось, что это движеніе вообще равнопеременное (стр. 54), что указываетъ на дѣйствіе по-

стоянной во время движенія силы. Пусть P вѣсъ ящика, а слѣд. и та сила, съ которою трущіяся поверхности прижаты другъ къ другу; p вѣсъ гирь и доски d, т.-е. сила приложенная къ ящику. Вычитая изъ p силу тренія F, получаемъ движущую силу $p-F$, которая должна равняться произведенію массы $\frac{P+p}{g}$, приведенной въ движеніе, на ускореніе γ движенія. Итакъ, мы имѣемъ

$$p-F=\frac{P+p}{g}\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ускореніе γ можетъ быть опредѣлено наблюденіемъ времени t, въ теченіе котораго ящикъ перемѣщается на разстояніе s. Тогда $s=\gamma\frac{t^2}{2}$, слѣд. $\gamma=\frac{2s}{t^2}$, и окончательно

$$F=p-\frac{(P+p)\,2s}{gt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Пользуясь этой формулой, можно опредѣлить величину силы тренія F. Coulomb нашелъ слѣдующіе законы:

I. Треніе пропорціонально давленію, существующему между трущимися поверхностями.

II. Треніе не зависитъ отъ величины трущихся поверхностей.

III. Треніе не зависитъ отъ скорости движенія одной поверхности по другой.

Постоянная величина

$$f=\frac{F}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

зависящая отъ рода трущихся поверхностей, называется коэффиціентомъ тренія.

Morin (1833) повторилъ опыты Coulomb'а, пользуясь особымъ графическимъ методомъ, давшимъ возможность весьма точно изслѣдовать законъ движенія тѣла, скользящаго по поверхности другого. Онъ опредѣлилъ коэффиціентъ тренія f для различныхъ трущихся поверхностей, причемъ оказалось во-первыхъ, что во время движенія сила F, преодолѣвающая треніе, меньше, чѣмъ когда тѣло сначала находится въ покоѣ и должно быть приведено въ движеніе и, во-вторыхъ, что и раньше было извѣстно, что треніе значительно уменьшается, если помѣстить между трущимися поверхностями «смазывающее» вещество, въ родѣ масла, керосина, сухого мыла и т. д.

Приводимъ нѣкоторыя числа Morin'а:

	f Въ началѣ движенія.	f Во время движенія.
Чугунъ и чугунъ, слабо смазанные	0,16	0,15
Чугунъ и чугунъ, съ водою	—	0,31
Желѣзо и чугунъ, сухіе	0,19	0,18

Бронза и чугунъ, сухіе	—	0,22
Бронза и желѣзо, слабо смазанныя	—	0,16
Бронза и бронза	—	0,20
Чугунъ и дубъ, сухіе	—	0,49
» » » съ водою	0,65	0,22
» » » съ сухимъ мыломъ	—	0,19
Латунь и дубъ, сухіе	0,62	—
Дубъ и дубъ, волокны ‖, сухіе.	0,62	0,48
» » » » , съ сухимъ мыломъ. .	0,44	0,16
» » » волокны ⊥, сухіе.	0,54	0,34
» » » » , съ водою	0,71	0,25

Для трущихся желѣза и льда (коньки) Müller нашелъ $f = 0{,}016$ до 0,032.

Такъ наз. законы Coulomb'а несомнѣнно лишь приблизительно вѣрны и не выражаютъ истинныхъ законовъ тренія. Такъ Rennie нашелъ, что коеффиціентъ f растетъ при возрастающемъ давленіи P между трущимися поверхностями.

Вотъ нѣкоторыя изъ его чиселъ:

$P\frac{\text{клгр.}}{\text{кв. см.}}$	Чугунъ на чугунѣ.	Желѣзо на чугунѣ.	Сталь на чугунѣ.	Латунь на чугунѣ.
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215
36,77	0,409	0,366	0,357	0,223
47,25	—	0,376	0,403	0,233
49,92	—	0,434	—	0,234
57,65	—	—	—	0,273

Когда тѣло M (рис. 375) движется по поверхности AB другого тѣла, то на него дѣйствуютъ со стороны этого тѣла двѣ силы: противодѣйствіе P по нормали къ поверхности и сила тренія F по касательной; равнодѣйствующая R составляетъ съ нормалью уголъ φ, тангенсъ котораго равенъ $F:P$, слѣд.

$$\operatorname{tg}\varphi = f. \qquad (4)$$

Если тѣло положено на наклонную плоскость, составляющую уголъ α съ горизонтомъ, то движеніе начнется при условіи

$$\alpha > \varphi \qquad (5)$$

Если $\alpha < \varphi$, то тѣло остается въ покоѣ. Чтобы удержать тѣло въ покоѣ на наклонной плоскости при условіи $\alpha > \varphi$, необходимо приложить къ нему силу Q, параллельную наклонной плоскости и заключающуюся въ предѣлахъ

$$P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi} > Q > P\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi},$$

въ чемъ легко убѣдиться.

Давно было замѣчено техниками, что треніе между хорошо смазанными частями машинъ вовсе не слѣдуетъ законамъ Coulomb'a. Н. П. Петровъ впервые въ 1883 г. изслѣдовалъ законы тренія для этого случая, въ которомъ внутреннее треніе въ самомъ смазывающемъ слоѣ, какъ оказалось, играетъ наиболѣе важную роль. Главнѣйшіе результаты его изслѣдованій заключаются въ слѣдующемъ:

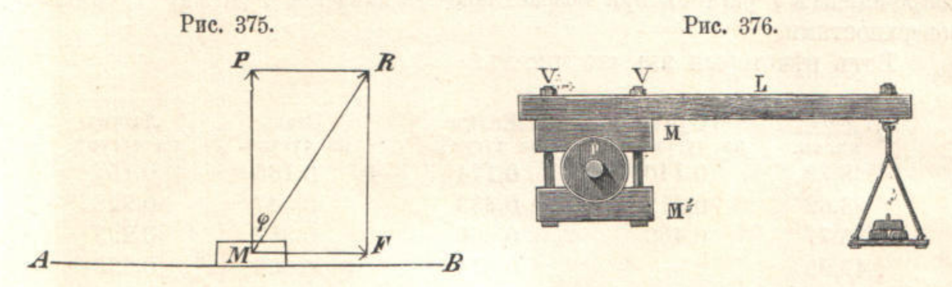
Сила тренія хорошо смазанныхъ машинныхъ частей пропорціональна поверхности трущихся тѣлъ, при всѣхъ прочихъ равныхъ обстоятельствахъ.

Сила тренія машинныхъ частей пропорціональна скорости ихъ относительнаго движенія.

Сила тренія обратно пропорціональна средней толщинѣ смазывающаго слоя.

Сила тренія пропорціональна корню квадратному отъ полныхъ давленій между трущимися поверхностями.

§ 3. Нажимъ Prony. Этотъ приборъ служитъ для опредѣленія мощности T (стр. 100) движущейся машины, измѣряемой тою работою, которую



можетъ дать вращающійся валъ въ теченіе одной секунды. Приборъ, изображенный на рис. 376, состоитъ изъ двухъ кусковъ дерева M и M', снабженныхъ выемками, между которыми, помощью винтовъ VV, сжимается ось P вала, вращающагося съ обыкновенною скоростью. Къ M прикрѣпленъ рычагъ L, къ концу котораго привѣшивается такой грузъ P, чтобы рычагъ не увлекался треніемъ оси, но оставался горизонтальнымъ. Если F сила тренія, r радіусъ вала и ω его угловая скорость, то искомая мощность T равна $F\omega r$. Моментъ вѣса P равенъ Pl, гдѣ l длина рычага L; моментъ вѣса послѣдняго p можно выразить въ видѣ pl. Въ такомъ случаѣ условіе равновѣсія рычага будетъ

$$Fr = (P+p)l,$$

но $T = Fr\omega$, слѣд.

$$T = (P+p)l\omega.$$

Если n число оборотовъ въ минуту, то $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, и мы находимъ искомую мощность въ лошадиныхъ силахъ (стр. 101) по формулѣ

$$T = 2n\pi \frac{(P+p)l}{60 \times 75} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

гдѣ P и p должны быть выражены въ килограммахъ, l въ метрахъ.

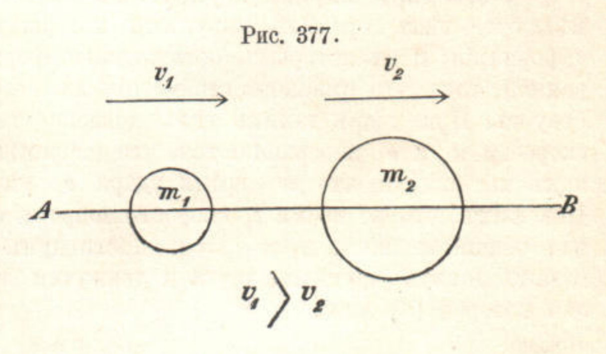
§ 4. Тренiе при катьбѣ или тренiе второго рода. Когда одно тѣло катится по поверхности другого, то также существуетъ тренiе, величина F_1 котораго по Coulomb'у выражается формулою

$$F_1 = \alpha \frac{P}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

въ которой P вѣсъ, r радiусъ катящагося тѣла (цилиндра), α коэффицiентъ тренiя при катьбѣ. Это тренiе значительно меньше тренiя при скольженiи.

§ 5. Ударъ тѣлъ; общiя замѣчанiя. Когда поверхности двухъ тѣлъ, движущихся съ различными по величинѣ или по направленiю скоростями, приходятъ въ соприкосновенiе, то происходитъ явленiе удара. Направленiе нормали въ точкѣ касанiя къ обѣимъ поверхностямъ называется направленiемъ удара. Ударъ называется центральнымъ, когда это направленiе проходитъ черезъ центры тяжести тѣлъ; ударъ шаровъ всегда центральный. Въ противномъ случаѣ ударъ называется эксцентричнымъ. Ударъ называется прямымъ или косымъ, смотря по тому совпадаетъ ли направленiе движенiя тѣлъ до удара съ направленiемъ самого удара или нѣтъ. Вопросъ объ ударѣ усложняется, когда соударяющiяся тѣла не свободны, или когда они имѣютъ кромѣ поступательнаго еще и вращательное движенiе.

Рис. 377.



Мы ограничиваемся разборомъ простѣйшаго случая прямого удара шаровъ.

Два однородныхъ шара, массы которыхъ m_1 и m_2 (рис. 377), движутся по прямой AB, проходящей черезъ ихъ центры, со скоростями v_1 и v_2, которыя мы обѣ считаемъ положительными въ одномъ направленiи, а именно отъ A къ B. Очевидное условiе возможности удара будетъ $v_1 > v_2$. Условимся считать время t отъ момента перваго соприкосновенiя поверхностей тѣлъ. Съ этого момента начинается деформацiя обѣихъ поверхностей, которыя подвергаются сплющиванiю. При этомъ тѣла производятъ въ каждый данный моментъ нѣкоторое давленiе f другъ на друга. Это давленiе дѣйствуетъ на массу m_1 по направленiю отъ B къ A, т.-е. замедляя ея движенiе, а на массу m_2 по направленiю отъ A къ B, т.-е. увеличивая ея скорость. Пусть u_1 и u_2 скорости обоихъ тѣлъ во время t послѣ перваго соприкосновенiя. Такъ какъ въ теченiе времени t тѣла подвергались двумъ силамъ, хотя и непрерывно мѣняющимся, но въ каждый элементъ времени равнымъ между собою, то ясно, что полные импульсы силы (стр. 72), которымъ шары были подвергнуты въ теченiе времени t, равны между собою. Отсюда

слѣдуетъ (стр. 74), что измѣненія количества движенія шаровъ въ теченіе времени t также должны быть равны между собою. Это даетъ намъ уравненіе

$$m_1v_1 - m_1u_1 = m_2u_2 - m_2v_2,$$

или

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

т.-е. сумма количествъ движенія обоихъ шаровъ не мѣняется во время удара.

Разсматривая подробнѣе явленіе удара, мы должны обратить вниманіе на упругія свойства соударяющихся тѣлъ. Ограничиваемся разборомъ двухъ крайнихъ, идеальныхъ случаевъ—удара шаровъ совершенно неупругихъ и совершенно упругихъ. Другихъ вопросовъ, какъ напр. интересный, но весьма еще спорный вопросъ объ ударѣ абсолютно твердыхъ, т.-е. вовсе не деформирующихся тѣлъ, мы затрагивать не будемъ.

§ 6. Ударъ шаровъ неупругихъ. Здѣсь подъ неупругими подразумѣваются тѣла, предѣлъ упругости которыхъ достигается при малѣйшей деформаціи, и въ которыхъ остаточная деформація вполнѣ равняется вызванной, такъ что никакого стремленія къ возстановленію формы не существуетъ. При ударѣ такихъ тѣлъ должна увеличиваться деформація пока скорости u_1 и u_2 не сравняются, что непремѣнно должно произойти, такъ какъ мы видѣли, что во время удара v_1 уменьшается, v_2 увеличивается. Положимъ, что во время t_1 скорости шаровъ сдѣлались одинаковыми и что ихъ общая величина $u_1 = u_2 = u$. Достигнувъ общей скорости, шары перестаютъ давить другъ на друга и движутся дальше съ этою скоростью u, для которой (8) даетъ

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Этою формулою вполнѣ рѣшается вопросъ объ ударѣ неупругихъ шаровъ.

Опредѣлимъ количество движенія K, которымъ шары обмѣнялись. Имѣемъ $K = m_1v_1 - m_1u = m_2u - m_2v_2$. Вставляя въ одно изъ этихъ выраженій величину u (9), получаемъ

$$K = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

K равняется количеству движенія массы $\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$, движущейся со скоростью, равною разности скоростей тѣлъ до удара.

Опредѣлимъ далѣе потерю J живой силы неупругихъ тѣлъ при ударѣ. Эта потеря равна

$$J = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \left(\frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2\right).$$

Вставляя сюда u, получаемъ

$$J = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Потерянная живая сила равна живой силѣ массы $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, движущейся со скоростью, равною разности скоростей тѣлъ до удара. Она затрачивается на работу деформацій и главнымъ образомъ переходитъ въ теплоту.

Въ частномъ случаѣ $m_1 = m_2$ и $v_2 = - v_1$ получаемъ $u = 0$, $J = 2.\frac{1}{2} m_1 v_1^2$. Тѣла останавливаются и вся ихъ живая сила потеряна.

§ 7. Ударъ шаровъ упругихъ. Здѣсь предполагается, что во время удара предѣлъ упругости достигнутъ не былъ, и что происходитъ полное возстановленіе прежней формы. Въ этомъ случаѣ мы должны весь ударъ раздѣлить на два періода: первый періодъ начинается отъ момента соприкосновенія поверхностей, и кончается въ моментъ наибольшей деформаціи, когда скорости шаровъ сдѣлались одинаковыми и равными тому u, которое дано въ (9). Затѣмъ настаетъ второй періодъ—возстановленіе формы, въ теченіе котораго сплюснутыя части вновь дѣлаются выпуклыми; онъ оканчивается, а вмѣстѣ съ нимъ и весь актъ удара, въ моментъ послѣдняго соприкосновенія поверхностей. Обозначимъ скорость тѣлъ въ этотъ моментъ черезъ V_1 и V_2; это въ то-же время скорости, съ которыми тѣла продолжаютъ двигаться дальше послѣ удара.

Первое уравненіе для опредѣленія V_1 и V_2 напишемъ, основываясь на томъ, что и въ теченіе второго періода давленія тѣлъ другъ на друга равны между собою, а потому и импульсы силъ, которымъ они подвергаются въ теченіе каждаго элемента времени, равны между собою. Отсюда слѣдуетъ, что въ теченіе второго періода, какъ и въ теченіе перваго, количество движенія, пріобрѣтенное массою m_2, равно количеству движенія, потерянному массою m_1. Это даетъ намъ

$$m_1 v_1 - m_1 V_1 = m_2 V_2 - m_2 v_2 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Второе уравненіе можно получить двумя способами:

A. Послѣ удара тѣла имѣютъ ту же форму, какъ и до удара; вся работа, произведенная во время удара, равна нулю, а слѣд. живая сила до и послѣ удара должна имѣть одно и то же значеніе:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Уравненія (12) и (13) можно переписать въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} m_1(v_1 - V_1) &= m_2(V_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - V_1^2) &= m_2(V_2^2 - v_2^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13,a)$$

Раздѣливъ второе уравненіе на первое, получаемъ

$$v_1 + V_1 = V_2 + v_2 .$$

Умноживъ это уравненіе на m_2 и вычтя его изъ (12), получаемъ V_1, а затѣмъ V_2:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \\ V_2 &= \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Этими уравненіями опредѣляются скорости тѣлъ послѣ удара. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи:

1. Шары одинаковые: $m_1 = m_2 = m$. Тогда $V_1 = v_2$ и $V_2 = v_1$; шары обмѣниваются скоростями. Когда одно тѣло догоняло другое, то послѣ удара первое пойдетъ дальше съ меньшею скоростью второго, а второе съ большею скоростью перваго. Когда шары двигались другъ другу на встрѣчу, то они отскакиваютъ другъ отъ друга, причемъ каждый шаръ пріобрѣтаетъ скорость, которую имѣлъ другой. Когда $v_2 = 0$, то послѣ удара $V_1 = 0$ и $V_2 = v_1$: шаръ двигавшійся останавливается, а бывшій въ покоѣ пріобрѣтаетъ скорость перваго.

2. Второй шаръ обладаетъ безконечно большою массою; это случай удара въ стѣну, которая пусть также движется съ нѣкоторою скоростью $\boldsymbol{v_2}$. Раздѣливъ числитель и знаменатель двухъ выраженій (14) на m_2 и положивъ затѣмъ $m_2 = \infty$, получаемъ

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -(v_1 - 2v_2) \\ V_2 &= v_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

Скорость стѣны не измѣнилась; скорость же шара **относительно стѣны** перемѣнила знакъ, ибо до удара она была равна $v_1 - v_2$, а послѣ удара $V_1 - V_2 = -(v_1 - 2v_2) - v_2 = -(v_1 - v_2)$. Въ случаѣ $v_2 = 0$ имѣемъ $V_1 = -v_1$, скорость шара мѣняетъ знакъ. Въ случаѣ $v_1 = 2v_2$ получаемъ $V_1 = 0$, шаръ останавливается.

Опредѣлимъ то количество движенія K_1, которымъ шары обмѣниваются во время удара, т.-е. въ теченіе обоихъ періодовъ, на которые это время распадается; мы нашли уже, что шары въ теченіе перваго періода обмѣниваются количествомъ движенія K, даннымъ формулою (10). Имѣемъ

$$K_1 = m_1(v_1 - V_1) \text{ или } K_1 = m_2(V_2 - v_2).$$

Вставивъ въ одно изъ этихъ выраженій V_1 или V_2, получаемъ

$$K_1 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) = 2K \quad \ldots \quad (16)$$

Обмѣнъ количествъ движенія при ударѣ упругихъ шаровъ вдвое больше, чѣмъ при ударѣ неупругихъ, или обмѣнъ во второмъ періодѣ равенъ обмѣну въ первомъ.

B. Формулы (14) можно вывести инымъ путемъ, считая только что выведенный результатъ a priori понятнымъ. Втеченіе второго періода должны

повторяться, только въ обратномъ порядкѣ, всѣ тѣ давленія, которыя дѣйствовали на тѣла въ теченіе перваго періода. Отсюда вытекаетъ (хотя и не съ очевидною ясностью), что импульсы силъ, а слѣд. и количества движенія, потерянное и пріобрѣтенное, въ обоихъ періодахъ одинаковы.

Втеченіе перваго періода масса m_1 потеряла скорость $v_1 - u$; въ теченіе второго ея скорость уменьшится еще на такую же величину, слѣд.

$$V_1 = v_1 - 2(v_1 - u) = 2u - v_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17,a)$$

Второе тѣло пріобрѣло въ первомъ періодѣ скорость $u - v_2$; во второмъ оно пріобрѣтетъ еще разъ такую же скорость, слѣд.

$$V_2 = v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17,b)$$

Вставляя (9) въ (17,a) и (17,b), получаемъ вновь (14). Затѣмъ уже можно доказать, что живая сила движенія не измѣнилась во время удара абсолютно упругихъ шаровъ.

§ 8. Наклонный ударъ шара въ стѣну. Когда шаръ встрѣчаетъ неподвижную стѣну по направленію, составляющему нѣкоторый уголъ α съ нормалью, то слагаемая его скорости, параллельная стѣнѣ, остается безъ измѣненія, между тѣмъ какъ нормальная слагаемая перемѣняетъ знакъ. Отсюда слѣдуетъ, что скорость послѣ удара, расположенная въ плоскости, проходящей черезъ направленіе скорости до удара и черезъ нормаль, составитъ съ послѣдней также уголъ α. Уголъ паденія будетъ равняться углу отраженія.

§ 9. Время удара. Время отъ момента перваго до момента послѣдняго соприкосновенія поверхностей соударяющихся тѣлъ назовемъ временемъ удара; обозначимъ его черезъ T. Это время весьма малое, когда ударъ происходитъ между тѣлами обыкновенныхъ размѣровъ. Для случая удара стальныхъ цилиндровъ Hamburger нашелъ въ среднемъ $T = 0{,}0006$ сек. при длинѣ цилиндровъ отъ 1 — 4 децим.

Полная теорія удара шаровъ была дана великимъ Hertz'омъ (1882). Приводимъ его формулу для T (въ секундахъ), относящуюся къ случаю удара равныхъ шаровъ:

$$T = 2{,}9432R\sqrt[5]{\frac{25\pi^2 s^2 (1-\sigma^2)^2}{8cE^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Здѣсь R радіусъ шаровъ въ миллиметрахъ, s ихъ плотность, σ коеффиціентъ Пуассона и E модуль Юнга для матеріала шаровъ, и c ихъ относительная скорость до удара. Плотность s должна быть выражена въ системѣ, въ которой килограммъ есть единица силы, миллиметръ единица длины, секунда единица времени. Единица массы въ этой системѣ равна 1000×9810 гр. и $s = s_0 . 10^{-6} . (9810)^{-1}$, гдѣ s_0 плотность табличная ($C. G. S.$). Полагая $\sigma = \frac{1}{3}$, получаемъ для стальныхъ шаровъ ($s_0 = 7{,}7$, $E = 20{,}000$)

$$T = 0{,}000024Rc^{-\frac{1}{5}} \text{ сек.}$$

Для шаровъ изъ желтой мѣди ($s_0 = 8{,}39$, $E = 10000$)

$$T = 0{,}00003 Rc^{-\frac{1}{5}} \text{ сек.}$$

$R = 13$ мм. даетъ $T = 0{,}000181$ сек. при $c = 73{,}7 \frac{\text{мм.}}{\text{сек.}}$, и $T = 0{,}000138$ при $c = 295 \frac{\text{мм.}}{\text{сек.}}$. Измѣренія Hamburger'а дали результаты, хорошо согласующіеся съ этими числами.

Въ видѣ курьеза приведемъ слѣдующее указаніе Hertz'а: еслибы два стальныхъ шара, размѣровъ земли, двигались другъ другу на встрѣчу съ относительною скоростью $c = 10 \frac{\text{мм.}}{\text{сек.}}$, то время удара доходило бы до 27 часовъ.

ЛИТЕРАТУРА.

Coulomb. Théorie des machines simples, 1781. Mém. des savants étrangers. X p. 254, 1785.

Warburg und Babo. W. A. 2 p. 406, 1877.

Margot. Arch. sc. phys. 32 p. 138, 1894; 33 p. 161, 1895.

Morin. Nouvelles expériences sur le frottement. Paris, 1833; Mém. de l'Acad. française II, III, 1834, 1835; Dove's Repertor. I.

J. Mueller. Pogg. Ann. 139 p. 505, 1870.

Rennie. Dingl. Journal 34 p. 165, 1829; Phil. Trans. 1829· Hann. Archit. 1861 p. 346.

Н. П. Петровъ. Описаніе и результаты опытовъ надъ треніемъ жидкостей и машинъ. Изв. Спб. Технологическаго Института 1885 г. Спб. 1886.

Н. Н. Шиллеръ. Равновѣсіе твердаго тѣла при дѣйствіи тренія и т. д. О. Ф. Н. Об. Л. Е. 5 вып. 1. стр. 17, 1892.

Къ § 3.

Prony. Ann. chim. phys. (2) 19 p. 165, 1822.

Къ § 5.

По вопросу объ ударѣ тѣлъ:

Н. Е. Жуковскій. Ж. Ф. Х. О. 16 стр. 388, 1884; 17 стр. 47, 1885.

Н. Н. Шиллеръ. Ж. Ф. Х. О. 17 стр. 5, 200, 1885.

Б. Станкевичъ. Ж. Ф. Х. О. 22 стр. 118, 1890.

Къ § 9.

Hamburger. W. A. 28 p. 653, 1886.

Hertz. Crelle's Journ. 92 p. 156, 1882. Ges. Werke I p. 155.

ТАБЛИЦЫ.

Всѣ таблицы (кромѣ I) заимствованы изъ книги: «Landolt und Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen», второе изданіе. Берлинъ 1894.

ТАБЛИЦА I.

Атомные вѣса важнѣйшихъ химическихъ элементовъ.

F. W. Clarke, Journ. Amer. Chem. Soc. 18 p. 1. 1896; Zeitschr. f. physical. Chemie 21 p. 181, 1891. При $H=1$ принято $O=15{,}88$.

НАЗВАНІЯ.	Знакъ.	$H=1$ $O=15{,}88$	$O=16$ $H=1{,}008$	НАЗВАНІЯ.	Знакъ.	$H=1$ $O=15{,}88$	$O=16$ $H=1{,}008$
Азотъ	*N*	13,94	14,04	Мѣдь	*Cu*	63,12	63,60
Алюминій . . .	*Al*	26,91	27,11	Натрій	*Na*	22,88	23,05
Барій	*Ba*	136,40	137,43	Никкель. . . .	*Ni*	58,24	58,69
Боръ	*B*	10,86	10,95	Олово	*Sn*	118,15	119,05
Бромъ.	*Br*	79,34	79,95	Осмій	*Os*	189,55	190,99
Висмутъ. . . .	*Bi*	206,54	208,11	Палладій . . .	*Pd*	105,56	106,36
Водородъ . . .	*H*	1,00	1,008	Платина. . . .	*Pt*	193,41	194,89
Желѣзо	*Fe*	55,60	56,02	Ртуть	*Hg*	198,50	200,00
Золото.	*Au*	195,74	197,24	Свинецъ. . . .	*Pb*	205,36	206,92
Иридій	*Jr*	191,66	193,12	Селенъ	*Se*	78,40	79,00
Іодъ	*J*	125,89	126,85	Серебро	*Ag*	107,11	107,92
Кадмій	*Cd*	111,08	111,93	Стронцій. . . .	*Sr*	86,95	87,61
Калій	*K*	38,82	39,11	Сурьма	*Sb*	119,52	120,43
Кальцій	*Ca*	39,78	40,08	Сѣра	*S*	31,83	32,07
Кислородъ. . .	*O*	15,88	16,00	Таллій.	*Tl*	202,60	204,15
Кобальтъ . . .	*Co*	58,49	58,93	Углеродъ. . . .	*C*	11,92	12,01
Кремній. . . .	*Si*	28,18	28,40	Фосфоръ. . . .	*P*	30,79	31,02
Литій	*Li*	6,97	7,03	Фторъ.	*Fl*	18 89	19,03
Магній	*Mg*	24,11	24,29	Хлоръ.	*Cl*	35,18	35,45
Марганецъ . .	*Mn*	54,57	54,99	Хромъ.	*Cr*	51,74	52,14
Мышьякъ . . .	*As*	74,52	75,09	Цинкъ.	*Zn*	64,91	65,41

ТАБЛИЦА II.

Плотность δ_t воздуха

относительно воды, при различныхъ температурахъ t, при давленіи въ 760 мм., широтѣ 45°, у поверхности моря (сухой воздухъ съ 0,04% CO_2 по объему).

$$\delta_t = \frac{0,001293052}{1+0,003670t}.$$

t^0	δ_t	t^0	δ_t	t^0	δ_t	t^0	δ_t
	0,00		**0,00**		**0,00**		**0,000**
−25	14237	2	12836	31	11610	115	9070
−20	13955	3	12790	32	11572	120	8977
−15	13684	4	12743	33	11534	125	8864
−10	13423	5	12698	34	11496	130	8754
− 5	13172	6	12652	35	11459	135	8647
− 4	13123	7	12607		**0,000**	140	8542
− 3	13074	8	12562	90	9730	145	8438
− 2	13026	9	12517	91	9693	150	8340
−1	12978	10	12473	92	9667	155	8242
−0,9	12973	11	12429	93	9640	160	8147
−0,8	12969	12	12385	94	9613	165	8054
−0,7	12964	13	12342	95	9588	170	7963
−0,6	12959	14	12299	96	9562	175	7874
−0,5	12954	15	12256	97	9536	180	7787
−0,4	12950	16	12213	98	9510	185	7702
−0,3	12945	17	12171	99	9485	190	7618
−0,2	12940	18	12129	100	9459	195	7537
−0,1	12935	19	12088	101	9434	200	7457
±0,0	12931	20	12046	102	9409	205	7379
+0,1	12926	21	12005	103	9384	210	7303
0,2	12921	22	11965	104	9359		
0,3	12916	23	11924	105	9334		
0,4	12912	24	11884	106	9309		
0,5	12907	25	11844	107	9286		
0,6	12902	26	11804	108	9260		
0,7	12897	27	11765	109	9236		
0,8	12893	28	11726	110	9212		
0,9	12888	29	11687				
1	12883	30	11648				

ТАБЛИЦА III.

Плотность δ газовъ (воздухъ $\delta = 1$) и вѣсъ p литра газовъ при 0°, 760 мм. и широтѣ 45°.

(Принято $O = 15{,}96$ при $H = 1$).

ВЕЩЕСТВО.	Формула.	Молекул. вѣсъ ($H = 2$).	p граммъ.	δ
Азотъ	N_2	28,02	1,2546	0,9718
Амміакъ	NH_3	17,01	0,7616	0,5901
Ацетиленъ	C_2H_2	25,94	1,1615	0,92
Бромъ	Br_2	159,52	7,1426	5,5243
Водородъ	H_2	2	0,08955	0,0693
Двуокись углерода	CO_2	43,89	1,9652	1,529
Закись азота	N_2O	43,98	1,9692	1,614
Кислородъ	O_2	31,92	1,4292	1,1056
Метанъ	CH_4	15,97	0,71506	0,5576
Окись азота.	NO	29,97	1,3419	1,037
Окись углерода	CO	27,93	1,2506	0,9678
Сѣрнистый газъ	SO_2	63,90	2,8611	2,277
Сѣроводородъ	H_2S	33,98	1,5215	1,1912
Фтористый водородъ	HFl	20,06	0,8982	0,713
Фторъ	Fl_2	38,12	1,7068	1,26
Хлористый водородъ.	HCl	36,37	1,6285	1,256
Хлоръ	Cl_2	70,74	3,1674	2,4502 (при 200°)
Ціанъ	C_2N_2	51,96	2,3265	1,806
Этанъ	C_2H_6	29,94	1,3406	1,075
Этиленъ.	C_2H_4	27,94	1,2510	0,9852

ТАБЛИЦА IV.

Плотность чистой воды между 0° и 35°,

отнесенная къ плотности при 4°, по наблюденіямъ Thiesen, Scheel и Marek.
Температуры по водородной шкалѣ.

	ДЕСЯТЫЯ ДОЛИ ГРАДУСА.									
t^0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,999874	880	886	892	898	904	909	915	920	925
1	930	935	939	944	948	952	956	960	963	967
2	970	973	976	979	981	984	986	988	990	992
3	993	994	996	997	998	999	999	$\overline{000}$	$\overline{000}$	$\overline{000}$
4	1,000000	000	000	$\overline{999}$	$\overline{999}$	$\overline{998}$	$\overline{997}$	$\overline{996}$	$\overline{995}$	$\overline{993}$
5	0,999992	990	988	986	984	982	980	977	975	972
6	969	966	962	959	955	952	948	944	940	935
7	931	926	921	916	911	906	901	895	890	884
8	878	872	866	860	854	847	840	833	826	819
9	812	804	797	789	781	773	765	757	748	740
10	731	722	713	704	695	686	676	667	657	647
11	637	627	617	606	596	585	574	563	552	541
12	530	518	507	495	483	471	459	447	435	422
13	410	397	384	371	358	345	332	318	305	291
14	277	263	249	235	221	206	192	177	162	147

	ДЕСЯТЫЯ ДОЛИ ГРАДУСА.									
t^0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
15	132	117	102	087	071	056	040	024	008	99$\overline{2}$
16	0,998976	960	943	927	910	893	876	859	842	825
17	808	790	772	755	737	719	701	683	664	646
18	628	609	590	571	552	533	514	495	476	456
19	437	417	397	377	357	337	317	296	276	255
20	235	214	193	172	151	130	109	087	066	044
21	023	001	97$\overline{9}$	95$\overline{7}$	93$\overline{5}$	91$\overline{3}$	89$\overline{0}$	86$\overline{8}$	84$\overline{6}$	82$\overline{3}$
22	0,997800	778	755	732	709	685	662	639	615	592
23	568	544	520	496	472	448	424	399	375	350
24	326	301	276	251	226	201	176	150	125	099
25	073	048	022	99$\overline{6}$	97$\overline{0}$	94$\overline{3}$	91$\overline{7}$	89$\overline{1}$	86$\overline{4}$	83$\overline{8}$
26	0,996811	784	758	731	704	677	649	622	595	567
27	540	512	485	457	429	401	373	345	317	288
28	260	231	203	174	145	116	087	058	029	000
29	0,995971	942	912	883	853	823	794	764	734	704
30	674	644	614	583	553	522	492	461	430	399
31	368	337	306	275	243	212	180	148	117	085
32	053	021	98$\overline{9}$	95$\overline{7}$	92$\overline{5}$	89$\overline{3}$	86$\overline{1}$	82$\overline{9}$	79$\overline{6}$	76$\overline{4}$
33	0,994731	698	665	632	599	566	533	500	467	434
34	400	367	333	300	266	232	198	164	130	096
35	062	028	99$\overline{4}$	96$\overline{0}$	92$\overline{5}$	89$\overline{1}$	85$\overline{6}$	82$\overline{2}$	78$\overline{7}$	75$\overline{2}$

ТАБЛИЦА V.

Плотность δ чистой воды между 35° и 100°,

отнесенная къ плотности при 4° по наблюденіямъ Matthiessen и Rosetti.

t°	δ	t	δ	t	δ
36	0,99372	58	0.98432	80	0,97191
37	337	59	382	81	129
38	303	60	331	82	066
39	268	61	280	83	004
40	233	62	228	84	0,96941
41	195	63	175	85	876
42	157	64	121	86	812
43	117	65	067	87	746
44	077	66	012	88	682
45	035	67	0,97957	89	616
46	0,98993	68	902	90	550
47	949	69	846	91	483
48	905	70	780	92	416
49	860	71	733	93	348
50	813	72	674	94	280
51	767	73	615	95	212
52	721	74	555	96	143
53	674	75	495	97	074
54	627	76	435	98	005
55	579	77	375	99	0,95934
56	530	78	314	100	863
57	481	79	253		

ТАБЛИЦА VI.

Плотность δ чистой воды ниже 0°.

По наблюденіямъ Pierre, Weidner и Rosetti.

t^0	δ	t^0	δ
—10	0,99815	—5	0,99930
— 9	843	—4	945
— 8	869	—3	958
— 7	892	—2	970
— 6	912	—1	979

ТАБЛИЦА VII.

Плотность δ ртути между 0° и 30°.

По наблюденіямъ Marek'a.

t^0	δ	t^0	δ	t^0	δ
0	13,5956	11	13,5685	21	13,5439
1	5931	12	5660	22	5414
2	5907	13	5635	23	5390
3	5882	14	5611	24	5365
4	5857	15	5586	25	5341
5	5833	16	5562	26	5316
6	5808	17	5537	27	5292
7	5783	18	5513	28	5267
8	5759	19	5488	29	5243
9	5734	20	5463	30	5218
10	5709				

ТАБЛИЦА VIII.

Плотность ртути между 0° и 360°.

По наблюденіямъ Marek'a.

t^0	δ	t^0	δ	t^0	δ	t^0	δ
0	13,5956	100	13,3524	200	13,1150	300	12,8807
10	5709	110	3284	210	0915	310	8573
20	5463	120	3045	220	0680	320	8340
30	5218	130	2807	230	0445	330	8107
40	4974	140	2569	240	0210	340	7873
50	4731	150	2331	250	12,9976	350	7640
60	4488	160	2094	260	9742	360	7406
70	4246	170	1858	270	9508		
80	4005	180	1621	280	9274		
90	3764	190	1385	290	9041		

ТАБЛИЦА IX.

Плотность δ важнѣйшихъ химическихъ элементовъ.

НАЗВАНІЕ.		δ	НАЗВАНІЕ.		δ
Алюминій		2,60	Олово		6,97—7,37
Азотъ		см. табл. III	Палладій		10,9—12,1
Барій		3,75	Платина		21,50
Бромъ		3,15	Ртуть		13,55
Гелій		2,00 (?)	Свинецъ		11,4
Висмутъ		9,80	Селенъ.		
Водородъ		см. табл. III		Кристаллическ.	4,8
Желѣзо		7,86		Аморфный	4,2
	Чугунъ	7,82	Серебро		10,53
	Сталь	7,70		Жидкое	9,51
	Жидкое	6,88	Стронцій		2,54
Золото		19,32	Сурьма		6,71
Иридій		22,42	Сѣра.		
Іодъ		4,95		Ромбическая	2,07
Кадмій		8,60		Моноклиномѣр.	1,96
Калій		0,87		Аморфная	1,92
Кальцій		1,57		Жидкая 113°	1,811
Кислородъ		см. табл. III	Углеродъ.		
Кобальтъ		8,3—8,7		Алмазъ	3,52
Кремній.				Графитъ	2,3
	Кристаллическ.	2,39		Ретортн. уголь	1,885
	Аморфный	2,00	Фосфоръ.		
Литій		0,59		Бѣлый	1,83
Магній		1,74		Красный	2,20
Мѣдь		8,92		Металлическій	2,34
	Жидкая	8,217	Хлоръ.		
Мышьякъ.				Газообразный	см. табл. III
	Кристаллическ.	5,727		жидкій при—80°	1,660
	Аморфный	4,71		0°	1,469
	Плавленый	5,71		+36°	1,362
	Аморфн. черный	3,7		80°	1,200
Натрій		0,977	Хромъ		6,50
Никкель		8,9	Цинкъ		6,86—7,24

ТАБЛИЦА X.

Плотность δ нѣкоторыхъ химическихъ соединеній.

НАЗВАНІЕ.	Формула.	δ	НАЗВАНІЕ.	Формула.	δ
Азотъ.			Натріевые . .	$AlNa(SO_4)_2+12H_2O$	1,60
Азотн. кислота.	HNO_3	1.56	Хромовые . .	$CrK(SO_4)_2+12H_2O$	1,837
	Дымящая.	1,48	Кремній.		
Барій.			Кварцъ . . .	SiO_2	2,65
Окись . . .	BaO	5,00	Ледъ 0° . . .	H_2O	0,9167
Перекись . .	BaO_2	4,96	Магній.		
Баритъ . . .	$Ba(OH)_2+8H_2O$	1,656	Окись . . .	MgO	3,22
Желѣзо.			Марганецъ.		
Окись . . .	Fe_2O_3	5,12	Перекись . .	MnO_2	5,03
Магнитн.желѣз.	Fe_3O_4	5,16	Мѣдь.		
Купоросъ . .	$FeSO_4$	2,99	Окислы . . .	Cu_2O	5,88
	$FeSO_4+7H_2O$	1,881		CuO	6,40
Калій			Малахитъ . .	$CuCO_3+Cu(OH)_2$	3,85
Хлористый . .	KCl	1,977	Купоросъ . .	$CuSO_4$	3,58
Бромистый . .	KBr	2,690		$CuSO_4+5H_2O$	2,272
Іодистый . .	KJ	3,070	Натрій.		
Ѣдкій кали. .	KHO	2,044	Хлористый . .	$NaCl$	2.15
	$KOH+H_2O$	1,987	Бромистый . .	$NaBr$	3,014
Углекал. соль .	K_2CO_3	2,29	Іодистый . .	NaJ	3,55
	$K_2CO_3+2H_2O$	2,043	Сода. . . .	Na_2CO_3	2,476
	$KHCO_3$	2,17		$Na_2CO_3+10H_2O$	1,458
Сѣрнокисл.соль.	$KHSO_4$	2,355		$NaHCO_3$	2,206
Кальцій.			Сѣрнонатр.соль.	$Na_2SO_4+10H_2O$	1,462
Хлористый . .	$CaCl_2$	2,216	Бура . . .	$Na_2B_4O_7+10H^2O$	1,721
	$CaCl_2+6H_2O$	1,654	Нашатырь . . .	NH_4Cl	1,52
Фтористый . .	$CaFl_2$	3,183	Ртуть.		
Окись . . .	CaO	3,15	Окислы . . .	Hg_2O	9,82
	$Ca(OH)_2$	2,078		HgO	11,14
Углекисл. . .	$CaCO_3$	2,82	Соединенія съ Cl	Hg_2Cl_2	7,103
Шпатъ известк.	„	2,715		$HgCl_2$	5,424
Аррагонитъ. .	„	2,934	Свинецъ.		
Гипсъ . . .	$CaSO_4$	2,96	Хлористый . .	$PbCl_2$	5,80
	$CaSO_4+2H_2O$	2,32	Окись . . .	PbO (желтая).	9,2
Квасцы.			Сурикъ . . .	Pb_3O_4	9,07
Каліевые . .	$AlK(SO_4)_2$	2,228	Серебро.		
	$AlK(SO_4)_2+12H_2O$	1,72	Хлористое . .	$AgCl$	5.55

НАЗВАНІЕ.	Формула.	δ	НАЗВАНІЕ.	Формула.	δ
Бромистое . .	$AgBr$	6,33	Сѣроуглеродъ .	CS_2	1,264
Іодистое. . .	AgJ	5,62	Хлоръ.		
Азотнокислое .	$AgNO_3$	4,34	Солян. кислота	$ClH+2H_2O$	1,46
Сѣра.			„ „	Дымящая.	1,22
Сѣрная кислота.	SO_3 (ангидр.)	1,913	Хромъ.		
	H_2SO_4	1,853	Хромокис. калій.	K_2CrO_4	2,721
Углеродъ.			Двухромок. калій.	$K_2Cr_2O_7$	2,70
Двуокись жидкая. . .	CO_2 −34°	1,057	Цинкъ.		
	CO_2 0°	0,9471	Хлористый . .	$ZnCl_2$	2,75
	CO_2 +10°	0,8940	Окись . . .	ZnO	5,65
	CO_2 20°	0,8267	Купоросъ . .	$ZnSO_4$	3,49
Твердая . .		1,2		$ZnSO_4+7H_2O$	2,015

Органическія соединенія.

Около 20°.

НАЗВАНІЕ.	Формула.	δ
Алкоголь метиловый . .	CH_4O (20°)	0,796
Алкоголь этиловый. . .	C_2H_6O (20°)	0,789
Анилинъ. . . .	C_6H_7N	1,022
Бензолъ	C_6H_6	0,880
Глицеринъ . . .	$C_3H_8O_3$	1,26
Камфора. . . .	$C_{10}H_{10}O$	1,00
Муравьиная кисл.	CH_2O_2	1,220
Нафталинъ . . .	$C_{10}H_8$	1,145
Толуолъ. . . .	C_7H_8	0,886
Уксусная кислота.	$C_2H_4O_2$	1,05
Уксуснокис.амилъ.	$C_7H_{14}O_2$	0,89
Фенолъ	C_6H_6O	1,072
Хлороформъ . .	$CHCl_3$	1,526

Различныя вещества.

НАЗВАНІЕ.	δ
Азбестъ	2,05—2,8
Асфальтъ . . .	1,07—1,2
Воскъ	0,96—0,97
Гранитъ. . . .	2,54—2,96
Гуттаперча . . .	0,97
Каучукъ. . . .	0,95
Кости	1,7—2,0
Мраморъ. . . .	2,65—2,8
Мѣлъ.	2,25—2,69
Парафинъ . . .	0,87—0,93
Слоновая кость .	1,83—1,92
Стекло (Кронъ). .	2,5—2,7
Стекло-флинтъ . .	3,15—3,4
„ тяжелый .	3,6—3,9
Фарфоръ. . . .	2,24—2,49

ТАБЛИЦА XI.

Капилярная постоянная a^2 и поверхностное натяженіе α воды.

$$\alpha = \frac{a^2 \delta}{2},$$ гдѣ δ плотность воды.

t	a^2	α	t	a^2	α	t	a^2	α
0	15,4080	7,923	34	14,4458	7,323	68	13,4836	6,682
1	15,3797	7,906	35	14,4175	7,304	69	13,4553	6,663
2	15,3514	7,889	36	14,3892	7,286	70	13,4270	6,643
3	15,3231	7,871	37	14,3609	7,268	71	13,3987	6,624
4	15,2948	7,854	38	14,3326	7,249	72	13,3704	6,604
5	15,2665	7,837	39	14,3043	7,231	73	13,3421	6,585
6	15,2382	7,820	40	14,2760	7,212	74	13,3138	6,565
7	15,2099	7,802	41	14,2477	7,194	75	13,2855	6,545
8	15,1816	7,785	42	14,2194	7,175	76	13,2572	6,526
9	15,1533	7,768	43	14,1911	7,157	77	13,2289	6,506
10	15,1250	7,750	44	14,1628	7,139	78	13,2006	6,486
11	15,0967	7,733	45	14,1345	7,120	79	13,1723	6,466
12	15,0684	7,715	46	14,1062	7,101	80	13,1440	6,446
13	15,0401	7,698	47	14,0779	7,083	81	13,1157	6,426
14	15,0118	7,680	48	14,0596	7,064	82	13,0874	6,406
15	14,9835	7,663	49	14,0213	7,045	83	13,0691	6,386
16	14,9552	7,645	50	13,9930	7,026	84	13,0308	6,366
17	14,9269	7,627	51	13,9647	7,007	85	13,0025	6,346
18	14,8986	7,610	52	13,9364	6,988	86	12,9742	6,326
19	14,8703	7,592	53	13,9081	6,969	87	12,9469	6,306
20	14,8420	7,574	54	13,8898	6,950	88	12,9176	6,286
21	14,8137	7,557	55	13,8515	6,931	89	12,8893	6,266
22	14,7854	7,539	56	13,8232	6,912	90	12,8610	6,245
23	14,7571	7,521	57	13,7949	6,893	91	12,8327	6,225
24	14,7288	7,503	58	13,7666	6,874	92	12,8044	6,205
25	14,7005	7,485	59	13,7383	6,855	93	12,7761	6,185
26	14,6722	7,467	60	13,7100	6,836	94	12,7588	6,164
27	14,6439	7,449	61	13,6817	6,817	95	12,7295	6,144
28	14,6156	7,431	62	13,6534	6,798	96	12,6902	6,124
29	14,5873	7,413	63	13,6251	6,779	97	12,6639	6,103
30	14,5590	7,395	64	13,5968	6,759	98	12,6346	6,083
31	14,5307	7,377	65	13,5685	6,740	99	12,6063	6,063
32	14,5024	7,359	66	13,5402	6,721	100	12,5780	6,042
33	14,4741	7,341	67	13,5119	6,702			

ТАБЛИЦА XII.

Капилярная постоянная a^2 и поверхностное натяженіе α алкоголя и эфира.

$\alpha = \frac{a^2 \delta}{2}$, гдѣ δ плотность жидкости.

Эфиръ.			Алкоголь.		Эфиръ.			Алкоголь.		Алкоголь.			Алкоголь.		
t	a^2	α	a^2	α	t	a^2	α	a^2	α	t	a^2	α	t	a^2	α
0	5,4335	1,971	6,062	2,585	27	4,7342	1,656	5,677	2,348	36	5,548	2,269	63	5,161	2,031
1	5,4076	1,959	6,048	2,576	28	4,7083	1,644	5,663	2,339	37	5,534	2,260	64	5,147	2,022
2	5,3817	1,948	6,033	2,567	29	4,6824	1,632	5,648	2,330	38	5,519	2,251	65	5,133	2,013
3	5,3558	1,936	6,019	2,559	30	4,6565	1,620	5,633	2,321	39	5,505	2,242	66	5,119	2,005
4	5,3299	1,924	6,005	2,550	31	4,6306	1,609	5,619	2,313	40	5,490	2,233	67	5,104	1,996
5	5,3040	1,913	5,991	2,541	32	4,6047	1,597	5,605	2,304	41	5,476	2,225	68	5,090	1,987
6	5,2781	1,901	5,977	2,532	33	4,5788	1,586	5,591	2,295	42	5,462	2.216	69	5,076	1,978
7	5,2522	1,889	5,963	2,523	34	4,5529	1,574	5,577	2,286	43	5,447	2,207	70	5,061	1,969
8	5,2263	1,878	5,948	2,515	35	4,5260	1,562	5,562	2,277	44	5,433	2,198	71	5,047	1,960
9	5,2004	1,866	5,934	2,506						45	5,119	2,189	72	5,033	1,951
10	5,1745	1,854	5,920	2,497						46	5,404	2,181	73	5,018	1,942
11	5,1486	1,843	5,905	2,488						47	5,390	2,172	74	5,004	1,933
12	5,1227	1,831	5,891	2,479						48	5,376	2.163	75	4,990	1,925
13	5,0968	1,819	5,877	2,471						49	5,361	2,154	76	4,976	1,916
14	5,0709	1,808	5,863	2,462						50	5,347	2,145	77	4,962	1,907
15	5,0450	1,796	5,848	2,453						51	5,333	2,137	78	4,948	1,898
16	5,0191	1,774	5,834	2,444						52	5,319	2,128			
17	4,9932	1,763	5,820	2,435						53	5,304	2,119			
18	4,9673	1,751	5,805	2,427						54	5,290	2,110			
19	4,9414	1,749	5,791	2,418						55	5,276	2,101			
20	4,9155	1,737	5,776	2,409						56	5,261	2.093			
21	4,8896	1,726	5,762	2,400						57	5,247	2,084			
22	4,8637	1,714	5,748	2,391						58	5,233	2,075			
23	4,8378	1,702	5,733	2,383						59	5,218	2,066			
24	4,8119	1,691	5,719	2,374						60	5,204	2,057			
25	4,7860	1,679	5,705	2,365						61	5,190	2,049			
26	4,7601	1,667	5,691	2,356						62	5,176	2,040			

ТАБЛИЦА XIII.

Капилярная постоянная a^2 и поверхностное натяженіе α различныхъ жидкостей.

$\alpha = \frac{a^2 \delta}{2}$, гдѣ δ плотность жидкости.

ВЕЩЕСТВО.	Формула.	t°	a^2 (кв. мм.).	α (мгр.).
Алкоголь	C_2H_6O	—	см. таб. XII.	—
Бензолъ	C_6H_6	15	6,817	2,877
Вода	H_2O	—	см. таб. XI.	—
Муравьиная кислота	CH_2O_2	20	7,137	4,097
Оливковое масло	—	22	7,159	3,271
Ртуть	Hg	20	6,764	45,82
Терпентиновое масло	$C_{10}H_{16}$	21	6.100	2,726
Уксусная кислота	$C_2H_4O_2$	15,6	5,576	2,957
Хлороформъ	$CHCl_3$	20	3,755	2,638
Эфиръ	$C_4H_{10}O$	—	см. таб. XII.	—

ОБЗОРЪ ТАБЛИЦЪ.